بسم الله الرحمن الرحيم

# هدية مميزة لكل طالب توجيهي علمي في فلسطين

## تلخيص المرجان للأستاذ معتصم ريحان

# رياضيات توجيهي علمي 2022
# حسب المنهاج الفلسطيني

**و لأول مرة في فلسطين**

هذا التلخيص مشروح بالكامل و بشكل تفصيلي مميز

بفيديوهات خاصة ، للطلب راسلني واتس

أ. معتصم ريحان 00972598709519

**الوحدة الثانية**

***محتويات التلخيص :**

*حل أسئلة و أمثلة الكتاب الوزاري بشكل مفصل مع التوضيح

*حل أسئلة امتحانات سابقة مهمة بشكل مفصل مع التوضيح

*حل أسئلة خارجية مهمة بشكل مفصل مع التوضيح

*تلخيص المفاهيم و القوانين و النظريات بشكل مبسط


تابع الأستاذ : معتصم ريحان على الفيسبوك و اليوتيوب

حصص خاصة أون لاين ( زووم) 00972598709519

روابط فيديوهات شرح رياضيات توجيهي علمي للأستاذ : معتصم ريحان

1) نظريتا رول والقيمة المتوسطة أولاً (رول)

2) نظريتا رول والقيمة المتوسطة ثانياً (نظرية القيمة المتوسطة )

3) نظريتا رول والقيمة المتوسطة (نظرية القيمة المتوسط)حل أسئلة امتحانات سابقة

هذه أول ثلاث فيديوهات لشرح هذا التلخيص و التلخيص مرتب حسب ترتيب الفيديوهات ، للطلب راسلني واتساب

أ. معتصم ريحان 009728709519

ملاحظة هذه الفيديوهات موجودة على اليوتيوب و لكن بروابط خاصة لن تستطيع الدخول إليها إلا عن طريق الرابط الخاص أو رمز ال QR

# أهـم الروابط التي تخص الأستاذ معتصـم ريحان والتي تخص مادة الرياضيات

**أولاً : رابط الصفحة الرسمية على الفيسبوك**
https://www.facebook.com/moatsem99/
**ثانياً : رابط قناة اليوتيوب**
https://youtube.com/channel/UCgPSlTtKlXKAZAlx6oij7gw
**ثالثاً : جروب توجيهي فلسطين المميزين على الفيسبوك**
https://www.facebook.com/groups/238012177540675/?ref=share
**رابعاً : جروب توجيهي فلسطين الأوائل على الفيسبوك**
https://www.facebook.com/groups/196693448738715/?ref=share
**خامساً : جروب جيش الصف العاشر والتاسع والثامن والسابع على الفيسبوك**
https://www.facebook.com/groups/2513410778968166/?ref=share
**سادساً : جروب توجيهي فلسطين ٢٠٢٢ طريق التميز على الفيسبوك**
https://www.facebook.com/groups/212508760785340/
**سابعاً : جروب أخبار توجيهي فلسطين عللى الفيسبوك**
https://www.facebook.com/groups/384829289738741/
**ثامناً : جروب توجيهي علمي علمك عللى الفيسبوك**
https://www.facebook.com/groups/390990069179374/?ref=share
**تاسعاً : جروب رياضيات توجيهي فلسطين مع الاستاذ معتصم ريحان**
https://www.facebook.com/groups/988870048361125/?ref=share
**عاشراً : جروب فيزياء ورياضيات توجيهي فلسطين على الفيس بوك بإشراف أ.معتصم ريحان أ.معتز ريحان**
https://www.facebook.com/groups/1630835297115843/?ref=share
**الحادي عشر : قناة مميزة على التليجرام❤**
https://t.me/twgehe
**الثاني عشر : جروب توجيهي فلسطين المميزين على التليجرام**
https://t.me/moatsem999
**الثالث عشر : جروب المناقشة على التيليجرام**
https://t.me/joinchat/OVsG6v9lUUg2MmU0

**الرابع عشر : مجموعات الواتس**

**(مجموعة الواتس الاولى)**

https://chat.whatsapp.com/IGgn478qSlXJkSgGyLNgv1

**(مجموعة الواتس الثانية)**

https://chat.whatsapp.com/Fpi1Cn9O0tj5O6fNUqP9Rw

**( مجموعة الواتس الثالثة)**

https://chat.whatsapp.com/L9iPBQN6XV32DcYtVjEPDk

**(مجموعة الواتس الرابعة)**

https://chat.whatsapp.com/Isj9IZtliKm4RUctHKDKdL

**(مجموعة الواتس الخامسة**

https://chat.whatsapp.com/J01c64XwfKqHPkzvSB4B6a

**(مجموعة الواتس السادسة)**

https://chat.whatsapp.com/ExeSmRQ9R8WI7JhbmBI0KO

**(مجموعة الواتس السابعة)**

https://chat.whatsapp.com/HGJE4dkii9sIntVL4LvqYc

**(مجموعة الواتس الثامنة)**

https://chat.whatsapp.com/GmepTq0asoiJBHxYo9KLad

**(مجموعة الواتس التاسعة)**

https://chat.whatsapp.com/Gsuw09BcD0NKt5NDLgiXn2

**(مجموعة الواتس العاشرة)**

https://chat.whatsapp.com/DgOlXo9Bthz4QbwE5DEtEt

**الخامس عشر : حساب الانستغرام الرسمي الخاص بالأستاذ معتصم ريحان**

https://www.instagram.com/moatasemabdallah/

**للدروس الخاصة أون لاين على برنامج الزووم راسلني واتساب**

**أ. معتصم ريحان**

00972598709519

# الوحدة الثانية ((تطبيقات التفاضل))

صفحة رقم 26

توجيهي عام 2022

## ٢-١ الدرس الأول ((نظرية رول والقيمة المتوسطة))

(*) **نظرية رول**: اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ، ب] وقابلاً للإشتقاق في ]أ، ب[ وكان ق(أ) = ق(ب) فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈ ]أ، ب[ بحيث $\boxed{\text{ق}'(\text{جـ}) = \text{صفر}}$

أ. معتصم ريحان

**باختصار (شروط رول ③ ولها نتيجة):**

1. متصل [أ، ب]
2. قابلاً للاشتقاق على ]أ، ب[
3. ق(أ) = ق(ب)

(*) ⟸ النتيجة/ يوجد جـ ∈ ]أ، ب[ بحيث ق'(جـ) = صفر

أ. معتصم ريحان

**مثال ① ص 54**

بين أن الاقتران ق(س) = س² − س − ٦ يحقق شروط نظرية رول في الفترة [٠، ١] ثم جد قيمة أو قيم جـ التي تعينها النظرية

**الحل**

بنحث في تحقق شروط نظرية رول على [٠، ١]

① ق(س) متصل على [٠، ١] ② وقابلاً للاشتقاق في ]٠، ١[ لأنه كثير حدود.

③ الشرط الثالث ق(٠) = ق(١)

(٠)² − (٠) − ٦ = (١)² − (١) − ٦

−٦ = −٦ تحقق الشرط الثالث

اذاً يوجد جـ ∈ ]٠، ١[ بحيث $\boxed{\text{ق}'(\text{جـ}) = \text{صفر}}$

ق'(س) = ٢س − ١

ق'(جـ) = ٢جـ − ١ = صفر

٢جـ = ١

$\boxed{\text{جـ} = \frac{1}{2}}$ ∈ ]٠، ١[

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

00972598709519



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال ② ص 55

اذا علمت أن الاقتران ق(س) = جتا٢س + ٢جاس يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π] حيث أ > صفر فما قيمة/قيم الثابت أ .

أ. معتصم ريحان

الحل: بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π] فإنه متصل وقابل للاشتقاق.

وأيضاً ق(أ) = ق(π) ← لأنه يحقق رول

لاحظ
جا π = صفر
جتا٢π = ١

جتا٢أ + ٢جاأ = جتا٢π + ٢جاπ

متطابقة

١ − ٢جا²أ + ٢جاأ = ١ + صفر

− ٢جا²أ + ٢جاأ = صفر

٢جاأ (− جاأ + ١) = صفر

اما ٢جاأ = صفر أو − جاأ + ١ = صفر

⇐ جاأ = صفر

جاأ = ١

ومنها أ = صفر ، π ، ٢π كلهم مرفوضين لأنه شرط من السؤال أ > صفر

⇐ أ = $\frac{\pi}{٢}$ ∈ ]أ ، π[

π ∉ ]أ ، π[

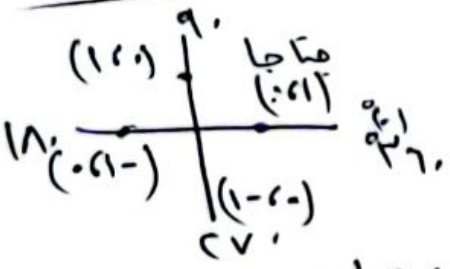
٢π ∉ ]أ ، π[

(*) قوانين جتا ضعف الزاوية

① جتا٢س = جتا²س − جا²س

② جتا٢س = ٢جتا²س − ١

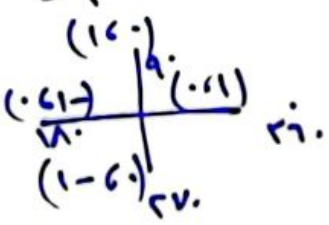
③ جتا٢س = ١ − ٢جا²س




أ. معتصم ريحان
تابعين على اليوتيوب والفيس
00972598709519

مثال ٢٥ / قيمة جـ التي تحددها نظرية رول على الاقتران ق(س) = جاس + جتاس في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

أ) صفر  ب) $\frac{\pi}{٦}$  ج) $\frac{\pi}{٤}$  د) $\frac{\pi}{٣}$




① ق(س) متصل على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] وقابل للاشتقاق على ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ق(٠) = ق($\frac{\pi}{٢}$)

جا(٠) + جتا(٠) = جا($\frac{\pi}{٢}$) + جتا($\frac{\pi}{٢}$)

$\boxed{١}$ = $\boxed{١}$

(*) ق'(جـ) = جتاجـ − جاجـ = ٠

جتاجـ = جاجـ

⇐ $\frac{\text{جتاجـ}}{\text{جتاجـ}} = \frac{\text{جاجـ}}{\text{جتاجـ}}$

١ = ظاجـ

∴ جـ = ٤٥°

∴ جـ = $\frac{\pi}{٤}$ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[ حل



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال 3 ص 55

ابحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} س - ٢ & ، -٤ \le س < -١ \\ س^٢ - ٧ & ، -١ \le س \le ١ \end{cases}$$

في الفترة [-٤، ١] ثم جد قيمة/قيم جـ التي تحددها النظرية إن وجدت.

الحل ① ق(س) متصل على [-٤، -١[ لأنه كثير حدود

ق(س) متصل على ]-١، ١] لأنه كثير حدود

لكن ق(س) غير متصل عند س = -١ لأنه $\lim_{س \to -١^+} ق(س) \neq \lim_{س \to -١^-} ق(س)$

ومنها فإن الاقتران ق(س) غير متصل على [-٤، ١]

② $ق'(س) = \begin{cases} ١ & ، -٤ < س < -١ \\ ٢س & ، -١ < س < ١ \end{cases}$

ق'(-١) غير موجودة لأنه غير متصل أصلاً عند س = -١

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

اذاً ق(س) غير قابل للاشتقاق على ]-٤، ١[

③ ق(-٤) = ق(١) = -٦

لم تتحقق شروط نظرية رول على [-٤، ١]، وهذا لا يعني بالضرورة عدم وجود قيم لـ جـ والبحث عن قيم جـ بحيث ق'(جـ) = صفر

فإنه عندما -٤ < س < -١ تكون ق'(س) ≠ صفر لا يوجد جـ في هذه الفترة

عندما -١ < س < ١ فإن ٢جـ = صفر أي أن جـ = صفر ∈ ]-١، ١[

---

س 2015 اذا كان ق(س) = س² - ٣س - أ يحقق شروط نظرية رول على الفترة [-١، أ] فإن قيمة الثابت أ تساوي

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

الحل ق(-١) = ق(أ) لأنه يحقق شروط رول

$(-١)^٢ - ٣(-١) - أ = أ^٢ - ٣أ - أ$

$٤ - أ = أ^٢ - ٤أ$

$أ^٢ - ٣أ - ٤ = ٠$

$(أ - ٤)(أ + ١) = ٠$

إما أ = ٤ أو أ = -١

✗ مرفوضة لا تناسب الفترة المعطاه

لو طلب قيمة جـ التي يحددها رول

ق'(جـ) = صفر

٢جـ - ٣ = صفر

جـ = ٣/٢

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس والبوتيوب

00972598709519

حصص خاصة أونلاين

ص 3



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

سال 4
ص 56

إذا علمت أن الاقتران $ق(س) = \frac{(س^2 - 5س + 6)(س + أ)}{(س - 3)}$

$س \in ]-1، ب]$ يحقق شروط نظرية رول في $[-1، ب]$ وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية هي جـ = صفر فجد الثابت أ، ب .

الحل: بما أن الاقتران $ق(س)$ يحقق شروط نظرية رول في الفترة $[-1، ب]$

فإن $ق(س)$ متصل في $[-1، ب]$ ومنها فإن $ب < 3$

$\Leftarrow ق(س) = \frac{\cancel{(س-3)}(س-2)(س+أ)}{\cancel{(س-3)}} = (س-2)(س+أ)$

أ. معتصم ريحان

مهمة جدا

$\Leftarrow ق(س) = س^2 + أس - 2س - 2أ$ ، $س \neq 3$

وبما أن $ق(ب) = ق(-1)$ لأن الاقتران يحقق شروط رول

إذاً $ب^2 + أب - 2ب - 2أ = (-1)^2 + أ \times (-1) - 2(-1) - 2أ$

$ب^2 - 2ب + أب - 2أ = 1 - أ + 2 - 2أ$

$ب^2 - 2ب + أب = 3 - أ$ (1)

$ق'(س) = 2س + أ - 2$ ، $س \in ]-1، ب[$

وبما أن قيمة جـ معطاه في السؤال (صفر)

$\Leftarrow ق'(جـ) = صفر$

$ق'(0) = صفر$

$ق'(0) = أ - 2 = صفر$

$أ = 2$ عوض الآن في معادلة (1)

$ب^2 - \cancel{2ب} + \cancel{2ب} = 3 - 2$

$ب^2 = 1 \Leftarrow ب = \pm 1$

$ب = -1$ مرفوضة

$\therefore ب = 1$

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان
تابعني على اليوتيوب والفيس
00972598709519

ص 4



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال (5) ص 56

اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ، جـ] بحيث قً(س) موجودة في ]أ، جـ[ وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ) حيث أ < ب < جـ أثبت وجود عدد حقيقي واحد على الأقل د ∈ ]أ، جـ[ بحيث قً(د) = صفر

الحل ① نبحث في تحقق شروط رول على الاقتران ق(س) في [أ، ب] وحيث أن قً(س) موجودة في ]أ، جـ[ فإن ق(س) متصل على [أ، ب] وقابل للاشتقاق على ]أ، ب[ ⟸ ق(أ) = ق(ب)

∴ تحققت شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ١ ∈ ]أ، ب[ بحيث قَ(جـ١) = صفر

② نبحث في شروط رول على الاقتران ق(س) في [ب، جـ] ق(س) متصل على [ب، جـ] وقابلا للاشتقاق على ]ب، جـ[ ⟸ ق(ب) = ق(جـ)

∴ تحققت شروط رول ومنها يوجد جـ٢ ∈ ]ب، جـ[ بحيث قَ(جـ٢) = صفر

لاحظ أن جـ١ < جـ٢

أ. معتصم ريحان

③ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران قَ(س) في [جـ١، جـ٢] قَ(س) متصل في [جـ١، جـ٢] وقابل للاشتقاق في ]جـ١، جـ٢[

قَ(جـ١) = قَ(جـ٢)

∴ تحققت شروط نظرية رول على قَ(س) في [جـ١، جـ٢] ويوجد على الأقل عدد مثل د ∈ ]جـ١، جـ٢[ ⊆ ]أ، جـ[ بحيث قً(د) = صفر

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس والبوتيوب
00972598709519

ص 5



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

⊛ تمارين ومسائل ص٥٩ ((درس نظرية رول)) أ. معتصم ريحان

س١/ بين أياً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية رول في الفترة المعطاة ثم جد قيمة / أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة ((إن وجدت))

أ. معتصم ريحان

أ) ق(س) = $\sqrt{٤س - س^٢}$ ، س ∈ [٠، ٤]

الحل: ① ق(س) متصل على [٠، ٤]

② ق(س) قابلاً للاشتقاق على ]٠، ٤[

③ ق(٠) = ق(٤)

$\sqrt{٤×(٠) - (٠)^٢} = \sqrt{٤×٤ - ٤^٢}$

صفر = صفر

∴ ق(س) يحقق شروط نظرية رول في [٠، ٤] ∴ جـ ∈ ]أ، ب[

⟸ $\boxed{ق'(جـ) = صفر}$

أ. معتصم ريحان

⟸ ق'(جـ) = $\frac{٤ - ٢جـ}{٢\sqrt{٤جـ - جـ^٢}}$ = صفر

⟸ ٤ - ٢جـ = صفر ⟸ جـ = ٢ ∈ ]٠، ٤[

أ. معتصم ريحان

ب) ق(س) = $س^٢ - ٢س - ٣$ ، س ∈ [-١، ٣]

الحل: ① ق(س) متصل على [-١، ٣] لأنه كثير حدود

② ق(س) قابل للاشتقاق على ]-١، ٣[

③ ق(-١) = ق(٣)

$(-١)^٢ - ٢(-١) - ٣ = (٣)^٢ - ٢(٣) - ٣$

صفر = صفر

أ. معتصم ريحان

00972598709519

تابعني على اليوتيوب والفيس

إذاً الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول على [-١، ٣]

ق'(جـ) = صفر

ق'(جـ) = ٢جـ - ٢ = صفر

جـ = -١ ∈ ]-١، ٣[ .

⟸ جـ ∈ ]-١، ٣[

أ. معتصم ريحان

ص٦



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

ب) $م(س) = \ln(س + \frac{1}{س})$ $\quad س \in [\frac{1}{2}, 2]$

الحل

1) $م(س)$ متصل على $[\frac{1}{2}, 2]$

2) $م(س)$ قابلاً للاشتقاق على $]\frac{1}{2}, 2[$

3) $م(\frac{1}{2}) = م(2)$

$\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \ln 2 + \frac{1}{2}$

$\ln \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1}{2} - 2$

$\therefore م(س)$ تحقق شروط رول على $[\frac{1}{2}, 2]$

إذاً $\exists جـ \in ]\frac{1}{2}, 2[$ بحيث $مـ(جـ) = صفر$

$مـ(جـ) = \frac{1 + \frac{-1}{جـ^2}}{جـ + \frac{1}{جـ}} = صفر$

$\Leftarrow 1 - \frac{1}{جـ^2} = صفر \Leftarrow جـ^2 = 1 \Leftarrow$ (جـ = ± 1)

الباب رفض لانتمائه للفترة

$\therefore جـ = 1 \in ]\frac{1}{2}, 2[$

أ. معتصم ريحان

---

ثانوية 17 عام

الدور الثاني

قيمة جـ التي تحددها نظرية رول على الاقتران $م(س) = |س^2 - 2س + 1|$ في الفترة $[0, 2]$ هي

أ) $\frac{1}{2}$ ب) 1

ج) $\frac{3}{2}$ د) $\frac{5}{2}$

أولاً نعيد تعريف المطلق

$س^2 - 2س + 1 = 0$

$(س - 1)(س - 1) = 0$

$س = 1$

$م(س) = \begin{cases} س^2 - 2س + 1 & ، س \leq 1 \\ -س^2 + 2س - 1 & ، س > 1 \end{cases}$

| + + + + | + + + + |
|---|---|
| نفس ① | نفس صفر |

$م(0) = م(2)$

$1 = 1$

$\therefore مـ(س) = \begin{cases} 2س - 2 & ، س < 1 \\ -2س + 2 & ، س > 1 \end{cases}$

$مـ(جـ) = صفر \quad مـ(1)^+ = مـ(1)^-$

$-2جـ + 2 = 0$

$-2جـ = -2$

$جـ = 1 \in ]0, 2[$

$م(س)$ متصل عند $س = 1$

ومقابل للاشتقاق عند $س = 1$

أ. معتصم ريحان

---

حصص خاصة أونلاين

تأسيس ما قبل الفيزياء والبيولوجي

00972598709519



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

د) ق(س) = جا٢س + ٢جاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

أ. معتصم ريحان

الحل ① ق(س) متصل على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

② ق(س) قابلاً للاشتقاق ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

③ ق(٠) = ق($\frac{\pi}{٢}$)

جا٢×(٠) + ٢جا(٠) = جا٢×$\frac{\pi}{٢}$ + ٢جا$\frac{\pi}{٢}$

صفر ≠ ٢

ق(س) لا يحقق شروط رول على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

ق'(س) = جتا٢س × ٢ + ٢جتاس

ق'(جـ) = ٢جتا٢جـ + ٢جتاجـ = صفر

ق'(جـ) = جتا٢جـ + جتاجـ = صفر

⇓

(٢جتا²جـ − ١) + جتاجـ = صفر

نكمل هنا

٢جتا²جـ + جتاجـ − ١ = صفر

(٢جتاجـ − ١)(جتاجـ + ١) = صفر

إما ٢جتاجـ = ١ أو جتاجـ = −١

جتاجـ = $\frac{١}{٢}$ ، جـ = $\pi$

∴ جـ = ٦٠° ، $\pi \notin$ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

∴ جـ = $\frac{\pi}{٣}$

$\frac{\pi}{٣} \in$ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

أ. معتصم ريحان

00972598709519

---

س ٥ ص ٥٩

اذا كانت ق(س) = س جتاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] استخدم نظرية رول لاثبات أن القيمة التي تعينها النظرية هي عندما س = ظتاس

الحل ① ق(س) متصل على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

② ق(س) قابل للإشتقاق على ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

③ ق(٠) = ق($\frac{\pi}{٢}$) .

٠ × جتاصفر = $\frac{\pi}{٢}$ × جتا$\frac{\pi}{٢}$

صفر = صفر

∴ ق(س) يحقق شروط رول على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

ق'(س) = س × −جاس + جتاس × ١

ق'(جـ) = جـ × −جاجـ + جتاجـ = صفر

$\frac{\text{جـ جاجـ}}{\text{جاجـ}} = \frac{\text{جتاجـ}}{\text{جاجـ}}$

جـ = ظتاجـ

س = ظتاس #

أ. معتصم ريحان

تابعني على اليوتيوب والفيس

حصص أونه لاينه خاصة

على الزوم

ص 8



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

السلام عليكم ورحمة الله

هذا التلخيص المميز جداً صدقة جارية عني وعن أهلي وأمواتي وجميع موتى المسلمين .

* هذا التلخيص موجود بالكامل فيديوهات مصورة وهي عبارة عن حصص خاصة مميزة على الزووم ، اذا أردت التسجيلات كاملة راسلني على الواتس 00972598 709519 أ. معتصم ريحان

* فيديوهات هذا التلخيص بنفس ترتيب التلخيص وهذا هو الشيء المميز جداً والذي لا يوجد في فلسطين مثله . بفضل الله .

* بعض هذه الفيديوهات موجودة بشكل عام للكل على قناتي على اليوتيوب بإسم (( معتصم ريحان رياضيات توجيهي )) وباقي الفيديوهات موجودة بروابط خاصة لمن يطلبها واتس .

* اعتمد بشكل كامل على هذا التلخيص وبإذن الله ستحصل على العلامة الكاملة .

* لا تنسى أن تتابعي صفحتي الرسمية على الفيس بوك وقناتي على اليوتيوب وكلاهما بإسم (( معتصم ريحان رياضيات توجيهي ))

* بشرى سارة لكل طلاب فلسطين هذا التلخيص شامل ومجاني بالكامل لكل طلاب فلسطين وبإمكانك ارساله لمن تحب لكن فيديوهات هذا التلخيص غير مجانية واذا أردت الحصول عليها راسلني واتس .

أ. معتصم بسام ريحان
00972598 709519

تابعني على مجموعات الواتس والتليجرام ضروري .



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

حصة رقم 27

توجيهي علمي 2022

أ. معتصم ريحان

# * نظرية القيمة المتوسطة

* **تعريف**: اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للإشتقاق في ]أ، ب[ فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈ ]أ، ب[ بحيث أنّ ق'(جـ) = $\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

**مثال 6 ص 57**: بين أن الاقتران ق(س) = $س^3 + 1$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [-٢، ١] ثم جد قيمة/قيم جـ.

الحل: شروط نظرية القيمة المتوسطة.

1. الاقتران ق(س) متصل في الفترة [-٢، ١]
2. الاقتران ق(س) قابلاً للإشتقاق في الفترة ]-٢، ١[ لأنه كثير حدود

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [-٢، ١] والنتيجة يوجد على الأقل جـ ∈ ]-٢، ١[ بحيث

ق'(جـ) = $\frac{ق(١) - ق(-٢)}{١ - (-٢)}$ ⟸ $\frac{٣جـ^٢}{١} = \frac{(٢) - (-٧)}{٣}$

⟸ ٩جـ² = ٩ ⟸ جـ² = ١ ⟸ جـ = ±١ ∴ جـ = -١ ∈ ]-٢، ١[

| شروط رول | شروط القيمة المتوسطة |
|---|---|
| 1) ق(س) متصل على [أ، ب] | 1) ق(س) متصل على [أ، ب] |
| 2) ق(س) قابل للاشتقاق على ]أ، ب[ | 2) ق(س) قابلاً للاشتقاق على ]أ، ب[ |
| 3) ق(أ) = ق(ب) | 3) ينتج جـ ∈ ]أ، ب[ بحيث أنه ق'(جـ) = $\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$ |
| 4) ينتج وجود جـ ∈ ]أ، ب[ بحيث أن ق'(جـ) = صفر | |

أ. معتصم ريحان
00972598709519
حصص خاصة أونلاين Zoom



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال (7) ص 58

إذا علمت أن الاقتران ق(س) = { أس + ب ، -٣ ≤ س ≤ -١ ؛ -س² ، -١ < س ≤ ٥ }

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [-٣، ٥] جد الثابتين أ، ب

الحل: بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [-٣، ٥] فإن ق(س) متصل على [-٣، ٥] ومنه ق(س) متصل عند س = -١

أي أن نهاية ق(س) = نهاية ق(س)
س ← -١⁺ ، س ← -١⁻

-(-١)² = -أ + ب ⇐ $\boxed{-أ + ب = -١}$ — (١)

وأيضاً ق(س) قابلاً للاشتقاق في ]-٣، ٥[

ق'(س) = { أ ، -٣ < س ≤ -١ ؛ -٢س ، -١ < س < ٥ }

أ، ب ∈ ح

وتكون ق'(-١)⁺ = ق'(-١)⁻

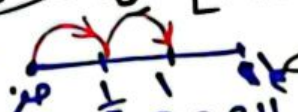
-٢ × -١ = أ ⇐ $\boxed{أ = ٢}$

-أ + ب = -١
-٢ + ب = -١
$\boxed{ب = ١}$

---

مثال (8) ص 58

ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) = [٢س + ١] في الفترة [٠، ١] ثم جد قيمة/قيم جـ التي تعينها النظرية إن وجدت




الحل: أولاً نعيد تعريف اقتران الصحيح

ق(س) = { ١ ، ٠ ≤ س < ½ ؛ ٢ ، ½ ≤ س < ١ ؛ ٣ ، س = ١ }

ق'(س) = { صفر ، صفر < س < ½ ؛ صفر ، ½ < س < ١ }

لأنه نبحث في شروط القيمة المتوسطة ق(س) غير متصل في الفترة [٠، ١] لأن النهاية عند س = ½ غير موجودة.

نكمل هنا

وأيضاً ق(س) غير قابل للاشتقاق في ]٠، ١[

∴ لم تتحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٠، ١] ، وهذا لا يعني عدم وجود قيم لـ جـ وللبحث عن قيمة أو قيم جـ إن وجدت

ق'(جـ) = (ق(١) - ق(٠)) / (١ - ٠) = (٣ - ١) / ١ = $\boxed{٢}$

٢ ∉ ]٠، ١[

إذاً لا يوجد جـ ∈ ]٠، ١[

أ. معتصم ريحان

ص 2



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 2 / بين أياً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية (القيمة المتوسطة) في الفترة المعطاة، ثم جد ممكن أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة (إن وجدت).

الحل [أ] $م(س) = س^3 - س - 1$ ، $س \in [-1, 2]$

(ب) (أ)

① $م(س)$ متصل على $[-1, 2]$ وقابل للاشتقاق على $]-1, 2[$ كثير حدود

$\therefore م(س)$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[-1, 2]$

$\therefore جـ \in ]-1, 2[$ $\quad م'(س) = 3س^2 - 1$

$م'(جـ) = \frac{م(ب) - م(أ)}{ب - أ}$ $\quad$ لاحظ $م(2) = 5$، $م(-1) = -1$

$3جـ^2 - 1 = \frac{م(2) - م(-1)}{2 - (-1)} \Leftarrow 3جـ^2 - 3 = 5 - (-1)$

$\Leftarrow 9جـ^2 = 9 \Leftarrow جـ^2 = 1 \Leftarrow جـ = \pm 1$ السالب مرفوض لأنه القيمة عندما تكون خارج الفترة

$\therefore جـ = 1 \in ]-1, 2[$

أ. معتصم ريحان

[ب] $م(س) = \frac{4}{س + 2}$ ، $س \in [-1, 2]$

الحل $م(س)$ متصل على $[-1, 2]$ لأنه كثير حدود وقابل للاشتقاق على $]-1, 2[$

$\therefore م(س)$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[-1, 2]$

إذاً يوجد $جـ \in ]-1, 2[$

(ب) (أ)

لاحظ $م(2) = 1$، $م(-1) = 4$

$م'(جـ) = \frac{م(ب) - م(أ)}{ب - أ} = \frac{-4}{(جـ + 2)^2}$

$\Leftarrow \frac{-4}{(جـ + 2)^2} = \frac{1 - 4}{2 - (-1)} \Leftarrow -12 = -3(جـ + 2)^2$

$\Leftarrow 4 = (جـ + 2)^2 \Leftarrow جـ + 2 = 2 \Leftarrow جـ = 0 \in ]-1, 2[$

$جـ + 2 = -2 \Leftarrow جـ = -4 \notin ]-1, 2[$ ✗

أ. معتصم ريحان

00972598709519

ص 3



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(جـ) ق(س) = $\sqrt{س}$ + ٢س ، س ∈ [٤ ، ٩]

الحل: ق(س) متصل على [٤ ، ٩] لانه مجموع اقترانين متصلين

ق(س) قابل للاشتقاق على ]٤ ، ٩[

∴ ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في [٤ ، ٩]

(أ) (ب)

∴ يوجد جـ ∈ ]٤ ، ٩[

$$ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ٢$$

$$ق'(جـ) = \frac{١}{٢\sqrt{جـ}} + \frac{٢}{١} = \frac{ق(٩) - ق(٤)}{٩ - ٤}$$

$$\frac{١ + ٤\sqrt{جـ}}{٢\sqrt{جـ}} = \frac{٢١ - ١٠}{٥}$$

$$\Leftarrow ٥ + ٢٠\sqrt{جـ} = ٢٢\sqrt{جـ} \Leftarrow ٥ = ٢\sqrt{جـ} \Leftarrow \frac{٥}{٢} = \sqrt{جـ}$$

ربع الطرفان

$$\Leftarrow جـ = \boxed{\frac{٢٥}{٤}} \in ]٤ ، ٩[$$

---

٩ اقتراح اكمال

اذا كان ق(س) = س² + ٤س يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في [١ ، ب] وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية تساوي $\frac{٥}{٢}$ فما قيمة ب

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٩

الحل: $ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$ لانه يحقق النظرية [١ ، ب]

(أ) (ب)

$$٢جـ + ٤ = \frac{(ب^٢ + ٤ب) - (أ^٢ + ٤أ)}{ب - ١}$$

$$٩ = \frac{ب^٢ + ٤ب - ٥}{ب - ١}$$ نضرب تبادلي

$$٩ب - ٩ = ب^٢ + ٤ب - ٥$$

$$ب^٢ - ٥ب + ٤ = صفر$$

إما (ب = ٤) أو (ب = ١) مرفوضة ✗ #.

عندما جـ = $\frac{٥}{٢}$

فإن ٢ × $\frac{٥}{٢}$ + ٤

ق'(جـ) = ٩

ق'(جـ) = ٢جـ + ٤

ص ٦



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س3 ص59

اذا كانت ق(س) = { أس² + ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ٢
س³ − ب س + ١٢ ، ٢ < س ≤ ٣

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٣] فجد قيم الثابتين أ ، ب ثم جد قيمة / قيم جـ التي تحددها النظرية.

الحل ق(س) متصل على [٠ ، ٣] لانه يحقق شرط القيمة المتوسطة اذاً ايضاً متصل عند نقطة التحول س = ٢

نها ق(س) = نها ق(س)
س ← ٢⁺ ، س ← ٢⁻

(٢)³ − ب(٢) + ١٢ = أ(٢)² + ٢(٢)

٢٠ − ٢ب = ٤أ + ٤ ⟸ ٤أ + ٢ب = ١٦

ومنها ٢أ + ب = ٨ — (١)

(٢) ق(س) قابل للاشتقاق على ]٠ ، ٣[ ∴ ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٢

قَ(س) = { ٢أس + ٢ ، ٠ < س < ٢
٣س² − ب ، ٢ < س < ٣

قَ(٢)⁺ = قَ(٢)⁻

٣(٢)² − ب = ٢أ(٢) + ٢

١٢ − ب = ٤أ + ٢ ⟸ ٤أ + ب = ١٠ — (٢)

نحل المعادلتين (١) مع (٢) بالحذف :

٢أ + ب = ٨
٤أ + ب = ١٠ — أطرح

−٢أ = −٢

أ = ١ ⟸ ب = ٦ (عوض)

تكملة الحل في الصفحة التالية

أ. معتصم ريحان
حصص أونلاين خاصة
تابعني على الفيس واليوتيوب

ص5



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

تابع حل س3 ص59

هنا سنجد قيمة / قيم جـ التي تحددها النظرية :

أ ، ب

$[\,٠ ، ٣\,]$

أ. معتصم ريحان

$$\text{ق}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ب} - \text{أ}}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{ق}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٠)}{٣ - ٠}$$

$$\text{ق}'(\text{جـ}) = \frac{٢١ - ٠}{٣} = \boxed{٧}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢\text{س} ، & ٠ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^٣ - ٦\text{س} + ١٢ ، & ٢ < \text{س} \le ٣ \end{cases}$$

لاحظ

$\text{ق}(٣) = ٣^٣ - ١٨ + ١٢ = ٢١$

$\text{ق}(٠) = (٠)^٢ + ٢(٠) = \text{صفر}$

* الآن نعوض من الفترة الأولى $\boxed{٠ \le \text{س} \le ٢}$

$\text{ق}'(\text{جـ}) = ٧$

$٢\text{جـ} + ٢ = ٧$

$٢\text{جـ} = ٥ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = \frac{٥}{٢}} \notin ]٠ ، ٢[$

مرفوضة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٢ ، & ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س}^٢ - ٦ ، & ٢ < \text{س} < ٣ \end{cases}$$

أ. معتصم ريحان

تابعني على اليوتيوب والفيس

* الآن نعوض من الفترة الثانية $\boxed{٢ < \text{س} \le ٣}$

$\text{ق}'(\text{جـ}) = ٧$

$٣\text{جـ}^٢ - ٦ = ٧$

$٣\text{جـ}^٢ = ١٣$

$\text{جـ} = \pm\sqrt{\frac{١٣}{٣}}$

$\boxed{\text{جـ} = \sqrt{\frac{١٣}{٣}} \in ]٢ ، ٣[}$

$\text{جـ} = -\sqrt{\frac{١٣}{٣}} \notin ]٢ ، ٣[$ مرفوضة

أ. معتصم ريحان

00972598709519

حصص أونلاين خاصة مميزة

ص6



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س٦ ص٥٩

اذا كان ق(س) = $\frac{1}{س}$ ، س ∈ [أ ، ب] س > صفر

فأثبت باستخدام نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد حقيقي واحد على الأقل

جـ ∈ ]أ ، ب[ بحيث جـ² = أ . ب

أ. معتصم ريحان
00972598709519

الحل: ق(س) متصل على [أ ، ب] المعرف عليها.

ق(س) قابل للاشتقاق على ]أ ، ب[ المعرف عليها.

∴ ق'(س) = $\frac{-1}{س^2}$

∴ ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [أ ، ب]

جـ ∈ ]أ ، ب[

أ. معتصم ريحان

ق'(جـ) = $\frac{-1}{جـ^2}$ = $\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

$\frac{-1}{جـ^2} = \frac{\frac{1}{ب} - \frac{1}{أ}}{ب - أ}$ ⟸ $\frac{-1}{جـ^2} = \frac{\frac{أ - ب}{ب أ}}{ب - أ}$

أ. معتصم ريحان

⟸ (−ب + أ) = جـ² × $\frac{أ - ب}{ب أ}$

+1 = $\frac{جـ^2}{ب أ}$ ⟸ $\boxed{جـ^2 = ب أ}$ وهو المطلوب

س٦ ص٥٩ دوسيتاني

ما مجموعة قيم جـ التي تحددها النظرية القيمة المتوسطة على الاقتران

ق(س) = س² + س − ٦ في الفترة [−١ ، ٢]

أ ، ب

الحل: ق'(جـ) = ٢جـ + ١ = $\frac{ق(٢) - ق(-١)}{٢ - -١}$

⟸ ٦جـ + ٣ = (صفر) − (−٦)

⟸ ٦جـ = ٣

⟸ $\boxed{جـ = \frac{1}{2}}$ ∈ ]−١ ، ٢[

أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{-3}{2}$

جـ) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{-1}{2}$

أ. معتصم ريحان
تابعني على اليوتيوب والفيس
00972598709519

ص 7



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س٥ / ص٥٩

اذا كان ع(س) = (ق ∘ هـ)(س) ، س ∈ ]أ ، ب[

ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين في [أ ، ب] وقابلين للاشتقاق في ]أ ، ب[ وكان هـ(أ) = ب ، هـ(ب) = أ

أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ ∈ ]أ ، ب[ بحيث

ع(أ) − ع(ب) = قَ(جـ)(ب − أ)

أ. معتصم ريحان
00972598709519

الحل ① ق(س) متصل على [أ ، ب]

② ق(س) قابل للاشتقاق على ]أ ، ب[

ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [أ ، ب] ∴ جـ ∈ ]أ ، ب[

$$\text{قَ(جـ)} = \frac{\text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$$

أ. معتصم ريحان

$$\text{قَ(جـ)} = \frac{\text{ق(هـ(أ))} - \text{ق(هـ(ب))}}{\text{ب} - \text{أ}}$$

$$\text{قَ(جـ)} = \frac{\text{ع(أ)} - \text{ع(ب)}}{\text{ب} - \text{أ}}$$ أخرب تبادلي

ع(أ) − ع(ب) = قَ(جـ)(ب − أ) #

* لاحظ مُعطى :-

ع(س) = (ق ∘ هـ)(س)

ع(س) = ق(هـ(س))

ع(أ) = ق(هـ(أ))

(ق ∘ هـ)(أ) = ق(هـ(أ))

(ق ∘ هـ)(ب) = ق(هـ(ب))

أ. معتصم ريحان

س٦ / ص٦٠

اذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\frac{(\text{س}^2 - 5\text{س} + 6)(\text{س} + \text{ك})}{(\text{س} - 3)}$ ، س ≠ ٣ يحقق شروط نظرية رول في الفترة المغلقة [أ ، ب] وكانت القيمة التي تحددها النظرية هي $\boxed{\text{جـ} = \text{صفر}}$ فما قيمة الثابت ك

الحل ق(س) = $\frac{\cancel{(\text{س} - 3)}(\text{س} - 2)(\text{س} + \text{ك})}{\cancel{(\text{س} - 3)}}$ ⇐ ق(س) = (س − ٢)(س + ك)

$\boxed{\text{أ}}$ ١ $\boxed{\text{ب}}$ −١

$\boxed{\text{جـ}}$ ٢ $\boxed{\text{د}}$ −٢

يحقق رول ∴ $\boxed{\text{جـ}}$ ٢

قَ(جـ) = ٠ ⇐ قَ(٠) = ٠

قَ(س) = (س − ٢) × ١ + (س + ك) × ١

صفر = −٢ + ك

$\boxed{\text{٢ = ك}}$

أ. معتصم ريحان (رياضيات توجيهي)
تابعني على الفيس واليوتيوب
00972598709519
حصص خاصة أونلاين zoom

ص 8



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

٢٠١٩ تجريبي خانيوس

اذا كان ق(س) = { أ − س² ، −٢ ≤ س ≤ ١ ؛ ٦ − ب س ، ١ < س ≤ ٢ }

يحقق نظرية القيمة المتوسطة في [−٢، ٢] فما قيمة الثابتين أ، ب على الترتيب

أ) ٥، ٢ ب) ٢، ٥ ج) −٥، ٢ د) −٢، ٥

الحل: بما أن ق(س) يحقق شروط القيمة المتوسطة ∴ متصل على [−٢، ٢]

∴ نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
س ← ١⁺ ، س ← ١⁻

٦ − ب = أ − ١

أ + ب = ٧ (أ)

أ + ٢ = ٧ ⇐ أ = ٥ #

ق′(س) = { −٢س ، −٢ < س < ١ ؛ −ب ، ١ < س < ٢ }

ق′(١⁺) = ق′(١⁻)

−ب = −٢ × ١

∴ ب = ٢ #

أ. معتصم ريحان

---

٢٠١٩ تجريبي القدس

واحد فقط من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية رول على [−٢، ٢]

أ) ق(س) = |س| ب) ق(س) = [س]

ج) ق(س) = ٢س² − ١ د) ق(س) = س / (٣س − ١)

الحل: |س| اقتران القيمة المطلقة غير قابل للاشتقاق عند س = ٠ ∈ [−٢، ٢]

[س] اقتران الصحيح غير متصل وغير قابل للاشتقاق عند نقاط تحوله في الفترة [−٢، ٢]

س / (٣س − ١) الاقتران غير معرف عند صفر المقام وهو س = ١/٣ ∈ [−٢، ٢]

ق(س) = ٢س² − ١ متصل وقابل للاشتقاق لأنه كثير حدود

ق(٢) = ق(−٢)

٢(٢)² − ١ = ٢(−٢)² − ١

٧ = ٧

يحقق رول

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

بل



حة ضوئيا بـ CamScanner

أ. معتصم ريحان
حصة رقم 28
توجيهي علمي 2022

# أسئلة امتحانات سابقة على درس نظريتا رول والقيمة المتوسطة

**2019 تجريبي نابلس**

اذا كان ق(س) = $\sqrt{س^2+9}$ يحقق شروط نظرية رول على الفترة المعطاه [أ، ب] ، ق(أ) = ٥ فإنّ قيمة أ ، ب على الترتيب هي

أ) -٥ ، ٥ ب) -٤ ، ٤ ج) -٣ ، ٣ د) صفر ، صفر

الحل: يحقق رول ∴ ق(أ) = ق(ب)

⟸ $\overset{\text{معطى}}{٥} = \sqrt{ب^2+9}$ ربع الطرفين

⟸ ٢٥ = $ب^2+9$ ⟸ $ب^2 = ١٦$ ⟸ ب = ±٤

أ. معتصم ريحان
تابعني على العيسى واليوتيوب

**2019 تجريبي القدس**

قيمة جـ الناتجة من تطبيق نظرية رول على الاقتران ق(س) = س $\sqrt{س+٦}$ في [-٦ ، ٠] تساوي

أ) -٥ ب) -٤ ج) ٣ د) -٢

قاعدة الضرب

الحل: قَ(جـ) = ٠ ⟸ قَ(س) = س × $\frac{١}{٢\sqrt{س+٦}}$ + $\sqrt{س+٦}$ × ١

قَ(جـ) = $\frac{جـ}{٢\sqrt{جـ+٦}}$ + $\sqrt{جـ+٦}$ = ٠

⟸ $\frac{جـ}{٢\sqrt{جـ+٦}}$ = $\frac{-\sqrt{جـ+٦}}{١}$

⟸ $\frac{جـ}{٢}$ = -(جـ+٦) ⟸ -٢جـ - ١٢ = جـ

⟸ -١٢ = ٣جـ ⟸ جـ = -٤

أ. معتصم ريحان
00972598709519

**2018 اكمال**

اذا كان ق(س) = جا٢س + ٢جاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] فما قيمة جـ التي تحددها النظرية رول عند تطبيقها.

أ) $\frac{\pi}{٤}$ ب) $\frac{\pi}{٣}$ ج) $\frac{\pi}{٢}$ د) $\pi$

حاول أن تحل بنفسك

أ. معتصم ريحان
ص١


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س ٢٠١١ / اكمال

ق ، ك اقترانان كل منهما يحقق شروط نظرية رول على الفترة [أ ، ب]

ابحث هل يحقق حاصل الضرب (ق × ك) شروط هذة النظرية على الفترة [أ ، ب]

الحل

∵ ق(س) ، ك(س) يحققان شروط رول على الفترة [أ ، ب]

∴ ق(س) ، ك(س) متصلاً على الفترة [أ ، ب] وقابلان للاشتقاق على ]أ ، ب[ .

∴ ق(أ) = ق(ب) ، ك(أ) = ك(ب)

∵ هـ(س) = ق(س) × ك(س) متصل على الفترة [أ ، ب] لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين وقابلان للاشتقاق على ]أ ، ب[

∵ هـ(أ) = ق(أ) × ك(أ) هـ(ب) = ق(ب) × ك(ب)

∴ هـ(أ) = هـ(ب)

∴ الاقتران هـ(س) يحقق شروط رول على [أ ، ب]

∴ يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈ ]أ ، ب[ بحيث هـَ(جـ) = صفر

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

---

س ٢٠١٤ / اذا كان ق(س) = { [$\frac{1}{3}$س] + جـ ، ١ ≤ س ≤ ٣ ؛ س² − أس ، ٣ ≤ س ≤ ب }

يحقق شروط نظرية رول أوجد الثوابت أ ، ب ، جـ

أ. معتصم ريحان

أولاً نعيد تعريف الصحيح

طول الدرجة = ٣

سنأخذ الفترة الجزئية المطلوبة

صفر ١ ٣

[$\frac{1}{3}$س] = { صفر ، ١ ≤ س < ٣ }

∴ ق(س) = { جـ ، ١ ≤ س < ٣ ؛ س² − أس ، ٣ ≤ س ≤ ب }

⇐ قَ(س) = { صفر ، ١ < س < ٣ ؛ ٢س − أ ، ٣ < س < ب }

∵ ق(س) يحقق رول على [١ ، ب]

∴ ق(١) = ق(ب)

جـ = ب² − أب

−٩ = ب² − ٦ب

ب² − ٦ب + ٩ = ٠

⇐ إما ب = ٣ أو ب = ٣

أ. معتصم ريحان

بما أن ق(س) يحقق رول اذاً

نهـا ق(س) = نهـا ق(س)

س ← ٣⁺ ، س ← ٣⁻

٣² − أ × ٣ = جـ

−جـ − ٣أ = −٩

جـ + ٣أ = ٩ ← (١)

وبما أنه يحقق رول

∴ قَ(٣⁺) = قَ(٣⁻)

٢ × ٣ − أ = صفر

−أ = −٦

أ = ٦

ومنها جـ = −٩

الآن عوض في (١)

ص²



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

١٤ ص
اكمال

جد الثوابت أ، ب، جـ التي تجعل الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [٠، ٢].

أ. معتصم ريحان

$$ق(س) = \begin{cases} |س^2 - س - 6| & ، 0 \le س < 1 \\ أس + ب & ، 1 \le س < 2 \\ جـ & ، س = 2 \end{cases}$$

الحل: أولاً نعيد تعريف المطلق

$س^2 - س - 6 = 0$

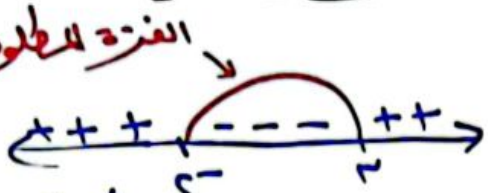
$س = 3$ ، $س = -2$

الفترة المطلوبة

$+ + +$ | $- - -$ | $+ +$

$-2$ ، $3$

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس والويوتيوب



$$\therefore ق(س) = \begin{cases} -س^2 + س + 6 & ، 0 \le س < 1 \\ أس + ب & ، 1 \le س < 2 \\ جـ & ، س = 2 \end{cases}$$

بما أن ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [٠، ٢] إذاً متصل عند س = ١

$\Leftarrow$ $أ \times 1 + ب = -(1)^2 + (1) + 6$

$\boxed{أ + ب = 6}$ ← (١)

$$ق'(س) = \begin{cases} -2س + 1 & ، 0 < س < 1 \\ أ & ، 1 < س < 2 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $ق'(1^+) = ق'(1^-)$

$أ = -2(1) + 1$

$\boxed{أ = -1}$ ← الأنه نعوض في معادلة (١)

ومنها $\boxed{ب = 7}$

$\Leftarrow$ $ق'(جـ) = \dfrac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

عند الفترة $\boxed{أ \text{ و } 1 < س < 2}$

$أ = \dfrac{ق(2) - ق(1)}{2 - 1}$

أ. معتصم ريحان

$أ = 5 - 6$

$أ = -1$

$\Downarrow$

$-1 = -1$ ∴ قيمة جـ هي كل الفترة ]١، ٢[

$\boxed{\text{وعند الفترة } -2جـ + 1 \text{ ، } 0 < جـ < 1}$

$-2جـ + 1 = \dfrac{6 - 6}{1 - 0}$

$-2جـ + 1 = صفر$

$جـ = \frac{1}{2} \in ]0، 1[$

∴ قيم جـ التي تحددها النظرية هي ]١، ٢[

∵ ق(س) يحقق شروط النظرية إذاً لازم يكون متصل عند س = ٢

∴ نهاية ق(س) = ق(٢)

$س \to 2$

$\Downarrow$

$2أ + ب = جـ$

$2 \times -1 + 7 = جـ$

$-2 + 7 = جـ$

$\boxed{5 = جـ}$ #

لو طلب السؤال قيمة جـ التي تحددها النظرية

أ. معتصم ريحان



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 18 / اذا كان ق(س) = { $-س^٢ + ٣س + أ$ ، $٠ \leq س \leq ١$ ؛ $ب س + ٤$ ، $١ < س \leq ٢$ }

معتصم ريحان

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [٠ ، ٢] جد قيمة الثابتين أ ، ب ثم جد قيمة جـ التي تعينها النظرية.

الحل / الاقتران ق(س) متصل عند س = ١ لأنه يحقق شروط النظرية القيمة المتوسطة

∴ نها ق(س) = نها ق(س)
س ← ١⁺ ، س ← ١⁻

$ب \times (١) + ٤ = -(١)^٢ + ٣(١) + أ$

$ب + ٤ = ٢ + أ$ ⟸ $\boxed{ب - أ = -٢}$ معادلة ①

ق'(س) = { $-٢س + ٣$ ، $٠ < س < ١$ ؛ $ب$ ، $١ < س < ٢$ }

ق'(١)⁺ = ق'(١)⁻ لأنه ق(س) يحقق شروط النظرية القيمة المتوسطة

$ب = -٢(١) + ٣$

$\boxed{ب = ١}$ ⟸ عوض في معادلة ① ينتج أن $\boxed{أ = ٣}$

∴ ق'(س) = { $-٢س + ٣$ ، $٠ < س < ١$ ؛ $١$ ، $١ < س < ٢$ }

$ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ} = \frac{ق(٢) - ق(٠)}{٢ - ٠} = \frac{٦ - ٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$

عندما صفر < جـ < ١
ق'(جـ) = $-٢جـ + ٣$
$\frac{٣}{٢} = -٢جـ + ٣$
$\frac{٣}{٢} - ٣ = -٢جـ$
$\frac{-٣}{٢} = -٢جـ$ ⟸ $\boxed{جـ = \frac{٣}{٤}}$ ⟸ مقبولة ∴ $جـ = \frac{٣}{٤}$

عندما ١ < جـ < ٢
ق'(جـ) = ١
$\frac{٣}{٢} \neq ١$ لا يوجد جـ

أ. معتصم ريحان

ص ٦



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

2019 دور ثاني / اذا كانت $م(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، -3 \leq س < 1 \\ 2س & ، 1 \leq س \leq 5 \end{cases}$

1) بين أن $م(س)$ يحقق شروط نظرية رول على $[-3، 5]$

2) أوجد معادلة/قيم جـ التي تعينها النظرية.

الحل $\lim_{س \to 1^+} م(س) = \lim_{س \to 1^-} م(س)$ ← بنحصل الاتصال عند نقطة التحول

$2 \times 1 = (1)^2 + أ$

$2 = أ + 1$ ∴ $م(س)$ متصل عند $س = 1$

$م'(س) = \begin{cases} 2س & ، -3 \leq س < 1 \\ 2 & ، 1 \leq س < 5 \end{cases}$ $م'(1^+) = م'(1^-)$

$2 = 2 \times 1$

∴ $م(س)$ قابل للاشتقاق عند $س = 1$

∴ $م(س)$ متصل على $[-3، 5]$ وقابل للاشتقاق على $]-3، 5[$

$م(-3) = م(5)$

$(-3)^2 + 1 = 2 \times (5)$

$10 = 10$

∴ $م(س)$ يحقق شروط رول على $[-3، 5]$

∴ يوجد على الأقل عدد حقيقي واحد جـ $\in ]-3، 5[$ بحيث $م'(جـ) = 0$

عندما $-3 \leq جـ < 1$

$م'(جـ) = ص$

$2جـ = ص$

$جـ = \frac{ص}{2}$ $ص \in ]-3، 1[$ مقبولة

∴ $جـ = \frac{ص}{2}$

وعندما $1 \leq جـ < 5$

$م'(جـ) = 2$

$\frac{ص}{2} \neq 2$ لا يوجد جـ هنا

أ. معتصم رحال
00972598709519
تابعنا على الفيس واليوتيوب

(ص ع)



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

س ٥ / ٥ ع ٥

اذا كان ق(س) معرف على الفترة [٠، ٢] حيث

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٣-س}{٢} & ، س < ١ \\ \frac{١}{س} & ، س \geq ١ \end{cases}$$

ابحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) على الفترة [٠، ٢] ثم أوجد قيمة/قيم جـ التي تحددها النظرية إن وجدت.

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س)$$

$$\frac{١}{١} = \frac{٣-١}{٢}$$

$$\boxed{١ = ١}$$

∴ ق(س) متصل عند س = ١

$$ق'(س) = \begin{cases} -\frac{١}{٢} & ، س < ١ \\ \frac{-١}{س^٢} & ، س > ١ \end{cases}$$

$$ق'(١)^+ = ق'(١)^-$$

$$\frac{-١}{(١)^٢} = -\frac{١}{٢}$$

$$-١ \neq -\frac{١}{٢}$$

∴ لم تتحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [٠، ٢] لأنه ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١

وهذا لا يعني عدم وجود جـ

تابعني على الفيس والبوتيوب

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

نبحث في ايجاد قيمة جـ

$$ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$$

$$ق'(جـ) = \frac{ق(٢) - ق(٠)}{٢ - ٠}$$

$$ق'(جـ) = \frac{\frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢}}{٢} = \boxed{\frac{-١}{٢}}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} -\frac{١}{٢} & ، ٠ < س < ١ \\ \frac{-١}{س^٢} & ، ١ < س < ٢ \end{cases}$$

أ. معتصم ريحان

عندما ١ < جـ < ٢

$$ق'(جـ) = -\frac{١}{٢}$$

$$\frac{-١}{جـ^٢} = -\frac{١}{٢}$$

$$جـ^٢ = ٢$$

$جـ = \pm\sqrt{٢}$ السالب مرفوضة

∴ $جـ = \sqrt{٢} \in ]١، ٢[$

عندما صفر < جـ < ١

فإنه $ق'(جـ) = -\frac{١}{٢} \Leftarrow -\frac{١}{٢} = -\frac{١}{٢}$

∴ قيمة جـ هي كل الفترة ]٠، ١[

∴ قيم جـ هي $\sqrt{٢} \cup ]٠، ١[$

$جـ \in ]٠، ١[ \cup \sqrt{٢}$



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

٢٥ ق س دور ثاني

اذا كان ق(س) = { أ س² + ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ س³ − ب س + ١٢ ، ٢ < س ≤ ٣ }

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [٠، ٣] أوجد قيمة الثابتين أ، ب.

الحل: بما أن ق(س) يحقق القيمة المتوسطة اذاً متصل على [٠، ٣] وعند س = ٢

⇐ نها ق(س) = نها ق(س)
س ← ٢⁺ ، س ← ٢⁻

(٢)³ − ب(٢) + ١٢ = أ(٢)² + ٢(٢) ⇐ ٨ − ٢ب + ١٢ = ٤أ + ٤

⇐ ٤أ + ٢ب = ١٦ ⇐ ٢أ + ب = ٨ — (١)

ق(س) قابل للاشتقاق على ]٠، ٣[ لأنه يحقق النظرية.

∴ قَ(٢)⁺ = قَ(٢)⁻

قَ(س) = { ٢أس + ٢ ، ٠ < س < ٢ ؛ ٣س² − ب ، ٢ < س < ٣ }

٣(٢)² − ب = ٢أ(٢) + ٢

١٢ − ب = ٤أ + ٢

٤أ + ب = ١٠ — (٢)

نحل معادلة (١) مع (٢) بالحذف

اطرح: ٢أ + ب = ٨ — (١)
٤أ + ب = ١٠ — (٢)

−٢أ = −٢

أ = ١ ومنها ب = ٦

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

---

حاول تحل بنفسك: اذا كان ق(س) = √(س² + ٩) يحقق شروط رول على الفترة [أ، ب]

ق(أ) = ٥ فإن قيم أ، ب على الترتيب

أ) −٥، ٥ ب) −٤، ٤ ج) −٣، ٣ د) صفر، صفر

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين Zoom

هذا التلخيص مشروح مع نفس ترتيب الفيديوهات الخاصة

ص 7



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 2020 / اذا كان ق(س) كثير حدود وكان المستقيم ص = ٤س − ٣
يمس منحنى ق(س) عند (١، ق(١)) والمستقيم ٣ص − ١٢س = ١٨
يمس منحنى ق(س) عند (٣، ق(٣)) باستخدام نظرية رول اثبت أنه
يوجد جـ ∈ ]١، ٣[ بحيث ق″(جـ) = صفر

الحل / السؤال طلب الاثبات باستخدام رول اذا لازم تتحقق شروط رول

ق(س) كثير حدود متصل على [١، ٣] وقابل للاشتقاق على ]١، ٣[

ق′(س) كثير حدود متصل على [١، ٣] وقابل للاشتقاق على ]١، ٣[

متصل ← قابل للاشتقاق ← ق(أ) = ق(ب)

الشرط الثالث وهو ق′(أ) = ق′(ب)

⇐ ق′(١) = ق′(٣)

هذا ميل المماس عند س = ١ = هذا ميل المماس عند س = ٣

الحالة حالة تماس المستقيم الأول ص − ٤س = −٣ يمس عند (١، ق(١))

الحالة حالة تماس المستقيم الثاني ٣ص − ١٢س = ١٨ يمس عند (٣، ق(٣))

$\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

$\frac{--٤}{١} = \frac{--١٢}{٣}$

٤ = ٤ تحقق شرط رول الثالث

⇐ ∴ يوجد جـ ∈ ]١، ٣[ بحيث ق″(جـ) = صفر

أ. معتصم ريحان 00972598709519 #

---

س / حاول أن تحل مجموعة جميع قيم جـ التي يمكن الحصول عليها من تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) = ٦س − ١١ في الفترة [٢، ٧] هي

أ) ]٢، ٧[ ب) {٦} جـ) { } د) [٢، ٧]

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب
هذه حصص خاصة أونلاين ومسجلة أيضاً
00972598709519

ص 8



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي

اذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين كثيري حدود موجبتين متقاطعين عند النقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) أثبت أنه يوجد على الأقل جـ ∈ ]س١ ، س٢[ بحيث أنّ

$$\frac{ق(جـ)}{هـ(جـ)} = \frac{ق'(س)}{هـ'(س)} \quad ، \quad هـ'(س) \neq صفر$$

أ. معتصم ريحان
00972598709519

الحل: نفرض أنّ $ك(س) = \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، س ∈ [س١ ، س٢] هـ(س) ≠ ٠ لأنها موجبة

① ك(س) متصل لأنه حاصل قسمة اقترانين متصلين.

② ك(س) قابل للاشتقاق

أ. معتصم ريحان

③ شرط رول الثالث

$$ك(س_1) = \frac{ق(س_1)}{هـ(س_1)} = \frac{ص_1}{ص_1} = 1$$

$$ك(س_2) = \frac{ق(س_2)}{هـ(س_2)} = \frac{ص_2}{ص_2} = 1$$

∴ ك(س) يحقق شرط رول

∴ يوجد جـ ∈ ]س١ ، س٢[ بحيث أنه ك'(جـ) = صفر

$$ك'(جـ) = \frac{هـ(جـ) \times ق'(جـ) - ق(جـ) \times هـ'(جـ)}{(هـ(جـ))^2} = صفر$$

$$\Leftarrow هـ(جـ) \times ق'(جـ) - ق(جـ) \times هـ'(جـ) = صفر$$

$$\frac{\cancel{هـ(جـ)} \times ق'(جـ)}{\cancel{هـ(جـ)} \times هـ'(جـ)} = \frac{ق(جـ) \times \cancel{هـ'(جـ)}}{هـ(جـ) \times \cancel{هـ'(جـ)}}$$

سؤال تميز

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس والبوتيوب

$$\boxed{\frac{ق'(جـ)}{هـ'(جـ)} = \frac{ق(جـ)}{هـ(جـ)}}$$

#. #.

أ. معتصم ريحان



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارج ميز / اذا كان $م(س)$ كثير حدود معرف على $[0,2]$ بحيث
$م(1) > م(0) > م(2)$ اثبت انه يوجد $ج_1, ج_2 \in ]0,2[$
بحيث $هـ(ج_1) \times هـ(ج_2) < صفر$ أ. معتصم ريحان

الحل $م(س)$ كثير حدود متصل على $[0,2]$ وقابل للاشتقاق $]0,2[$

$\therefore م(س)$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

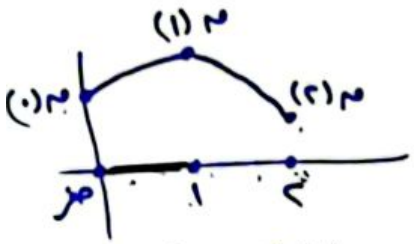
$\therefore$ يوجد $ج \in ]0,2[$ بحيث $هـ(ج) = \frac{م(2)-م(0)}{2-0}$

نبحث شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0,1]$

$م(س)$ متصل على $[0,1]$ وقابل للاشتقاق على $]0,1[$

$\therefore$ يوجد $ج_1 \in ]0,1[$ بحيث $هـ(ج) = \frac{م(1)-م(0)}{1-0}$

$\therefore هـ(ج_1) = م(1) - م(0)$ ①




$م(1) > م(0) > م(2)$
مُعطى من السؤال

موجبة

نبحث شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[1,2]$

$م(س)$ متصل على $[1,2]$ وقابل للاشتقاق على $]1,2[$

$\therefore$ يوجد $ج_2 \in ]1,2[$ بحيث $هـ(ج) = \frac{م(2)-م(1)}{2-1}$

$\therefore هـ(ج_2) = م(2) - م(1)$ ②

سالبة

أ. معتصم ريحان

المطلوب اثبات انه $هـ(ج_1) \times هـ(ج_2) < صفر$

ولاحظ انه $م(1) - م(0) > صفر$ لانه مُعطى في السؤال $م(1) > م(0) > م(2)$

ولاحظ أيضاً انه $م(2) - م(1) < صفر$ من المُعطى $م(1) > م(0) > م(2)$

$\therefore هـ(ج_1) \times هـ(ج_2) < صفر$ #

موجب $\times$ سالب $<$ صفر

سالب $<$ صفر . #

أ. معتصم ريحان

تابعنا على الفيس والبوتيوب

مقطع خامة أونة لا يبيع ميزة



صحة صوتيا بـ CamScanner

حصة رقم 29+30
توجيهي علمي 2022
أ. معتصم ريحان

الوحدة الثانية
الدرس الثاني

# الاقترانات المتزايدة والمتناقصة

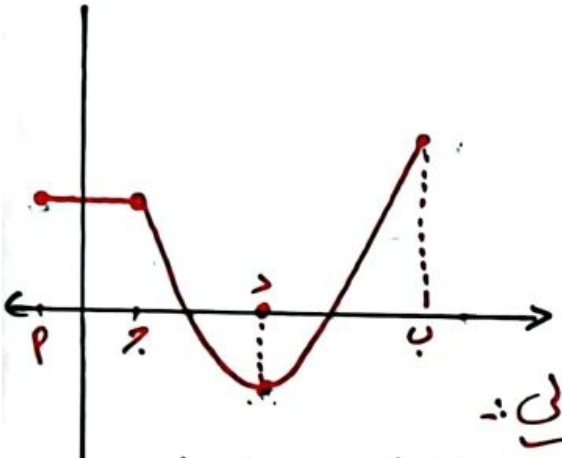
## تعريف

يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف في [أ، ب]، $س_1$، $س_2$ ∈ [أ، ب]

1. متزايداً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما $س_1 < س_2$ فإن ق($س_1$) < ق($س_2$)
2. متناقصاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما $س_1 < س_2$ فإن ق($س_1$) > ق($س_2$)
3. ثابتاً في [أ، ب] إذا تحقق الشرط عندما $س_1 < س_2$ فإن ق($س_1$) = ق($س_2$)

**مثال ① ص٦٠**

في الشكل المجاور، حدد الفترات التي يكون منحنى الاقتران ق(س) متزايداً أو متناقصاً أو ثابتاً




1. الاقتران ق(س) ثابتاً في الفترة [أ، جـ]
2. الاقتران ق(س) متناقصاً في الفترة [جـ، د]
3. الاقتران ق(س) متزايداً في الفترة [د، ب]

## التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى:

**نظرية:** اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق على ]أ، ب[.

1. الاقتران ق(س) يكون متزايداً في [أ، ب] اذا كانت ق'(س) > صفر ∀س ∈ ]أ، ب[
2. الاقتران ق(س) يكون متناقصاً في [أ، ب] اذا كانت ق'(س) < صفر ∀س ∈ ]أ، ب[
3. الاقتران ق(س) يكون ثابتاً في [أ، ب] اذا كانت ق'(س) = صفر ∀س ∈ ]أ، ب[.

**مثال ② ص٦١**

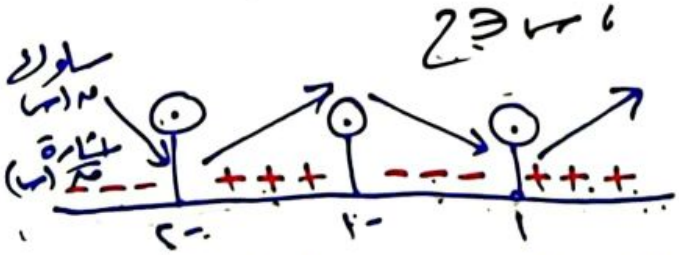
جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) علماً بأن ق'(س) = (س² − ١)(س + ٢) ، س ∈ ح

**الحل**

ق'(س) = (س² − ١)(س + ٢) = صفر

(س − ١)(س + ١)(س + ٢) = صفر

س = ١ ، س = −١ ، س = −٢




منحنى ق(س) متناقصاً في الفترة ]−∞، −٢] ، [−١، ١]

منحنى ق(س) متزايداً في الفترة [−٢، −١] ، [١، ∞[

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس والبوتيوب
ص١



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

أ. معتصم ريحان

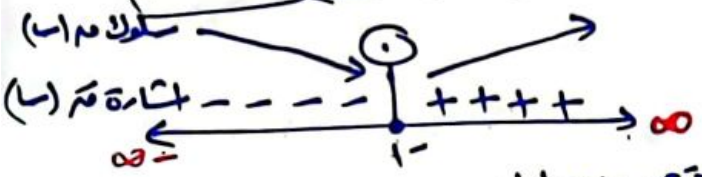
**مثال 3 ص 62**

عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س$^{٤}$ + ٤س + ٥ ، س ∈ ح

**الحل**

ق(س) متصل على ح لأنه كثير حدود.

قَ(س) = ٤س$^{٣}$ + ٤ = صفر ⟸ س$^{٣}$ = -١ ⟸ $\boxed{\text{س = -١}}$




يكون منحنى ق(س) متزايداً في [-١ ، ∞[ (صفر، كبير)

ومتناقصاً في الفترة ]-∞ ، -١] (صفر، كبير)

دائماً الفترة حنونة

أ. معتصم ريحان

**مثال 4 ص 62**

عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ ، س ≠ -١

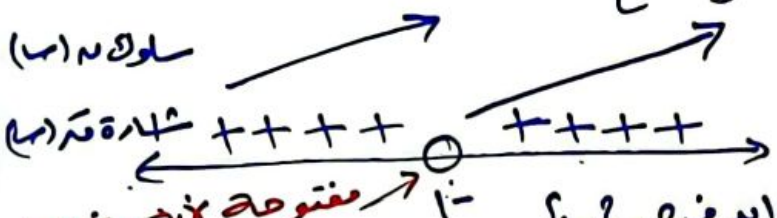
أ. معتصم ريحان

**الحل**

الاقتران ق(س) متصل على ح - {-١}.

قَ(س) = $\frac{(\text{س}+١)\times ١ - (\text{س}-١)\times ١}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{\text{س}+١-\text{س}+١}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{٢}{(\text{س}+١)^{٢}}$

∴ قَ(س) ≠ صفر ∀ س ∈ ح - {-١} لأن البسط ٢ ≠ صفر أبداً.




الاقتران ق(س) متزايد في الفترتين ]-∞ ، -١[ (صفر، كبير) ، ]-١ ، ∞[ (صفر، كبير)

ولا يمكن أن نقول أن الاقتران ق(س) متزايد في ح - {-١}

لأنه نحن نختبر التزايد والتناقص على فترات وليس على نقطة. أ. معتصم ريحان

مفتوحة لأنه غير معرف عند س = -١ ∉ للمجال

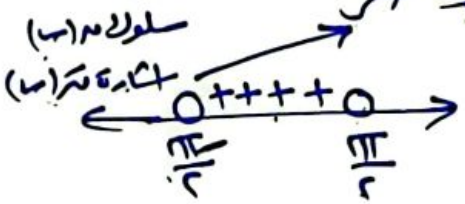
**مثال 5 ص 62**

أثبت أنّ منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ظاس متزايد في الفترة ]-$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

**الحل**

ق(س) متصل وقابل للاشتقاق في الفترة ]-$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

قَ(س) = (٢ + قا$^{٢}$س) ≠ صفر




منحنى ق(س) متزايداً في الفترة ]-$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

لاحظ

قا$^{٢}$س = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}(\text{س})}$ = $\frac{١}{١}$ = ١

قا$^{٢}$(٠) = ١

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

00972598709519

ص 2



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال (6) ص 63 عين فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران .

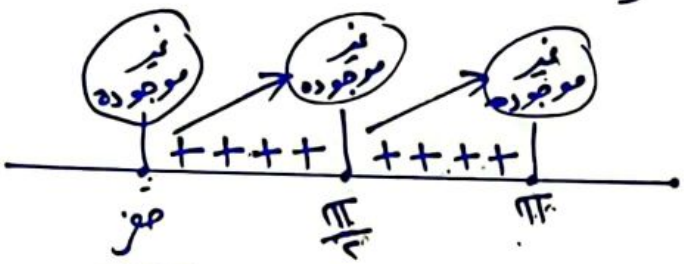
م(س) = { جاس ، 0 ≤ س ≤ π/2 ; جتاس + س ، π/2 < س ≤ π } في الفترة [0 ، π]

الحل

م'(س) = { جتاس ، 0 < س < π/2 ; 1 - جاس ، π/2 < س < π }

م'(π/2) غير موجودة لأن الاقتران غير متصل عند س = π/2

م'(س) ≠ صفر ∀ س ∈ ]0 ، π[




يكون منحنى م(س) متزايداً في الفترتين

[0 ، π/2] ، [π/2 ، π]

أ. معتصم رحال

مثال (7) ص 63 عين فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران م(س) = |س² - 4| ، س ∈ [-3 ، 3]

الحل أولاً بغير تعريف المطلقة س² - 4 = 0 ⟸ س = ± 2

∴ م(س) = { 4 - س² ، -2 ≤ س ≤ 2 ; س² - 4 ، -3 ≤ س < -2 ، 2 < س ≤ 3 }

الاقتران م(س) متصل في الفترة [-3 ، 3] لأن اقتران القيمة المطلقة متصل

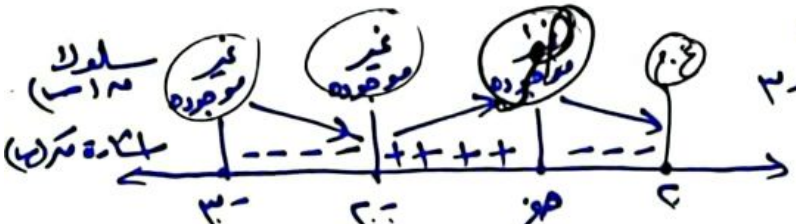
إذاً م'(س) = { -2س ، -2 < س < 2 ; 2س ، -3 < س < -2 ، 2 < س < 3 }

م'(-2)⁺ ≠ م'(-2)⁻

-2 × -2 ≠ 2 × -2

4 ≠ -4 ∴ م'(-2) غير موجودة

∴ م'(س) = { -2س ، -2 < س < 2 ; 2س ، -3 < س < -2 ، 2 < س < 3 ; غ.م ، س = -2 ، 2 ، -3 }




م'(س) = صفر

2س = 0

س = 0

منحنى م(س) متزايد [-2 ، صفر] ، [2 ، 3]

منحنى م(س) متناقص [-3 ، -2] ، [0 ، 2]

أ. معتصم رحال

تابعنا على الفيس واليوتيوب

صف 3

أ. معتصم رحال

تابعنا على الفيس واليوتيوب

حصص خاصة أونلاين سيتم Zoom



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

# تمارين ومسائل درس (( الاقترانات المتزايدة والمتناقصة ))

س١/ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) في كل حالة:

أ. معتصم ريحان

بداية حصة رقم 30

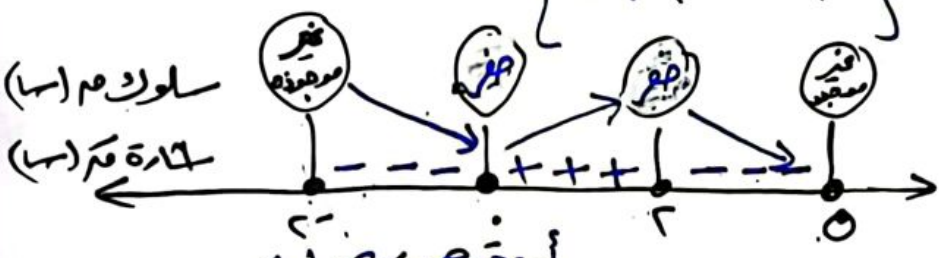
[أ] ق(س) = ٣س$^{٢}$ − س$^{٣}$ ، س ∈ [−٢ ، ٥]

الحل/ ق(س) متصل على [−٢ ، ٥] وقابل للاشتقاق على ]−٢ ، ٥[

ق′(س) = ٦س − ٣س$^{٢}$ = ٠ ⟸ إما س = صفر أو س = ٢

ق′(س) غ.م عند س = −٢ ، ٥ لأنهم أطراف فترة.

∴ النقاط الحرجة هي = {−٢ ، ٠ ، ٢ ، ٥}




الاقتران ق(س) متزايد [٠ ، ٢]

الاقتران ق(س) متناقص [−٢ ، ٠] ، [٢ ، ٥]

أ. معتصم ريحان

---

[ب] ق(س) = س + جا$^{٢}$س ، س ∈ [٠ ، π]

متطابقة ضعف الزاوية جا٢س

الحل/ ق(س) متصل على [٠ ، π] وقابلاً للاشتقاق على ]٠ ، π[

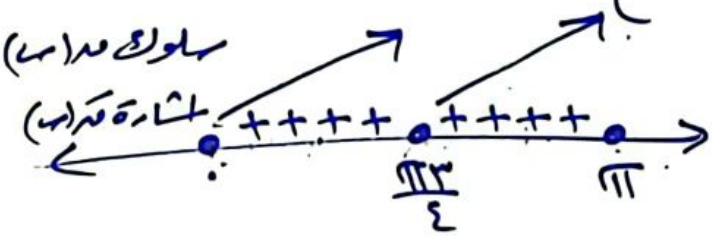
⟸ ق′(س) = ١ + ٢(جاس) × جتاس = صفر

= ١ + جا٢س = صفر ⟸ جا٢س = −١ ⟸ ٢س = ٢٧٠

∴ س = ١٣٥° ⟸ حولنا إلى دائري ١٣٥ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∴ س = ١٣٥°

ق′(س) غير موجودة عند س = ٠ ، π لأنهم أطراف فترة.

∴ النقاط الحرجة هي {٠ ، $\frac{٣\pi}{٤}$ ، π}




الاقتران ق(س) متزايد [٠ ، $\frac{٣\pi}{٤}$] ، [$\frac{٣\pi}{٤}$ ، π]

نقطة حرجة

ق′(س) = ٠ ، ق′(س) = غ.م

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

حصص خاصة أونلاين Zoom

00972598709519

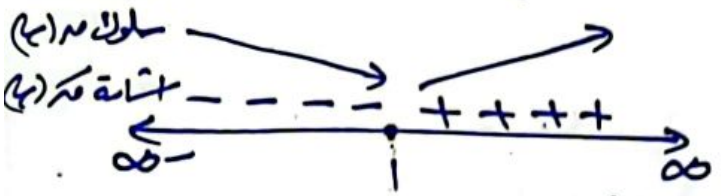
ص٦



حة ضوئيا بـ CamScanner

ج) $ق(س) = \sqrt{س^2 - 2س + 1}$ ، $س \in ح$

الحل: $ق'(س) = \frac{2س - 2}{2\sqrt{س^2 - 2س + 1}} = صفر \Leftarrow 2س - 2 = 0 \Leftarrow \boxed{س = 1}$



سلوك ق(س)
اشارة ق'(س)
$- - - - \quad + + + +$
$-\infty \quad 1 \quad \infty$

ق(س) متناقص $]-\infty ، 1]$ (صفر، كبير)

ق(س) متزايد $[1 ، \infty[$ (صفر، كبير)

أ. معتصم ريحان

---

س² ص64: اذا كان $= 2س - لو_{هـ}(س + 1)$ ، $س > -1$

فأثبت أن منحنى ق(س) متزايد في $ح^+$

الحل: ق(س) متصل لأنه مُعرف، وما داخل اللوغاريتم موجب

$ق'(س) = 2 - \frac{1}{س + 1} = صفر \Leftarrow \frac{-1}{س + 1} = \frac{-2}{1} \Leftarrow -2س - 2 = -1$

سلوك ق(س)
اشارة ق'(س)
$- - - - \quad + + + +$
$-\infty \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad \infty$

$\Leftarrow \boxed{س = -\frac{1}{2}}$

$ق'(-\frac{3}{4}) = 2 - \frac{1}{-\frac{3}{4} + 1} = -2$

$ق'(0) = 2 - \frac{1}{0 + 1} = 1$

لمعرفة اشارة الفترات

$ق'(س) > 0$ في $ح^+$

∴ ق(س) متزايد في $ح^+$ #

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

---

س³ ص64: جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س^3 & ، 0 \le س < 1 \\ س^2 - 2 & ، 1 \le س \le 2 \end{cases}$ في الفترة $[0 ، 2]$

الحل: نبحث الاتصال عند $س = 1$

$نهاق(س) = نهاق(س)$

$س \to 1^+ \quad س \to 1^-$

$-1 \neq 1$

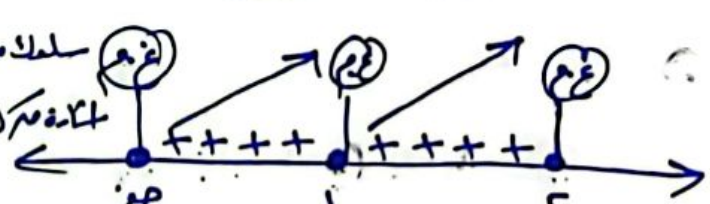
∴ ق(س) غير متصل عند $س = 1$

∴ ق'(س) عند $س = 1$ غير موجودة

وعند أطراف الفترة صفر، 2 أيضاً غ.م.

∴ $ق'(س) = \begin{cases} 3س^2 & ، 0 < س < 1 \\ 2س & ، 1 < س < 2 \\ غ.م & ، س = 0 ، 1 ، 2 \end{cases}$

غير موجودة



سلوك ق(س)
اشارة ق'(س)
$+ + + + \quad + + + +$
$صفر \quad 1 \quad 2$

∴ ق(س) متزايد $[0 ، 1[$ ، $[1 ، 2]$

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

00972598709519

ص5



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

أ. معتصم ريحان

س 4 ص 64 / اذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق على ح وكان ك(س) = ق²(س) + هـ²(س) + س² فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س) علماً بأنّ $\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})}$ $\boxed{\text{هـ}'(\text{س}) = -\text{ق}(\text{س})}$

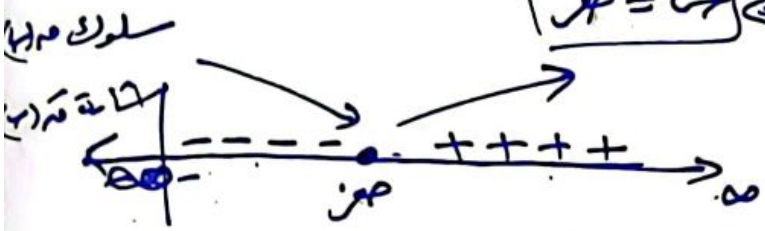
أ. معتصم ريحان

الحل / ك(س) متصل على ح

عوض عنها من السؤال

ك'(س) = ٢ (ق(س)) × ق'(س) + ٢ (هـ(س)) × هـ'(س) + ٢س

ك'(س) = ٢ق(س) × هـ(س) + ٢هـ(س) × −ق(س) + ٢س



ك'(س) = ٢س = صفر ⟸ $\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$

سلوك ق(س)

اشارة ق'(س)

− − − − − ● + + + +

صفر

∴ ق(س) متناقص ]−∞ ، ٠]

ق(س) متزايد [٠ ، ∞[

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس واليوتيوب.

س 5 ص 64 / اذا كان ق(س) كثير حدود متزايداً على ح وكان ك(س) = ق(س² − ٤س) فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س) استنتاج

الحل / معطى في السؤال ق(س) كثير حدود متزايداً على ح ∴ $\boxed{\text{ق}'(\text{س}) > \text{صفر}}$

ك(س) متصل على مجاله

ك'(س) = ق'(س² − ٤س) × (٢س − ٤) = صفر

هذه لا يمكن أن تساوي صفر لأنه قال في السؤال أنّ ق'(س) > صفر

أ. معتصم ريحان

∴ ٢س − ٤ = صفر

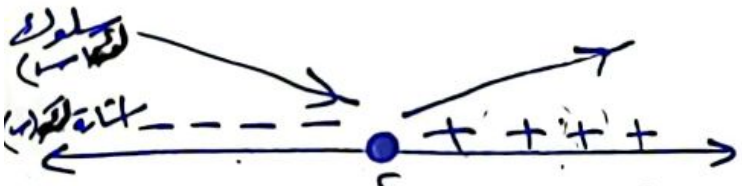
ومنها ⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$

سلوك ك(س)

اشارة ك'(س)

− − − − − ● + + + +

٢



ك(س) متناقص على ]−∞ ، ٢] (صفر كبير)

ك(س) متزايد على [٢ ، ∞[ (صفر كبير)

أ. معتصم ريحان تابعني على الفيس واليوتيوب

س 16 ص 2 / حاول أن تحل بنفسك / اذا كان ق'(س) = (س² − ١)³ (س − ٢)⁴ فإنّ ق يكون متناقصاً على الفترة

(أ) ]−∞ ، ١]  (ب) [−١ ، ١]  (ج) [١ ، ٢]  (د) [٢ ، ∞[

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين zoom

ص 6



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 6 ص 64

اذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود معرفين في الفترة [٠ ، ٤] بحيث أن منحنى ق(س) متناقص في مجاله ويقع في الربع الرابع ومنحنى هـ(س) متزايد في مجاله ويقع في الربع الأول أثبت أن منحنى الاقتران ق(س) × هـ(س) متناقص في الفترة [٠ ، ٤] .

| | |
|---|---|
| ق(س) + الربع الأول | ق(س) + الربع الثاني |
| ق(س) − الربع الرابع | ق(س) − الربع الثالث |

الحل

ق(س) متناقص في مجاله ⟸ قَ(س) < ٠ سالب

ق(س) يقع في الربع الرابع ⟸ ق(س) < ٠ سالب

هـ(س) متزايد في مجاله ⟸ هـَ(س) > صفر موجب

هـ(س) يقع في الربع الأول ⟸ هـ(س) > صفر موجب

وليكن ك(س) = ق(س) × هـ(س)

الأول م. الثاني الثاني م. الأول

ك َ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

= سالب × موجب + موجب × سالب

سالب + سالب

= سالب ∴ كَ(س) سالب ∴ كَ(س) < ٠ متناقص

∴ ك(س) متناقص

المطلوب أثبت أن ك(س) متناقص «سالب» في الفترة [٠ ، ٤]

أ. معتصم ريحان

---

س 7 ص 64

اذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$] فجد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران قَ(س)

لاحظ هنا اختلف الأمر اعطانا المشتقة الأولى لذلك سنحتاج إلى المشتقة الثانية.

الحل

ق(س) متصل على مجاله

قَ(س) = جتاس − جاس

قً(س) = − جاس − جتاس = صفر

منها نحدد الاشارة فوق خط الأعداد

$\frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}$

أ. معتصم ريحان

− ظاس = ١

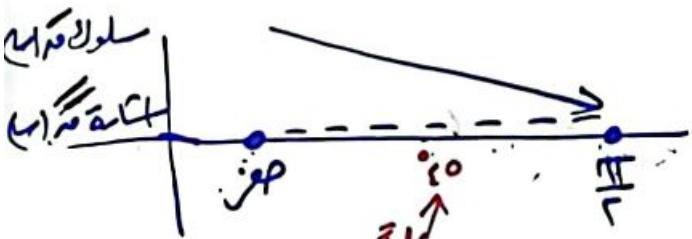
ظاس = −١

shift ⟹ tan ⟹ −١

∴ س = −٤٥° هذه زاوية في الربع الرابع لأنها سالبة.

−٤٥° + ١٨٠ = ١٣٥°

١٣٥ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∉ [٠ ، $\frac{\pi}{2}$]




مثلاً نعوض فيها لنعرف الاشارة

ونعوض في قً(س)

∴ الاقتران قَ(س) متناقص [صفر ، $\frac{\pi}{2}$]

أ. معتصم ريحان

ص 7



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

# حل أسئلة امتحانات سابقة

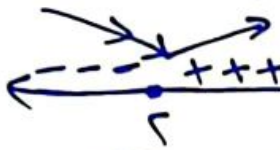
س ١٩ ح ٢ / ما قيمة / قيم الثابت أ التي تجعل الاقتران ق(س) = (٣أ − ٦)س + ٧ متزايداً على ح .

(أ) $\boxed{أ > ٢}$ (ب) أ = ٢ (ج) أ < ٢ (د) أ = −٢

الحل / ق′(س) = ٣أ − ٦ = صفر ⟸ ٣أ = ٦ ⟸ $\boxed{أ = ٢}$

− − − + + +
٢

أ. معتصم ريحان



س ١٩ ح ٢ / اذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود من الدرجة الرابعة فما أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للاقتران ق(س)

(أ) ٢ (ب) $\boxed{٣}$ (ج) ٤ (د) ٥

الحل / إذا ق(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة فبعد ما نشتقه يصبح من الدرجة الثالثة والمعادلة من الدرجة الثالثة لها على الأكثر ثلاث حلول

أ. معتصم ريحان

س ١٢ ح ٢ / اذا كان ق(س) ، هـ(س) معرفان على ح وكان ق(س) متزايداً على ح ق(س) ≠ صفر بحيث أن ق(س) × هـ(س) = ٧ فإن احدى العبارات الآتية صحيحة دائماً

(أ) $\boxed{هـ(س) متناقص على ح}$ (ب) هـ(س) متزايد على ح

(ج) هـ(س) ثابت على ح (د) ق(س) < هـ(س) على ح .

الحل / هـ(س) = $\frac{٧}{ق(س)}$

∴ هـ′(س) < ٠

∴ هـ(س) متناقص

معطى من السؤال

⟸ هـ′(س) = $\frac{-٧ \times ق′(س)}{(ق(س))^٢}$ = $\frac{-٧ \times (+)}{+}$ = $\frac{-}{+}$ = − على ح

س ١٩ ح ٢ دور ثاني / اذا كان ق(س) = لو$_{هـ}$ جاس ، س ∈ [$\frac{\pi}{٤}$ ، π] ما الفترة التي يكون فيها ق(س) متزايداً .

أ. معتصم ريحان

(أ) $\boxed{[\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢}]}$ (ب) [$\frac{\pi}{٤}$ ، π] (ج) [$\frac{\pi}{٢}$ ، π] (د) [$\frac{\pi}{٤}$ ، π]

الحل / ق′(س) = $\frac{جتاس}{جاس}$ = ٠ ⟸ جتاس = ٠

∴ $\boxed{س = ٩٠}$ ⟸ $\frac{\pi}{٢}$ ∈ [$\frac{\pi}{٤}$ ، π]

س = ٢٧٠ ⟸ $\frac{٣\pi}{٢}$ ∉ [$\frac{\pi}{٤}$ ، π]

∴ ق(س) متزايد في [$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]

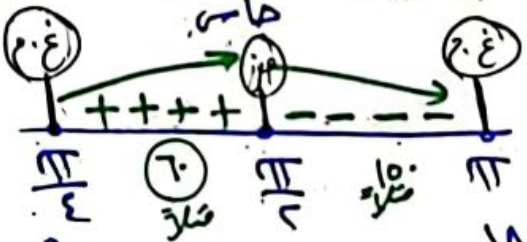
غ.م — صفر — غ.م

+ + + + — — — —

$\frac{\pi}{٤}$ ، ٦٠ مثلاً ، $\frac{\pi}{٢}$ ، ١٥٠ مثلاً ، π

٤٥° ، ٩٠ ، ١٨٠

$\frac{جتا٦٠}{جا٦٠} = \frac{\frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$



$\frac{جتا١٥٠}{جا١٥٠} = \frac{-\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = -$

ص 8



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

حصة رقم 31
توجيهي علمي 2022
أ. معتصم ريحان

# حل أسئلة امتحانات سابقة على درس الاقترانات المتزايدة والمتناقصة

س 19 دور ثاني / إذا كان ق(س) = $\sqrt{٤س + س^٢}$ فما قيمة / قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقط حرجة

أ) -١ ب) ٠ ، -٤ ج) -٢ ، -٤ د) ٠ ، -٢ ، -٤

الحل / ق'(س) = $\frac{٤ + ٢س}{٢\sqrt{٤س + س^٢}}$ = صفر

نقاط حرجة: ق'(س) = ٠ ، ق'(س) غير موجودة

٤ + ٢س = صفر

٢س = -٤

س = -٢ مرفوضة

لكن س = -٢ ∉ لمجال ق(س)

∴ قيم س التي يكون عندها نقط حرجة للاقتران هي ٠ ، -٤ فقط #

أ. معتصم ريحان

(*) تكون المشتقة غير موجودة للاقتران ق'(س) عندما يكون المقام = صفر

∴ ⇐ ٢$\sqrt{٤س + س^٢}$ = صفر

$\sqrt{٤س + س^٢}$ = صفر

٤س + س² = ٠

س(٤ + س) = ٠

س = ٠ ، س = -٤ مقبولات لأنهم ∈ لمجال ق(س)

أ. معتصم ريحان

---

س 20 ق / اذا كان ق(س) = س² - ٣٢ لو$_{هـ}$ س ، فما عدد القيم الحرجة للاقتران ق(س) على مجاله .

أ. معتصم ريحان

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٣

الحل / ق'(س) = ٢س - ٣٢ × $\frac{١}{س}$ = صفر

نقط حرجة: ق'(س) = ٠ ، ق'(س) غير موجودة

$\frac{٢س}{١} - \frac{٣٢}{س}$ = صفر

أ. معتصم ريحان

تابعني اليوتيوب والفيس

$\frac{٢س^٢ - ٣٢}{س}$ = ٠

قيم س التي تجعل ق'(س) غير موجودة هي عندما يكون المقام صفر ∴ عندما يكون س = ٠ لكن الصفر ∉ لمجال ق(س)

٢س² - ٣٢ = ٠

س² = ١٦

س = ±٤

عندما ق'(س) = ٠ ، س = ٤ ، س = -٤ مرفوضة ∉ لمجال ق(س)

∴ عدد النقاط الحرجة واحدة فقط

ص ١



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س ٥٥ / اذا كان ق(س) = $\frac{س}{س+1}$ ، س ≠ -1 فما العبارة الصحيحة مما يأتي :-

(أ) ق(س) متزايد على ح

(ب) ق(س) متزايد على ]-∞ ، -1[ وعلى ]-1 ، ∞[

(ج) ق(س) متناقص على ح

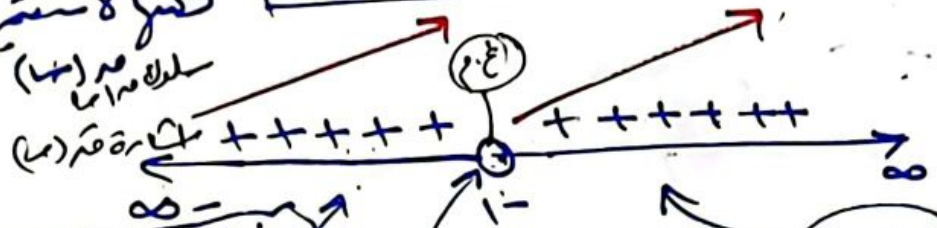
(د) ق(س) متناقص على ]-∞ ، -1[ وعلى ]-1 ، ∞[

$ق'(س) = \frac{(س+1)\times(1) - س\times(1)}{(س+1)^2} = \frac{1}{(س+1)^2} = 0$ ، 1 ≠ صفر أبداً .

∴ ق'(س) لا يمكن أن تساوي صفر

⊗ ق'(س) سيكون غير معرف عندما المقام يساوي صفر

⇐ $(س+1)^2$ = صفر ⇐ س + 1 = 0 ⇐ $\boxed{س = -1}$ ← نقطة حرجة لكنها لا تنتمي لمجال سلوك ق(س) .




عوض فيها المشتقة عن سين بواحد تعرف إشارة الفترة

عوض فيها المشتقة عن سين تعرف إشارة الفترة (-2)

مفتوحة

∴ ق(س) متزايد

]-∞ ، -1[ ]-1 ، ∞[

لاحظ الفترة مفتوحة عند -1 لأنها لا تنتمي لمجال ق(س)

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

---

س ٥٥ / دورتان / اذا كان ق(س) = س × $هـ^{س}$ فما قيمة / قيم س الحرجة لمنحنى ق'(س)

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 0 ، -1 (د) 0 ، -2

لاحظ هنا سنجد المشتقة الثانية ونساويها بصفر ونجد قيم سين

الحل

ق'(س) = س × $هـ^{س}$ + $هـ^{س}$ × (1) ← طبقنا قاعدة الضرب

ق''(س) = س × $هـ^{س}$ + $هـ^{س}$ × (1) + $هـ^{س}$

ق''(س) = س × $هـ^{س}$ + 2 $هـ^{س}$ = صفر

⇐ $هـ^{س}$ (س + 2) = 0

$هـ^{س}$ ≠ 0 أبداً ∴ س + 2 = 0

س = -2 ← نقطة حرجة # ∈ لمجال ق(س)

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين

ميزة زودم

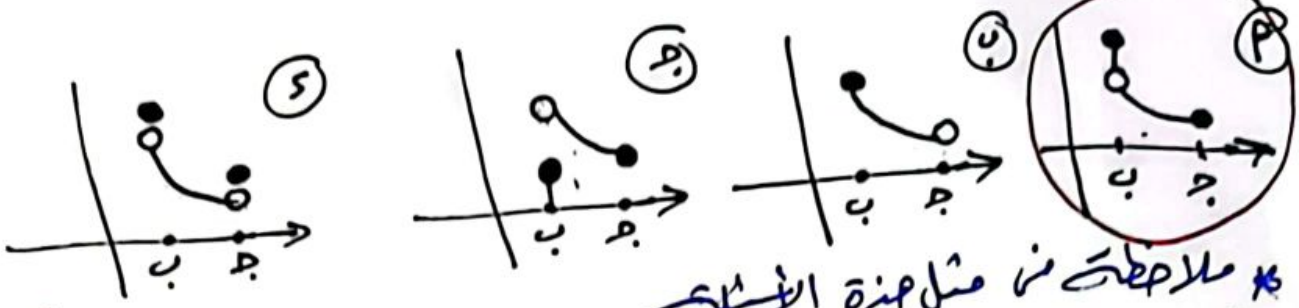
00972598709519

ص 2



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س١٧ هـ/ الشكل المجاور يمثل اقترانات، المنحنى الذي يكون متناقص على [ب، جـ]




* ملاحظة في مثل هذه الأسئلة

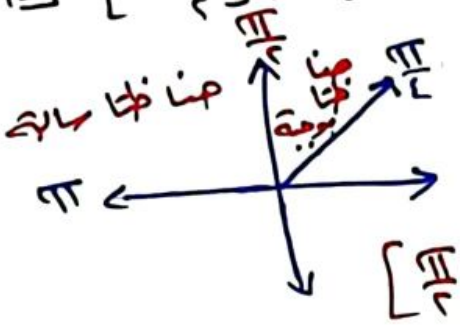
① اذا كانت النقطة في الأعلى نأخذ الذي فوقها.
② اذا كانت النقطة في الأسفل نأخذ الذي تحتها.

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

س١٩ هـ دور ثاني/ اذا كان ق(س) = لو جاس ، س ∈ [$\frac{\pi}{4}$ ، $\pi$] ما الفترة التي يكون فيها ق(س) متزايداً

أ) [$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{2}$] ب) [$\frac{\pi}{4}$ ، $\pi$] جـ) [$\frac{\pi}{2}$ ، $\pi$] د) [$\frac{\pi}{4}$ ، $\pi$]

الحل/ ق'(س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ = ظتاس = صفر




ظتاس يكون موجب في الربع الأول والثالث

| | |
|---|---|
| كل + | + جاقتا |
| + جتاقا | + ظاظتا |

∴ الفترة هي [$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{2}$]

س١٩ هـ دور ثاني/ اذا كان ق(س) = $\sqrt{4\text{س} + \text{س}^2}$ فما قيمة/قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقطة حرجة

معاد

أ) -١ ب) ٠ ، -٤ جـ) -٢ ، -٤ د) ٠ ، -٢ ، -٤

الحل/ نبحث المجال أولاً ٤س + س² ≥ صفر

٤س + س² = صفر

س(٤ + س) = ٠

س = ٠ أو س = -٤

+++ --- +++
-٤ صفر

∴ مجال ق(س) هو ]-∞ ، -٤] ، [صفر ، ∞[ أو ممكن نقول ح - ]-٤ ، صفر[

الآن نشتق ق'(س) = $\frac{4 + 2\text{س}}{2\sqrt{4\text{س} + \text{س}^2}}$ = ٠ ⟸ ٤ + ٢س = ٠ ⟸ س = -٢ مرفوض لا ينتمي للمجال

الآن نساوي المقام بصفر ٢$\sqrt{4\text{س} + \text{س}^2}$ = ٠ ⟸ ٤س + س² = ٠

⟸ س = ٠ ، س = -٤

(3)



حه ضوئيا بـ CamScanner

س 2019 / جريبي نابلس

اذا كان ق(س) = { [½ س] س ، ٣ ≤ س < ٤ ؛ أ س² + ب س ، ٤ ≤ س ≤ ٥ }

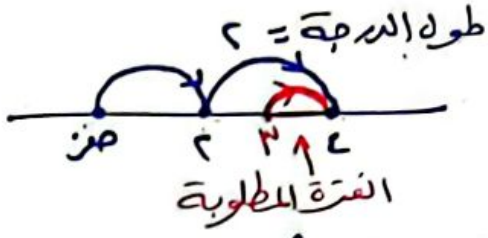
قابل للاشتقاق على ]٣، ٥[ فإن قيم كل من أ، ب على التوالي هي

أ) ١، صفر  ب) ١، ٢  ج) صفر، ٢  د) صفر، ١

أ. معتصم ريحان

الحل: أولاً نعيد تعريف الصحيح

∴ ق(س) = { ١ × س ، ٣ ≤ س < ٤ ؛ أ س² + ب س ، ٤ ≤ س ≤ ٥ }




[½ س] = { ١ ، ٢ ≤ س < ٤ }

الفترة المطلوبة ٣ ≤ س < ٤ جزء من الموجودة

ق'(س) = { ١ ، ٣ < س < ٤ ؛ ٢ أ س + ب ، ٤ < س < ٥ }

* من الاشتقاق عند س = ٤ نستنتج أن

١ = ٢ × أ × ٤ + ب

١ = ٨ أ + ب ——— (2)

* من الاتصال عند س = ٤ نستنتج أن

٤ = أ (٤)² + ب × ٤

٤ = ١٦ أ + ٤ ب

١ = ٤ أ + ب ——— (1)

الآن نحل معادلة (1) مع (2) بالحذف

١ = ٢ أ + ب

١ = ٨ أ + ب  إطرح

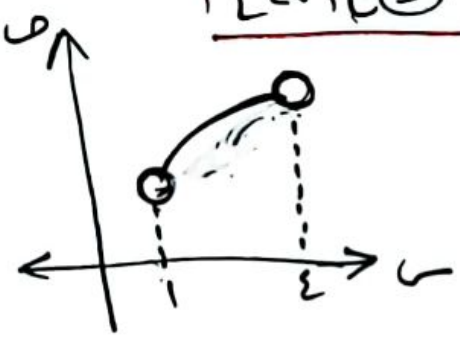
صفر = -٤ أ

صفر = أ ∴ ب = ١

أ. معتصم ريحان تابعين على الفيس واليوتيوب

س 2018 / الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) على ]١، ٤[ متى يكون الاقتران متزايداً.

أ) [١، ٤]  ب) ]١، ٤[  ج) [١، ٤[  د) ]١، ٤]




* ملاحظة مهمة جداً لحل مثل هذه الأسئلة:

* اذا كانت النقطة في الأعلى نأخذ الذي فوقها.

* واذا كانت النقطة في الأسفل نأخذ الذي أسفلها.

أ. معتصم ريحان

ص 3 | 00972598709519



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

٢٠١٩ تجريبي قلقيلية

اذا كان ق(س) = [س] − ([س − ٢]) ، س ∈ [−١ ، ١] فإنّ قيمة أو قيم س التي يكون عندها نقاط حرجة هي:

أ. معتصم ريحان

(أ) ]−١ ، ١[ (ب) [−١ ، ١] (ج) ]−١ ، ١] (د) ٢

خاصية لاقتران الصحيح

لاحظ

⇐ −[س − ٢]

⇐ −([س] − ٢)

⇐ −[س] + ٢

الحل: ق(س) = ~~[س]~~ − ~~[س]~~ + ٢

ق(س) = ٢ ← هذا اقتران ثابت والاقتران الثابت كله نقاط حرجة على فترته

∴ النقط الحرجة هي كل الفترة المعطاه وهي [−١ ، ١]

[س + أ] = [س] + أ

بشرط أ ∈ ص

خاصية

أ. معتصم ريحان

00972598709519

تابعني على الفيس واليوتيوب

٢٠١٩ تجريبي جنين

اذا كان ق′(س) = (س² − ١)³ (س − ٢)⁴ وكان ق(س) اقتران متصل على [٠ ، ٣[ ما عدد النقاط الحرجة للاقتران ق(س)

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٥

ق′(س) = ٠ ⇐ (س² − ١)³ (س − ٢)⁴ = ٠

إما (س² − ١)³ = ٠ أو (س − ٢)⁴ = ٠

س² − ١ = صفر أو س − ٢ = ٠

س² = ١ ، س = ٢

س = ±١

س = ١ ∈ ]٠ ، ٣[ ✓

س = −١ ∉ ]٠ ، ٣[ مرفوضة

النقاط الحرجة هي {٠ ، ٢ ، ١} عددهم ثلاثة

النقاط الحرجة

ق′(س) غير موجودة أو ق′(س) تساوي صفر

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

* أطراف الفترة نقاط حرجة لكن لاحظ الفترة مفتوحة عند س = ٣

[٠ ، ٣[ اذا س = ٣ ليست نقطة حرجة

ص



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

2015 ثانوي / اذا كان $م(س) = جتاس - ب(س) + ٣س$ ، $س \in [٠، \frac{\pi}{٢}]$
أثبت أنّ للاقتران $(م+ب)(س)$ متزايد في تلك الفترة.

أ. معتصم ريحان

الحل
$م(س) = جتاس - ب(س) + ٣س$
$م(س) + ب(س) = جتاس + ٣س$
$(م+ب)(س) = -جاس + ٣ = صفر \Leftarrow$ جاس = ٣ لا يمكن ولا يوجد قيم لسينه لأن

لاحظ
$-١ \leq جاس \leq ١$
$-١ \leq جتاس \leq ١$

سلوك $(م+ب)$ س
إشارة $(م+ب)$ س
صفر ، $\frac{\pi}{٢}$

نأخذ مثلاً $\frac{\pi}{٤}$ ونعوض في المشتقة نجد التالي

$-جا\frac{\pi}{٤} + ٣ = -\frac{١}{\sqrt{٢}} + ٣ = ٢$ موجب (+)

$\therefore (م+ب)(س)$ متزايد في الفترة $[٠، \frac{\pi}{٢}]$

أ. معتصم ريحان

---

2012 ثانوي / اذا كان $م(س) = جاس + جتاس$ ، $س \in [٠، \frac{\pi}{٤}]$ أثبت أنّ $م(س)$ متزايداً على مجاله، ومن ذلك أثبت أنّ جاس + جتاس $\geq ١$ في تلك الفترة.

الحل $م'(س) = جتاس - جاس = صفر \Leftarrow \frac{جتاس}{جتاس} = \frac{جاس}{جتاس}$

$\Leftarrow$ ظاس = ١

$س = ٤٥ \Leftarrow \frac{\pi}{٤} \notin ]٠، \frac{\pi}{٤}[$

$س = ٢٢٥ \Leftarrow$ لا تنتمي للفترة $[٠، \frac{\pi}{٤}]$

سلوك $م'(س)$
إشارة $م'(س)$
صفر ، $\frac{\pi}{٤}$

نأخذ مثلاً زاوية $(٣٠°)$ ونعوض في المشتقة

$جتا٣٠ - جا٣٠$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} =$ موجب (+)

$\therefore م'(س) > صفر$

$\therefore م(س)$ متزايد $[٠، \frac{\pi}{٤}]$

أ. معتصم ريحان

بما أن ما الفيزياء واليوتيوب مخصص أونه لا يتيح خاصية ميزة الظل موجب في الأول والثالث

$٢٢٥ = ١٨٠ + ٤٥$

$٢٢٥ \notin [٠، \frac{\pi}{٤}]$

أ. معتصم ريحان صح


CamScanner بـ صوتيا

س 2020 إذا كانت $\theta(س) = ٢س - س^{٢}$ ، $\alpha(س)$ كثير حدود متزايد على ح ؟

أثبت أن الاقتران $ل(س) = \alpha(س) + \theta(س) \times \alpha(س)$ متزايد $\forall س \in [٠,٣]$

الحل

$ل'(س) = \alpha'(س) + \theta'(س) \times \alpha'(س) + \theta(س) \times \alpha'(س)$

$ل'(س) = \alpha'(س) + \theta(س) \times \alpha'(س) + (\theta(س))^{٢} \alpha'(س)$

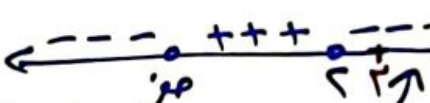
$\Leftarrow$ معطى أن $\alpha(س)$ متزايد $\therefore$ ومنها $\Leftarrow \alpha'(س) > ٠$

$\Leftarrow$ الآن نريد أن نعرف إشارة $\theta(س)$ وإشارة $\theta'(س)$

$\Leftarrow$ نجد أصفار الاقتران $\theta(س)$ ثم نبحث عن إشارته.

$\Leftarrow ٢س - س^{٢} = ٠$

$\Leftarrow س(٢ - س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$ أو $س = ٢$

$\Leftarrow$ 


$\Leftarrow$ هنا تقع الفترة المطلوبة عندما وهي $[٣,٠]$ $\therefore$ إشارة $\theta(س)$ سالبة

$\Leftarrow$ الآن نجد $\theta'(س) = ٢ - ٢س$

$\Leftarrow$ ثم نجد $\theta'(٠) = ٢ \Leftarrow$ $\therefore$ الاقتران $\theta'(س)$ إشارته موجبة

$\Leftarrow$ الآن نرجع ونعوض في الاقتران $ل'(س)$ لإثبات أنه متزايد على $[٣,٠]$

$\Leftarrow ل'(س) = \alpha'(س) + \theta(س) \times \theta'(س) + (\theta(س))^{٢} \alpha'(س)$

هنا ترتيب إذا أداة الإشارة ستكون موجبة

$\Leftarrow ل'(س) = (+) + (-) \times (-) + (+)$

$\Leftarrow ل'(س) = (+) + (+) + (+)$

$\Leftarrow ل'(س) = (+) > ٠$

$\therefore$ الاقتران $ل(س)$ متزايد لأن $ل'(س) > ٠$ #

أ. معتصم ريحان

تابعنا على الفيس واليوتيوب

صفحة أون لاين خاصة مميزة



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال / اذا كان متوسط التغير للاقتران م(س) = $أ س^{٣} + ب س$ في الفترة [١، ٣] يساوي ٢٢ وكان لمنحنى الاقتران م(س) مماس أفقي عندما س = ٢ أوجد قيمتي كل من أ، ب .

الحل / متوسط التغير = $\frac{م(س_٢) - م(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$\frac{م(٣) - م(١)}{٣ - ١} = ٢٢$

$(أ(٣)^{٣} + ب(٣)) - (أ(١)^{٣} + ب(١)) = ٤٤$

$٢٧أ + ٣ب - أ - ب = ٤٤$

$٢٦أ + ٢ب = ٤٤$

$١٣أ + ب = ٢٢$ ... ①

م'(س) = $٣أ س^{٢} + ب$

م'(٢) = $٣أ(٢)^{٢} + ب = ٠$

$١٢أ + ب = ٠$ ... ②

بطرح ① من ②

$-٩أ = -٢٢$

$أ = ٢٢$ ومنها $ب = -٢٦٤$

أ. معتصم ريحان
00972598709519

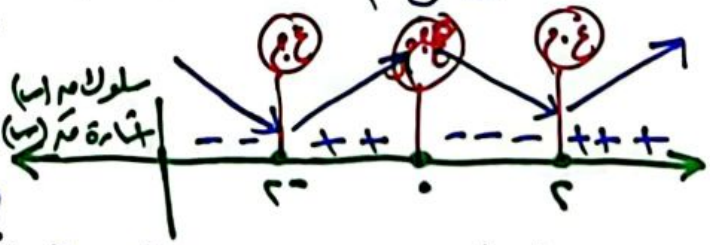
مثال / عين فترات التزايد والتناقص للاقتران م(س) = $|س^{٢} - ٤|$

الحل $م(س) = |س^{٢} - ٤| = \begin{cases} س^{٢} - ٤ & ، س \geq ٢ \\ ٤ - س^{٢} & ، -٢ < س < ٢ \\ س^{٢} - ٤ & ، س \leq -٢ \end{cases}$

$م'(س) = \begin{cases} ٢س & ، س > ٢ \\ -٢س & ، -٢ < س < ٢ \\ ٢س & ، س < -٢ \\ غ.م & ، س = ٢، -٢ \end{cases}$

$٢س = ٠ \Rightarrow س = ٠$

$-٢س = ٠ \Rightarrow س = ٠$




① م(س) متصل على ح .

② م(س) قابل للاشتقاق على ح - {-٢، ٢}

③ بوضع م'(س) = صفر

| الفترة | | الفترة | | الفترة | |
|---|---|---|---|---|---|
| س > ٢ | | -٢ < س < ٢ | | س < -٢ | |
| ٢س = ٠ | | -٢س = ٠ | | ٢س = ٠ | |
| س = ٠ | | س = ٠ | | س = ٠ | |
| لا ينتمي للفترة | X | ينتمي للفترة | ✓ | لا ينتمي للفترة | X |

م(س) متزايد في الفترة $]-٢، ٠] \cup [٢، \infty[$

م(س) متناقص في الفترة $]-\infty، -٢] \cup [٠، ٢]$

أ. معتصم ريحان
00972598709519


هذا الملف خاص لأون لاين





ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

**أساسي** / اذا كان ق(س) متصلاً على [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق على ]أ، ب[ وكانت جميع المماسات لمنحنى ق(س) تصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فإنّ العبارة الصحيحة من الآتية هي:

(أ) ق(س) متناقص في [أ، ب]. لاحظ اخترنا فرع (ب) وليس (د) لأنه إذا أردنا وصف سلوك ق(س) فإننا نستخدم اختبار المشتقة الأولى

(ب) ق(س) متزايد في [أ، ب].

(جـ) قَ(س) متناقص في [أ، ب]. أما لو أردنا وصف سلوك قَ(س) فإننا نستخدم قً(س).

(د) قَ(س) متزايد في [أ، ب]. وهكذا

أ. معتصم ريحان

---

**خارجي** / ق(س)، هـ(س) كثيري حدود معرفان على [١، ٦] ويقع منحنى كل منهما في الربع الأول فإذا كان ق(س) متزايداً في مجاله هـ(س) متناقصاً في مجاله هـ(س) ≠ صفر أثبت أنّ $\frac{ق}{هـ}$(س) متزايداً في [١، ٦].

ق(س) يقع في الربع الأول ⟸ ق(س) > صفر ، ق(س) متزايد ⟸ قَ(س) > صفر

هـ(س) يقع في الربع الأول ⟸ هـ(س) > صفر ، هـ(س) متناقص ⟸ هـَ(س) < صفر

نفرض أن الاقتران ك(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ صفر ، س ∈ [١، ٦]

① ك(س) متصل لأنه حاصل قسمة كثيري حدود.

② ك(س) قابل للإشتقاق.

$$كَ(س) = \frac{هـ(س) \times قَ(س) - ق(س) \times هـَ(س)}{(هـ(س))^2} = \frac{\oplus \times \oplus - \oplus \times \ominus}{\oplus} = \frac{\oplus - \ominus}{\oplus} = \oplus$$

∴ كَ(س) > صفر

ومنها ⟸ ك(س) متزايد على [١، ٦].

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب.

---

**امتحاني** / اذا كان ق، هـ اقترانين كثيري حدود متزايدان على ح وكان ق(س) < صفر ، ∀س ∈ ح اثبت أنّ الاقتران ((ق∘هـ)(س))² متناقصاً على ح.

تذكر أن (ق∘هـ)(س) = ق(هـ(س))

**الحل** / معطى أنه ق، هـ اقترانان متزايدان على ح اذاً قَ(س) > ٠ ، هـَ(س) > ٠

نفرض أن ك(س) = ((ق∘هـ)(س))² ⟸ ك(س) متصل وقابل للاشتقاق لانه حاصل تركيب اقترانين متصلين كثيري حدود.

ومنها ⟸ كَ(س) = ٢((ق(هـ(س))) × قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

∴ كَ(س) < صفر

كَ(س) = ٢ × ق(هـ(س)) × قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

كَ(س) = ٢ × ⊖ × ⊕ × ⊕ = ⊖

ك(س) = ((ق∘هـ)(س))² متناقص على ح

حل # ٩



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

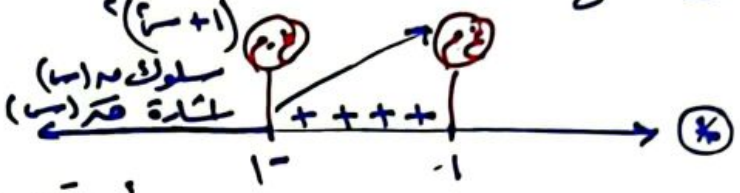
**خارجي** اذا كان ق(س) = $\frac{س}{1+س^2}$ معرفاً على [-1، 1] جد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

**الحل** (*) ق(س) متصل على ح لانه قسمة اقترانين متصلين كثيرة حدود.

$$ق'(س) = \frac{(1+س^2)\times 1 - س\times(2س)}{(1+س^2)^2} = \frac{1-س^2}{(1+س^2)^2} \quad ]1، -1[$$

(*) ق(س) قابل للاشتقاق على ح - {±1} لأنها نقاط طرفية.

(*) نضع ق'(س) = صفر ⇐ $\frac{1-س^2}{(1+س^2)^2} = 0$ ⇐ $1-س^2 = 0$ ⇐ $\boxed{س = \pm 1}$




من اشارة ق'(س) في الشكل المجاور فإن منحنى ق(س) متزايد في الفترة [-1، 1]

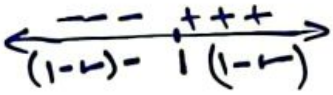
أ. معتصم ريحان تابعني على الفيس واليوتيوب.

---

**خارجي** اذا كان ق(س) = |س - 1| (س + 2) أوجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

**الحل** $|س-1| = \begin{cases} س-1 ، & س \geq 1 \\ 1-س ، & س < 1 \end{cases}$

س - 1 = 0 ⇐ س = 1




أ. معتصم ريحان

∴ ق(س) = $\begin{cases} (س-1)(س+2) ، & س \geq 1 \\ (1-س)(س+2) ، & س < 1 \end{cases}$

⇐ ق(س) = $\begin{cases} س^2+س-2 ، & س \geq 1 \\ -س^2-س+2 ، & س < 1 \end{cases}$

ق(س) متصل على ح ومتصل عند س = 1 أيضاً

⇐ ق'(س) = $\begin{cases} 2س+1 ، & س > 1 \\ -2س-1 ، & س < 1 \\ غ.م ، & س = 1 \end{cases}$

ق(س) قابل للاشتقاق عند ح - {1}

لأنه $ق'(1^+) \neq ق'(1^-)$

الآن نضع ق'(س) = 0

عندما س > 1

2س + 1 = 0

$\boxed{س = -\frac{1}{2}}$

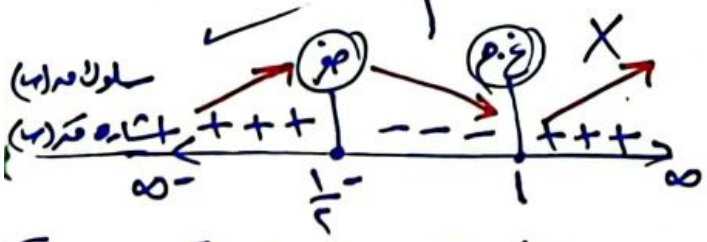
∉ س > 1

عندما س < 1

-2س - 1 = 0

$س = -\frac{1}{2}$

∈ س < 1




ق(س) متزايد [1، ∞[ ∪ ]-∞، -1/2]

ق(س) متناقص [-1/2، 1]

أ. معتصم ريحان

حصص أونلاين خاصة زوم

تابعني على الفيس واليوتيوب

ص 10



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

السلام عليكم ورحمة الله

هذا التلخيص المميز جداً هدية جارية مني وعن أهلي وأموالي
وجميع موتى المسلمين .

* هذا التلخيص موجود بالكامل فيديوهات مصورة وهي عبارة
عبارة حصص خاصة مميزة على الزووم ، اذا أردت التسجيلات كاملة
رسالني على الواتس 00972598 709519 أ. معتصم ريحان

* فيديوهات هذا التلخيص بنفس ترتيب التلخيص وهذا
هو الشيء المميز جداً والذي لا يوجد في فلسطين مثله .
بفضل الله .

* بعض هذه الفيديوهات موجودة بشكل عام للكل على قناتي
على اليوتيوب باسم (( معتصم ريحان رياضيات توجيهي ))
وباقي الفيديوهات موجودة بروابط خاصة لمن يطلبها واتس .

* اعتمدت بشكل كامل في هذا التلخيص وبإذن الله ستحصل على
العلامة الكاملة .

* لا تنسى أن تتابع صفحتي الرسمية على الفيس بوك وقناتي
على اليوتيوب وكلاهما باسم (( معتصم ريحان رياضيات توجيهي ))

* بشرى سارة لكل طلاب فلسطين هذا التلخيص شامل ومجاني
بالكامل لكل طلاب فلسطين وبإمكانك ارساله لمن تحب
لكنه فيديوهات هذا التلخيص غير مجانية واذا أردت الحصول
عليها رسالني واتس .

أ. معتصم سلامة ريحان
00972598 709519

تابعني على مجموعات الواتس والتليجرام ضروري .


ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حصة رقم 32

توجيهي علمي 2022

أ. معتصم ريحان

# الدرس الثالث (( القيم القصوى ))

## * تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية :.

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على المجال ع ولتكن جـ ∈ ع عندها يكون للاقتران ق(س)

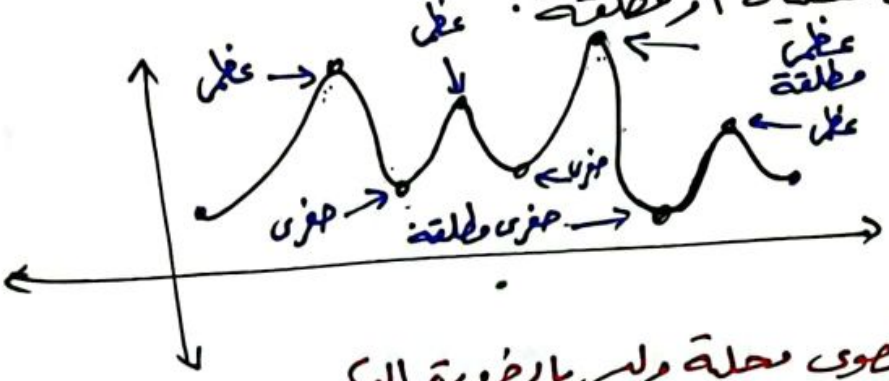
1) قيمة عظمى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحتوي جـ بحيث أن ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

2) قيمة صغرى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحتوي جـ بحيث أنّ ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

3) قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) اذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع.

4) قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع.

* ملاحظة :. تُسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى سواء أكانت محلية أو مطلقة.





أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

0097259870951 9


* كل قيمة قصوى مطلقة هي قصوى محلية وليس بالضرورة العكس.

* اذا كان للاقتران المتصل قيمة قصوى محلية وحيدة ⟸ اذاً هي مطلقة

س/ كيفية بحث القيم القصوى المحلية ؟؟

1) أن تكون نقطة حرجة بمعنى ق(س) = صفر أو غير موجودة وأن تكون ضمن مجال الاقتران.

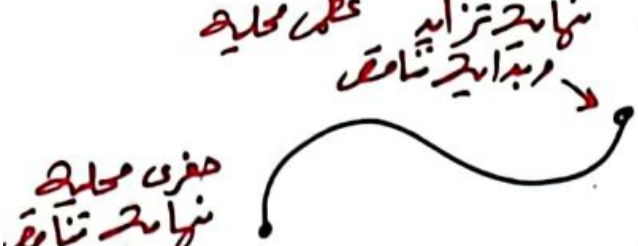
2) أن يتغير عندها سلوك الاقتران من تزايد إلى تناقص أو العكس.

ص1



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

(*) بالنسبة لأطراف الفترة: يكون




- حفرى محلية بداية تزايد.
- حفرى محلية نهاية تناقص
- عظمى محلية بداية تناقص
- عظمى محلية نهاية تزايد

أ. معتصم ريحان

(*) ملاحظة: أطراف الفترة المغلقة يجوز أن تكون نقاط حرجة وبالتالي قيم قصوى.

(*) اختبار أطراف الفترة:

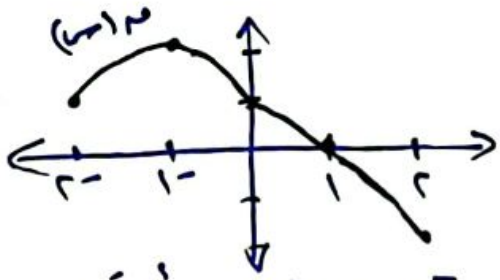
اذا كان م(س) اقتراناً متصلاً من [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق من ]أ، ب[ فإن:

1. م(أ) قيمة حفرى محلية اذا كانت م'(س) < 0 عندما س > أ بداية تزايد.
2. م(أ) " عظمى " " " م'(س) > 0 " س > أ بداية تناقص.
3. م(ب) " عظمى " " " م'(س) > 0 " س < ب نهاية تزايد.
4. م(ب) " حفرى " " " م'(س) < 0 " س < ب نهاية تناقص.

أ. معتصم ريحان

مثال ① حل كامل

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران م(س) في الفترة [-٢، ٢] اعتمد عليه في ايجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) ثم جد قيمة المشتقة الأولى عند كل قيمة منها (إن وجدت).



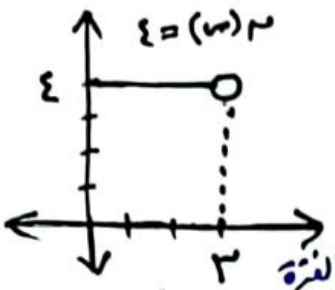

الحل: للاقتران م(س) قيمة حفرى محلية عندما س = -٢
وهما م(-٢) لأنه يوجد فترة مفتوحة مثل
ف = ]-٣، -١[ تحتوي العدد -٢ بحيث أن
م(-٢) ≤ م(س) ∀ س ∈ ف ∩ [-٢، ٢] = ]-٢، -١[
م'(-٢) غير موجودة لأنها طرف فترة

م(-١) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأنها وحيدة على الفترة [-٢، ٢]
م'(-١) = صفر لأنه المماس عندها أفقي ولأن م'(-١)⁺ = م'(-١)⁻
∴ م(٢) قيمة حفرى محلية وهي مطلقة، م'(٢) غير موجودة لأنها طرف فترة.

أ. معتصم ريحان تابعني على الفيس واليوتيوب
حصص أونلاين خاصة ومميزة
00972598709519

مثال ② ص 66

اذا كان ق(س) = ٤ ، س ∈ [٠ ، ٣[ جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)




الحل/ ق(س) متصل في [٠ ، ٣[

قَ(س) = صفر ∀س ∈ ]٠ ، ٣[

وحسب التعريف ∀س ∈ [٠ ، ٣[

يوجد قيمة صغرى محلية هي ٤ لأن ق(س) ≥ ٤ ∀س في تلك الفترة

كما أنه حسب التعريف ∀س ∈ [٠ ، ٣[ يوجد قيمة عظمى محلية هي ٤ لأن ق(س) ≤ ٤ ∀س في تلك الفترة.

أ. معتصم ريحان

---

نشاط ② ص 67

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [-٢ ، ٢]

① يوجد قيمة عظمى محلية عند س = -٢ وهي مطلقة.

② عند س = صفر يوجد قيمة صغرى محلية وهي مطلقة.

③ قَ(٢) = غير موجودة طرف فترة  قَ(٠) = صفر  قَ(-٢) غير موجودة طرف فترة

(*) تعريف ⇐ تُسمى النقطة (أ ، ق(أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت

[1] أ ∈ مجال ق(س).

[2] قَ(أ) = صفر أو قَ(أ) غير موجودة.

أ. معتصم ريحان
تابعني على العيني واليوتيوب

---

مثال ③ ص 67

عين جميع النقط الحرجة للاقتران

ق(س) = { س² - ٣ ، -١ < س ≤ ٢ ؛ ٣ - س ، ٢ < س ≤ ٣ } في ]-١ ، ٣]

الحل/ ق(س) متصل عند س = ٢

قَ(س) = { ٢س ، -١ < س < ٢ ؛ -١ ، ٢ < س < ٣ }

قَ(٢) غير موجودة لأن قَ(٢)⁺ ≠ قَ(٢)⁻

قَ(٣) غير موجودة لأنها طرف فترة.

الآن نجعل قَ(س) = صفر ومنها ← س = صفر ∈ ]-١ ، ٢[

لا يوجد قيم لـ س ∈ ]٢ ، ٣[ بحيث قَ(س) = صفر لأنه -١ ≠ صفر

ولا يوجد نقطة حرجة عند س = -١ لأنها لا تنتمي إلى مجال ق(س)

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، -٣) (٢ ، ١) (٣ ، ٠)

أ. معتصم ريحان
جيصص أونه لاينه خاصة مميزة
0097 259 8709 519

ص 3



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال (4) ص 67

عين جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) = { س^٣ ، ١ ≤ س ≤ ٢ ؛ [٣+س] ، ٢ < س ≤ ٣ } في [١، ٣]

الحل: أولاً نعيد تعريف اقتران الصحيح

طول الدرجة = ١ ، ٣ + س = ٠ ، س = -٣

[٣ + س] = { ٤ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٥ ، ٢ ≤ س < ٣ ؛ ٦ ، س = ٣ }

هذه الفترة التي نريدها من فك الصحيح.


أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب
00972598709519


∴ ق(س) = { س^٣ ، ١ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٥ ، ٢ < س < ٣ ؛ ٦ ، س = ٣ }

ق(س) غير متصل عند س = ٢ ، وعند س = ٣ ∴ ق(٢) غير موجودة ، ق(٣) غير موجودة.

وكذلك ق(١) غير موجودة لأنها طرف فترة.

∴ ق'(س) = { ٣س^٢ ، ١ < س < ٢ ؛ صفر ، ٢ < س < ٣ } س ∈ ]١، ٣[

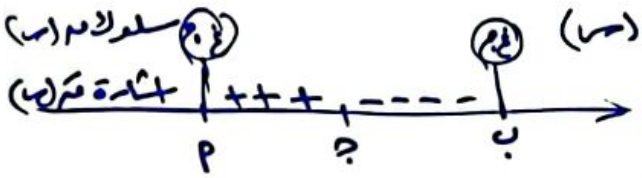
نقاط حرجة عند س = ٢ ، س = ٣ ، س = ١

وهي (٢ ، ٨) ، (٣ ، ٦) ، (١ ، ١)

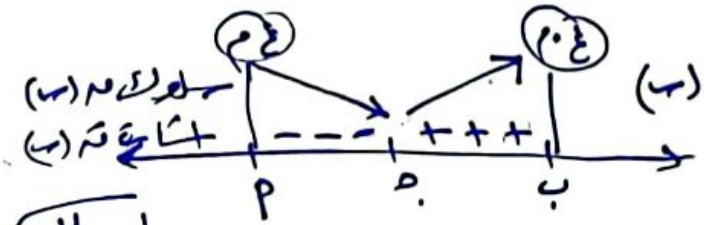
(*) اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى.

اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ، ب] وكانت (جـ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) جـ ∈ ]أ، ب[ فإنه

1) اذا كان ق'(س) > صفر عندما أ < س < جـ وكان ق'(س) < صفر عندما جـ < س < ب فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)




2) اذا كان ق'(س) < صفر عندما أ < س < جـ وكان ق'(س) > صفر عندما جـ < س < ب فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)




ص 4



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال 5 صـ 68 | جد القيم القصوى المحلية للاقتران م(س) = س³ + س² − ٥س − ٥

أ. معتصم ريحان

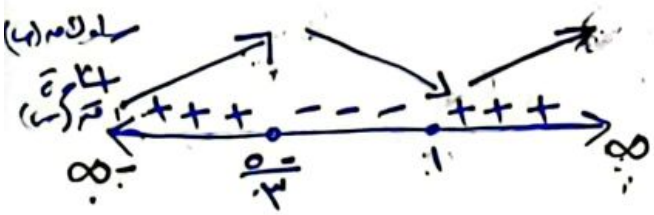
م(س) اقتران متصل على ح لأنه كثير حدود

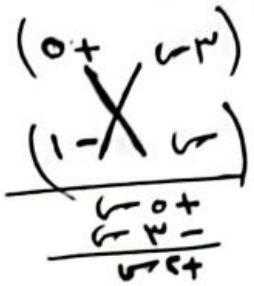
م'(س) = ٣س² + ٢س − ٥ ، ∀ س ∈ ح نجعل م'(س) = صفر

٣س² + ٢س − ٥ = صفر

(٣س + ٥)(س − ١) = صفر

س = −٥/٣ أو س = ١




م(−٥/٣) = ٤٠/٢٧ صغرى محلية عظمى محلية للاقتران م(س) عند س = −٥/٣

م(١) = −٨ صغرى محلية للاقتران م(س) عند س = ١

أ. معتصم ريحان

---

مثال 6 صـ 69 | جد القيم القصوى المحلية للاقتران م(س) = (٨ − س) س^(٢/٣)

الحل

م(س) متصل على ح

نستخدم قاعدة الضرب في الإشتقاق

م'(س) = (٨ − س) × (١/٣) س^(−٢/٣) + س^(١/٣) × (−١)

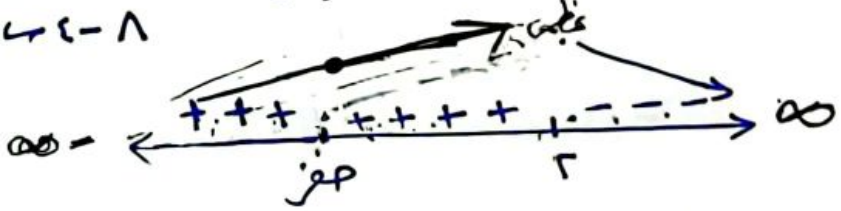
م'(س) = (٨ − س) / (٣ س^(٢/٣)) − س^(١/٣)

العدد صفر لا ينتمي للمجال. س ∈ ح − {٠}

م'(س) = (٨ − س − ٣ × ٣ س^(٤/٣) × س^(١/٣)) / (٣ س^(٢/٣)) = صفر

⇐ نساوي البسط بصفر ٨ − س − ٣ × ٣س = صفر

٨ − ١٠س = ٠ ⇐ س = ٢ نقطة حرجة


عظمى
+ + + +

مثال (7) ص 69

جد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س) = \frac{س^2 + 3}{س - 1}$ ، $س \neq 1$

أ. معتصم ريحان

الحل: $ق(س)$ متصل على $ح - \{1\}$

$$ق'(س) = \frac{(س-1) \times (2س) - (س^2+3) \times 1}{(س-1)^2} = \frac{2س^2 - 2س - س^2 - 3}{(س-1)^2}$$

$\Leftarrow \frac{س^2 - 2س - 3}{(س-1)^2} = صفر \Leftarrow$ نساوي البسط بصفر $س^2 - 2س - 3 = صفر$

$(س-3)(س+1) = صفر$

$س = 3 \quad س = -1$

أ. معتصم ريحان

حصص أونلاين خاصة

نساوي المقام بصفر عند $س = 1$ ق غير موجوده

$ق(-1) = -2$ قيمة عظمى محلية للاقتران $ق(س)$ عند $س = -1$

$ق(3) = 6$ قيمة صغرى محلية للاقتران $ق(س)$ عند $س = 3$

عند $س = 1$ لا يوجد قيمة قصوى لأن عند $س = 1$ لم يغير الاقتران من سلوكه ولأنها لا تنتمي إلى المجال أصلاً

أ. معتصم ريحان

مثال (8) ص 69

اذا كان $ق(س) = أ س^3 + ب س^2 + جـ س + د$ وكان للاقتران قيمة عظمى محلية عند $س = -1$ قيمتها 2 وقيمة صغرى محلية عند $س = 1$ وقيمتها $-1$ فجد قيمة الثوابت أ، ب، جـ، د

الحل

$\boxed{ق(-1) = 2} \Leftarrow 2 = -أ + ب - جـ + د$ —— (1)

$\boxed{ق(1) = -1} \Leftarrow -1 = أ + ب + جـ + د$ —— (2)

$ق'(س) = 3أ س^2 + 2ب س + جـ$

$\boxed{ق'(-1) = صفر} \Leftarrow 3أ - 2ب + جـ = 0$ —— (3)

$\boxed{ق'(1) = صفر} \Leftarrow 3أ + 2ب + جـ = 0$ —— (4)

أ. معتصم ريحان

00972598709519

تابعني على الفيس واليوتيوب

حل معادلة (3) مع (4)

$-4ب = 0$

$\boxed{ب = 0}$

$\boxed{جـ = \frac{-9}{4}}$

حل معادلة (1) مع (2)

ناتجة من جمع معادلة (1) مع (2) مباشرة

$\boxed{1 = 2ب + 2د}$

$1 = 2د$

$\boxed{\frac{1}{2} = د}$

$2 = -\frac{3}{4} - جـ + \frac{1}{2}$

$2 + \frac{1}{4} = -جـ$

$\boxed{جـ = \frac{-9}{4}}$

$2 = -أ - جـ + \frac{1}{2}$

اطرح

$صفر = 3أ + جـ$

$\frac{3}{2} = 2أ$

$\boxed{\frac{3}{4} = أ}$

ص 6



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال (9) / اذا كان م(س) = { س² ، -١ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٤ ، ٢ < س < ٣

① جد مجموعة قيم س للنقط الحرجة للاقترانة م(س)

② حدد القيم القصوى المحلية للاقترانة م(س).

أ. معتصم ريحان
00972598709519
حصص أونلاين خاصة Zoom

الحل / م(س) اقترانة متصل ف [-١ ، ٣[

م'(س) = { ٢س ، -١ < س < ٢ ؛ صفر ، ٢ < س < ٣

* أولاً عندما س ∈ ]-١ ، ٢[ نجعل م'(س) = صفر

⇐ ٢س = صفر ⇐ س = صفر ∴ يوجد نقطة حرجة فند س = صفر

* ثانياً: عندما ٢ < س < ٣ تكون م'(س) = صفر

وهذا يعني انه عند كل س ∈ ]٢ ، ٣[ يوجد نقطة حرجة م'(٢) غير موجودة ، م'(-١) غير موجودة.

فتكون مجموعة قيم س للنقط الحرجة { ٠ ، -١ ، ]٢ ، ٣[ }.

أ. معتصم ريحان حصص أونلاين مميزة جداً.

مثال (10) / اذا كان م(س) = س³ - ٢ لو س ، س ∈ ]٠ ، ٥] فحدد القيم المحلية التي يكون عندها للاقترانة م(س) قيم قصوى محلية.

الحل / م(س) متصل ف الفترة ]٠ ، ٥] ، م'(س) = ٢س - ٢/س  الآن نجعل م'(س) = صفر

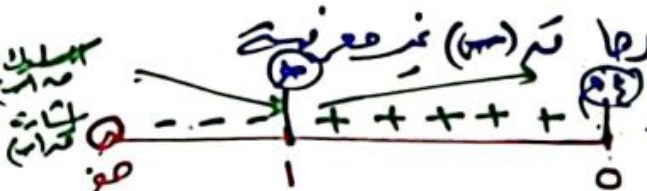
⇐ ٢س - ٢/س = ٠ ⇐ ٢س² - ٢ / س = ٠ ⇐ نجعل البسط يساوي صفر

⇐ ٢س² - ٢ = ٠ ⇐ س² = ١ ⇐ س = ± ١ السالب مرفوض ∉ ]٠ ، ٥]

∴ س = ١

الآن نجعل المقام يساوي صفر لنجد القيم التي عندها م'(س) غير معرفة

∴ س = صفر ولكنه صفر ∉ ]٠ ، ٥]




∴ مجموعة النقط الحرجة للاقترانة م(س) هي { ١ ، ٥ }

أخذناها لأنها طرفي فترة وتنتمي للمجال.

م(١) = ١ قيمة صغرى محلية للاقترانة م(س)

م(٥) = ٢٥ - ٢ لو ٥ قيمة عظمى محلية للاقترانة م(س) نهاية تزايد.

**مثال (11)** / اذا كان ق(س) = { س³ ، -١ ≤ س < ١ ؛ ½ ، س = ١ } ، س ∈ [-١ ، ١]

أ. معتصم ريحان

جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

**الحل** ق(س) متصل في [-١ ، ١[ ، ق'(س) = ٣س² ، س ∈ ]-١ ، ١[

ومنه إشارة ق'(س) في الشكل المجاور

عند س = -١ يوجد قيمة صغرى محلية

وقيمتها ق(-١) = -١

٣س² = ٠ ، س = ٠

فلا يمكن الحكم عليها من خلال إشارة المشتقة الأولى لذلك نلجأ إلى

مقارنة ق(١) مع نهاية ق(س) وبما أن ق(١) < نهاية ق(س) فإن ق(١) = ½

س ← ١ ، س ← ١

قيمة صغرى محلية عظمى

أ. معتصم ريحان 00972598709519

---

**نظرية القيم القصوى المطلقة :-**

أ. معتصم ريحان 00972598709519

اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [أ ، ب]

فإن ق(س) يتخذ قيمة القصوى المطلقة في الفترة [أ ، ب]

---

اذا كان ق(س) متصلاً على فترة في مجاله وكان له نقطة قيمة قصوى وحيدة فهي مطلقة في تلك الفترة.

أ. معتصم ريحان

---

**مثال (12)** ص 73 جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران ق(س) = س √(٤ - س²)

**الحل** لحل المتباينة ٤ - س² ≥ ٠

-س² ≥ -٤

س² ≤ ٤

|س| ≤ ٢

-٢ ≤ س ≤ ٢

المجال

نستنتج أن مجال ق(س) هو [-٢ ، ٢]

∴ ق(س) متصل على [-٢ ، ٢] نستنتج أن

مجال ق(س) هو [-٢ ، ٢]

⇐ ق'(س) = (٤ - ٢س²) / √(٤ - س²) ، س ∈ ]-٢ ، ٢[

⇐ نضع البسط يساوي صفر ٤ - ٢س² = ٠ ⇐ س² = ٢

∴ س = ±√٢ ∈ ]-٢ ، ٢[

∴ النقط الحرجة هي {-٢ ، ٢ ، √٢ ، -√٢}

ق(٢) = صفر صغرى محلية

ق(-٢) = صفر ← عظمى محلية

ق(√٢) = ٢ ← القيمة العظمى المطلقة للاقتران.

ق(-√٢) = -٢ ← القيمة الصغرى المطلقة للاقتران

ص 8

أ. معتصم ريحان



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

حصة رقم 33
توجيهي علمي 2022
أ. معتصم ريحان

# (( القيم القصوى ))

## حل أسئلة وتمارين الدرس (ص ٧٤) في الكتاب الوزاري

س١ ص٧٤

جد النقط الحرجة للاقترانات الآتية:

[أ] $ق(س) = \frac{1}{3}س^3 - س^2 + \frac{1}{3}$ ، $س \in [-2 ، 3]$

الحل: $ق'(س) = س^2 - 2س = 0 \Leftarrow س(س-2) = 0 \Leftarrow س = 0$ أو $س = 2$

ق' غير موجودة عند أطراف الفترة: $س = -2$ ، $س = 3$ نقط حرجة

إذاً النقط الحرجة هي: $(0 ، ق(0)) = (0 ، \frac{1}{3})$ ، $(2 ، ق(2)) = (2 ، -1)$

$(-2 ، ق(-2)) = (-2 ، \frac{-19}{3})$ ، $(3 ، ق(3)) = (3 ، \frac{1}{3})$

أ. معتصم ريحان

س١ ص٧٤

[ب] $ق(س) = س^{\frac{2}{3}}$ ، $س \in [-8 ، 8]$

أ. معتصم ريحان

الحل: نجد $ق'(س) = \frac{2}{3}س^{\frac{-1}{3}}$ الآن نرجعها لأصلها ثم نساويها بصفر $ق'(س) = \frac{2}{3س^{\frac{1}{3}}} = صفر$

$2 \neq صفر$ ق'(س) غير موجودة عندما المقام = صفر ∴ $3س^{\frac{1}{3}} = 0 \Leftarrow س = 0$

ق'(س) غير موجودة عند أطراف الفترة: $س = -8$ ، $س = 8$

إذاً النقط الحرجة هي $(0 ، ق(0)) = (0 ، 0)$ ، $(-8 ، ق(-8)) = (-8 ، 4)$

$(8 ، ق(8)) = (8 ، 4)$

أ. معتصم ريحان

س٢ ص٧٤

في التمارين من (أ ← و) جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) إن وجدت.

[أ] $ق(س) = س^3 - 9س^2 + 24س$ ، $س \in ح$

الحل: نجد $ق'(س) = 3س^2 - 18س + 24 = صفر \Leftarrow س^2 - 6س + 8 = 0$

$\Leftarrow (س-4)(س-2) = 0$ ومنها $س = 4$ أو $س = 2$

| إشارة ق(س) | +++ | | --- | | +++ |
|---|---|---|---|---|---|
| سلوك ق(س) | ↗ | 2 | ↘ | 4 | ↗ |

* النقط الحرجة هي:

$(2 ، ق(2)) = (2 ، 20)$ توجد هنا قيمة عظمى محلية.

$(4 ، ق(4)) = (4 ، 16)$ توجد قيمة صغرى محلية.

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب
00972598709519

ص١



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

أ. معتصم ريحان

س2 ص74

ب) ق(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$

الحل: أولاً نجد المجال ٤ − س² > صفر ⇐ س² = ٤ ⇐ س = ±٢

المجال

− − − | + + + | − − −

−٢ ، ٢

∴ س ∈ [−٢ ، ٢]

ق′(س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^٢}}$ = ٠ ⇐ −٢س = ٠ ⇐ $\boxed{س = ٠}$

ق′(س) غير موجودة عند أطراف الفترة $\boxed{س = -٢}$ ، $\boxed{س = ٢}$

سلوك ق(س)

إشارة ق′(س) | + + + + − − − −

−٢ ، صفر ، ٢

∴ (−٢ ، ق(−٢)) = (−٢ ، ٠) توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة

∴ (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٢) توجد قيمة عظمى محلية ولأنها وحيدة تعتبر مطلقة

∴ (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٠) توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة

أ. معتصم ريحان

س2 ص74

جـ) ق(س) = (س² − ٣) هـ^س ، س ∈ ح

الحل: ق′(س) = (س² − ٣) × هـ^س + هـ^س × (٢س) = صفر ← مشتقة قاعدة الضرب

⇐ هـ^س (س² − ٣ + ٢س) = صفر

هـ^س ≠ صفر ، س² + ٢س − ٣ = صفر

(س − ١)(س + ٣) = صفر

$\boxed{س = ١}$ أو $\boxed{س = -٣}$

إشارة ق′(س) | + + − − − − + +

سلوك ق(س) | ↗ −٣ ↘ ١ ↗

∴ (١ ، ق(١)) = (١ ، −٢هـ) توجد قيمة صغرى محلية

∴ (−٣ ، ق(−٣)) = (−٣ ، ٦هـ^−٣) توجد قيمة عظمى محلية

أ. معتصم ريحان

د) ق(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

أ. معتصم ريحان

أولاً حلل ق(س) = $\frac{\cancel{(س - ١)}(س^٢ + س + ١)}{\cancel{(س - ١)}}$ = س² + س + ١ ، س ≠ ١

ق′(س) = ٢س + ١ = صفر ، ق′(س) غير موجودة عند س = ١

س = −½

∴ (−½ ، ق(−½)) = (−½ ، ¾) صغرى محلية عند س = −½ وهي مطلقة أيضاً

ولا توجد قيم تصوى عند س = ١

إشارة ق′(س) | − − + + + +

سلوك ق(س) | ↘ −½ ↗ ١ ↗ ∞

ص2



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س2 ص74

هـ) ق(س) = جتا²س − جا²س ، س ∈ [٠، π]

الحل: حاول تبسط أو ترتب أولاً ق(س) = جتا²س − (١ − جتا²س)

⇐ ق(س) = −١ + ٢جتا²س ⇐ ق(س) = جتا٢س ، س ∈ [٠، π]

ق′(س) = −٢جا٢س = صفر ⇐ ٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ∉ ]٠، π[

⇐ أو ٢س = π ⇐ س = π/٢ ∈ ]٠، π[

أ. معتصم ريحان

ق′(س) غير موجودة عند أطراف الفترة س = ٠ ، س = π

∴ (π/٢ ، ق(π/٢)) = (π/٢ ، −١) توجد قيمة صغرى محلية

∴ (π ، ق(π)) = (π ، ١) توجد قيمة عظمى محلية

∴ (صفر ، ق(٠)) = (صفر ، ١) توجد قيمة عظمى محلية

| إشارة ق′(س) | | − − | | + + | |
|---|---|---|---|---|---|
| سلوك ق(س) | صفر | ↘ | π/٢ | ↗ | π |

حصص أونلاين خاصة

س2 ص74

و) ق(س) = هـ^{−(س−٢)²} ، س ∈ ح

ق′(س) = هـ^{−(س−٢)²} × −٢(س−٢) × (١) = صفر

الاقتران لا يساوي صفر

∴ −٢س + ٤ = ٠ ⇐ س = ٢

∴ (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ١) قيمة عظمى محلية ومطلقة

أ. معتصم ريحان

00972598709519

| إشارة ق′(س) | | + + | | − − | |
|---|---|---|---|---|---|
| سلوك ق(س) | ∞ | ↗ | ٢ | ↘ | ∞ |

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

حصص خاصة أونلاين

Zoom

ص3



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س٣ / ص٧٦

جد أكبر وأصغر قيمة «إن وجدت» لكل من الاقترانات الآتية :-

أ) $ق(س) = \begin{cases} س^٣ ، & ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^٢ + ٤ ، & ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، $س \in [٠ ، ٣]$

أ. معتصم ريحان

الحل: نبحث الاتصال عند نقطة التحول $\boxed{س = ٢}$ أولاً.

$\Leftarrow ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س) \Leftarrow ٨ = ٨ \Leftarrow \therefore ق(س)$ متصل عند $س = ٢$

ومتصل أيضاً على $[٠ ، ٣]$

الآن نبحث الاشتقاق $ق'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ ، & ٠ < س < ٢ \\ ٢س ، & ٢ < س < ٣ \end{cases}$

$ق'(٢)^+ = ق'(٢)^-$

$٢ \times ٢ = ٣ \times (٢)^٢$

$٤ \neq ١٢$

$\therefore ق'(٢)$ غير موجودة.

$ق'(س) = ٠$ عندما $٣س^٢ = ٠ \Leftarrow س = ٠ \notin ]٠ ، ٢[$ في الفترة الأولى $٠ < س < ٢$

$ق'(س) = ٠$ عندما $٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \notin ]٢ ، ٣[$ في الفترة الثانية $٢ < س < ٣$

وأيضاً $ق'(س)$ غ.م عند أطراف الفترة $\boxed{س = ٠}$ ، $\boxed{س = ٣}$

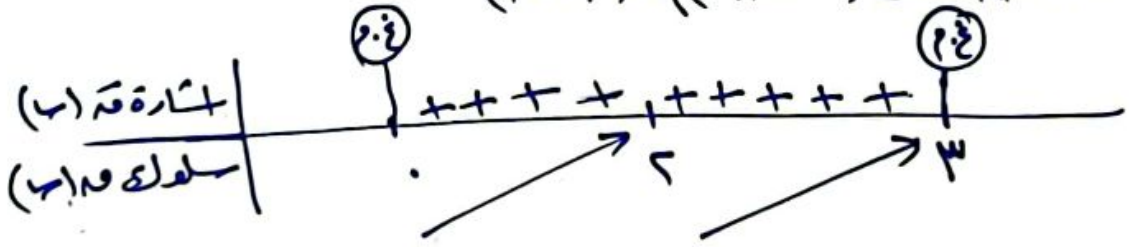
$\therefore$ النقط الحرجة عند $س = \{٠ ، ٢ ، ٣\}$

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

$ق(٠) = (٠)^٣ = ٠ \Leftarrow (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠)$

$ق(٣) = (٣)^٢ + ٤ = ١٣ \Leftarrow (٣ ، ق(٣)) = (٣ ، ١٣)$

| | غ.م | | غ.م |
|---|---|---|---|
| إشارة ق'(س) | + + + + | + + + + + | |
| سلوك ق(س) | ٠ ↗ | ٢ ↗ | ٣ |



$ق(٢) = ٨$

(٠ ، ٠) هي قيمة صغرى مطلقة لأنها أصغر قيمة.

(٣ ، ١٣) هي قيمة عظمى مطلقة لأنها أكبر قيمة.

عند $س = ٢$ لا يوجد قيم قصوى

حصص أونلاين خاصة وميزة Zoom

أ. معتصم ريحان

00972598709519

ص٦



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

3 س 74 ص 2021 ب

أ. معتصم ريحان

ق(س) = هـ^س − هـ س ، س ∈ [٠ ، ٣]

الحل: ق(س) متصل على [٠ ، ٣] ⟸ ق′(س) = هـ^س − هـ = ٠ ⟸ هـ^س = هـ^١

⟸ س = ١

عندما تتساوى الأساسات تتساوى الأسس

أ. معتصم ريحان

⟸ ق′(س) غير موجودة عند أطراف الفترة [٠ ، ٣] ∴ س = ٠ ، س = ٣

ق(٠) = هـ^٠ − هـ × ٠ = ١ ⟸ ∴ (٠ ، ١) هي قيمة عظمى محلية

ق(١) = هـ^١ − هـ × ١ = صفر ⟸ ∴ (١ ، صفر) هي قيمة صغرى مطلقة

ق(٣) = هـ^٣ − هـ × ٣ = هـ^٣ − ٣هـ ⟸ ∴ (٣ ، هـ^٣ − ٣هـ) هي قيمة عظمى مطلقة.

أ. معتصم ريحان

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة ق′(س) | | − − − − − | | + + + | | | | |
| سلوك ق(س) | ٠ | ↘ | ١ | ↗ | ٣ | | | |

صغرى محلية

عند س = ١ لا يوجد قيم قصوى

أ. معتصم ريحان

---

3 س 74 ص ج

ق(س) = جتاس − ١/٣ جتا^٣س ، س ∈ [π/٢ ، ٣π/٢]

الحل: ق(س) متصل على [π/٢ ، ٣π/٢] ⟸ ق′(س) = −جاس + جتا^٢س × جاس = ٠

⟸ ق′(س) = −جاس (١ − جتا^٢س) = ٠

⟸ ق′(س) = −جاس × (جا^٢س) = ٠ ⟸ −جا^٣س = ٠ ⟸ جاس = ٠

∴ س = π

⟸ ق′(س) غ.م عند س = π/٢ ، س = ٣π/٢ أطراف فترة.

س = صفر ∉ للفترة.

أ. معتصم ريحان

لإيجاد الإشارة فوق خط الأعداد نعوض في ق′(س)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة ق′(س) | | − − − − − | | + + + + + | | | | |
| سلوك ق(س) | π/٢ | ↘ | π | ↗ | ٣π/٢ | | | |

ق(π/٢) = جتا(π/٢) − ١/٣ (جتا π/٢)^٣ = صفر ∴ (π/٢ ، صفر) قيمة عظمى مطلقة

ق(π) = جتا(π) − ١/٣ (جتا π)^٣ = −٢/٣ ∴ (π ، −٢/٣) قيمة صغرى مطلقة

ق(٣π/٢) = جتا(٣π/٢) − ١/٣ (جتا ٣π/٢)^٣ = صفر ∴ (٣π/٢ ، صفر) قيمة عظمى مطلقة

أ. معتصم ريحان

ص 5



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س٦ / ص٦٩ اذا كانت $م(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١$ ، $أ، ب \in ح$

اقترن له قيمة عظمى محلية عند $س = ١$ ، وقيمة صغرى محلية عند $س = ٣$

ما قيمة كل من الثابتين $أ$ ، $ب$ .

الحل دائماً اذا قال لك السؤال يوجد قيمة قصوى سواء كانت عظمى أو صغرى عند $س = ...$

معناه أنه المشتقة عند هذا العدد يساوي صفر ∴ أ. مقدم ريحان

اذاً ⟸ $\boxed{م'(١) = صفر}$ وأيضاً $\boxed{م'(٣) = ٠}$

الآن نجد $م'(س)$ ثم نعوض مرة بواحد ومرة بثلاثة .

$م(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + ٩$

$م'(١) = ٣أ(١)^{٢} + ٢ب(١) + ٩$

$صفر = ٣أ + ٢ب + ٩$

$\boxed{-٩ = ٣أ + ٢ب}$ ①

$م'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + ٩$

$م'(٣) = ٣أ(٣)^{٢} + ٢ب(٣) + ٩$

$صفر = ٢٧أ + ٦ب + ٩$

$\boxed{-٩ = ٢٧أ + ٦ب}$ ②

نحل المعادلتين بالحذف

$-٩ = ٣أ + ٢ب$ × (-٣) ← اطرح

$-٩ = ٢٧أ + ٦ب$

$٩ + ٢٧أ + ٦ب = ٩ - ٩أ - ٦ب$

$١٨ = ١٨أ$

$\boxed{أ = ١}$ ⟸ $\boxed{ب = -٦}$

أ. مقدم ريحان

00972598709519

يمكن التواصل معه على الواتس فقط

Zoom دروس خاصة أونلاين

س٥ / ص٦٩ باستخدام القيم القصوى أثبت أن المقدار $٤س^{٣} - س^{٤} - ٢٩$ سالب دائماً

$م(س)$ متصل لماذا ؟ لأنه كثير حدود

$م'(س) = ١٢س^{٢} - ٤س^{٣} = ٠$

$٤س^{٢}(٣ - س) = ٠$

إما $\boxed{س = ٠}$ أو $\boxed{س = ٣}$

| $س$ | $-\infty$ | | ٠ | | ٣ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $م'(س)$ | + + + | | + + + | | | | - - - |
| سلوك $م(س)$ | | صفر | | | عظمى | | |

∴ $م(٣) = ٤(٣)^{٣} - (٣)^{٤} - ٢٩ = -٢$ ②

∴ $(٣، م(٣)) = (٣، -٢)$ توجد قيمة عظمى محلية مطلقة

∴ $م(س) \leq -٢$ لكل $س \in ح$ وهنا $م(س)$ سالب دائماً .

أ. مقدم ريحان

00972598709519

يمكن التواصل معه على الواتس فقط

Zoom دروس خاصة أونلاين



تم مسحه ضوئيا بـ CamScanner

السلام عليكم ورحمة الله

هذا التلخيص المميز جداً صدقة جارية عني وعن أهلي وأمواتي وجميع موتى المسلمين .

* هذا التلخيص موجود بالكامل فيديوهات مصورة وهي عبارة عن حصص خاصة مميزة على الزووم ، اذا أردت التسجيلات كاملة راسلني على الواتس 00972598 709519 أ. معتصم ريحان

* فيديوهات هذا التلخيص بنفس ترتيب التلخيص وهذا هو الشيء المميز جداً والذي لا يوجد في فلسطين مثله . بفضل الله .

* بعض هذه الفيديوهات موجودة بشكل عام للكل على قناتي على اليوتيوب بإسم (( معتصم ريحان رياضيات توجيهي )) وباقي الفيديوهات موجودة بروابط خاصة لمن يطلبها واتس .

* اعتمد بشكل كامل على هذا التلخيص وبإذن الله ستحصل على العلامة الكاملة .

* لا تنسى أن تتابعي صفحتي الرسمية على الفيس بوك وقناتي على اليوتيوب وكلاهما بإسم (( معتصم ريحان رياضيات توجيهي ))

* بشرى سارة لكل طلاب فلسطين هذا التلخيص شامل ومجاني بالكامل لكل طلاب فلسطين وبإمكانك ارساله لمن تحب لكن فيديوهات هذا التلخيص غير مجانية واذا أردت الحصول عليها راسلني واتس .

أ. معتصم بسام ريحان
00972598 709519

تابعني على مجموعات الواتس والتليجرام ضروري .



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

حصة رقم 34
توجيهي علمي 2022
أ. معتصم ريحان

# أسئلة امتحانات سابقة على درس القيم القصوى

**2008 س اكمال**

اذا كان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = جـ فإنّ إحدى العبارات الآتية صحيحة دائماً

(أ) ق(جـ) < صفر
(ب) قَ(جـ) = صفر
(جـ) قً(جـ) > صفر
(د) (جـ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س)

الخيار (أ) ليس صحيح دائماً لأنه ممكن تكون ق(جـ) > صفر وتكون صغرى محلية

الخيار (ب) ليس صحيح لأنه ممكن تكون قَ(جـ) غير موجودة وليست صفر وتكون عندها قيمة صغرى محلية

الخيار (جـ) ليس صحيح لأنه تكون قً(جـ) > صفر لازم تكون قَ(جـ) = صفر والسؤال لم يقل ذلك.

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

**2009 س**

اذا كان الاقتران ق(س) متصلاً على [0، 1] وكانت قَ(س) > صفر لجميع قيم س ∈ ]0، 1[ فإنّ إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً

(أ) لا يوجد للاقتران نقطة انعطاف في ]0، 1[
(ب) للاقتران ق(س) قيمة عظمى عند س = 0
(جـ) الاقتران مقعر للأعلى على [0، 1]
(د) للاقتران ق(س) قيمة عظمى عند س = 1

إشارة قَ(س)

+ + + + +

1 ⟶ 0

* التقعر يأتي من المشتقة الثانية

أ. معتصم ريحان

**2009 س اكمال**

إذا كان ق(س) = 2س³ − أس² وكان لمنحنى الاقتران ق(س) قيمة قصوى محلية عند س = 1 فإنّ قيمة أ

(أ) 2
(ب) −3
(جـ) 3
(د) −2

الحل: قَ(1) = صفر ← لأنه قال عند س = 1 في قيمة قصوى

قَ(س) = 6س² − 2أس
قَ(1) = 6(1)² − 2أ(1)
صفر = 6 − 2أ
−6 = −2أ
# 3 = أ

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب
حصص أون لاين خاصة zoom

صلى



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 2012 / اذا كان ق(س) معرف على ح وكانت ق'(س) = $\frac{س^2 + 2س}{(س+1)^2}$ فإن عدد النقط الحرجة للاقتران ق(س) يساوي

أ. معتصم ريحان

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

الحل ق'(س) = ٠ عندما البسط يساوي صفر

$س^2 + 2س = 0 \Leftarrow س(س+2) = 0$

$\Leftarrow$ س = ٠ أو س = -٢

وأيضاً ق' غ.م عندما المقام = صفر

$(س+1)^2 = 0$

س = -١

أ. معتصم ريحان

00972598709519

---

س 2013 / اذا كان ق(س) = [٢س - ٤] س ∈ [٠، ٢] فإن جميع قيم س التي تكون عندها نقطة حرجة للاقتران ق(س) هي

(أ) ٠، ٢ (ب) [٠، ٢] (ج) ]٠، ٢[ (د) ٠، ١، ٢

الحل أولاً نعيد تعريف الصحيح

طول الدرجة = $\frac{1}{2}$

٢س - ٤ = ٠

س = ٢

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس والبوتيه

ق(س) = [٢س - ٤] = $\begin{cases} -4 ، & 0 \le س < \frac{1}{2} \\ -3 ، & \frac{1}{2} \le س < 1 \\ -2 ، & 1 \le س < 1\frac{1}{2} \\ -1 ، & 1\frac{1}{2} \le س < 2 \\ صفر ، & س = 2 \end{cases}$ $\Leftarrow$ ق'(س) = $\begin{cases} 0 ، & 0 < س < \frac{1}{2} \\ 0 ، & \frac{1}{2} < س < 1 \\ 0 ، & 1 < س < 1\frac{1}{2} \\ 0 ، & 1\frac{1}{2} < س < 2 \end{cases}$

ق'(س) = ٠ عند كل الفترات ∴ الفترة [٠، ٢] هي كلها نقط حرجة

أ. معتصم ريحان

---

س 2017 / جامل تحل بنفسك

ليكن ق(س) = $\sqrt{6 - س^2}$ ، س ∈ [-٢، ١] فإن القيمة الصغرى المطلقة.

(أ) ق(١) (ب) ق(٠) (ج) ق(-١) (د) ق(-٢)

$\Leftarrow$ لاحظ هنا سأل عن القيمة ولم يسأل عن سين.

أ. معتصم ريحان

حصص أونلاين خاصة مميزة على الزووم

ص 2



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

2016 ثانوي / إذا كانت $م(س) = |س - 2| - 5$ ، $س \in [-2, 2]$

فإن القيمة المطلقة العظمى للاقتران $م(س)$ في مجاله هي

الحل أولاً نعيد تعريف المطلقة $س - 2 = 0 \Leftarrow س = 2$

(أ) 1 (ب) -1

(ج) -5 (د) 0

(هـ) -9

$$|س - 2| = \begin{cases} -(س-2) & ، س \leq 2 \\ س - 2 & ، س > 2 \end{cases}$$

هذه الفترة التي نريدها هي المجال المعطى $س \in [-2, 2]$

$$م(س) = \begin{cases} -س + 2 - 5 & ، -2 \leq س \leq 2 \\ -(س-2) - 5 & ، 2 < س \leq 2 \end{cases}$$

$$م(س) = \begin{cases} -س - 3 & ، -2 \leq س \leq 2 \\ -س - 3 & ، 2 < س \leq 2 \end{cases}$$

$$م'(س) = \begin{cases} -1 & ، -2 < س < 2 \end{cases}$$

$م'(س)$ غير معرف عندما $س = 2$ ، $س = -2$

∴ للاقتران $م(س)$ قيمة عظمى مطلقة عندما $س = -2$ وقيمتها $م(-2) = -1$

∴ $(-2, -1)$ قيمة عظمى مطلقة.

---

كامل الأسئلة / لتكن $م(س) = 2س^4 - س^2$ ، $س \in [-2, 2]$ فإن قيمة $س$ التي يكون عندها للاقتران $م(س)$ قيمة عظمى مطلقة هي

(أ) -2 (ب) صفر (ج) 1 (د) 2 (هـ) 2

الحل

$$م'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{2س^4 - س^2}}$$

$م'(س) = 0$ عندما البسط يساوي صفر

∴ $-2س = 0 \Leftarrow س = 0 \in ]-2, 2[$

$م'(س)$ غير معرف عندما المقام = صفر

$2\sqrt{2س^4 - س^2} = 0 \Leftarrow 2س^4 - س^2 = 0$

$\Leftarrow س = \pm 2 \notin ]-2, 2[$

يطلعك صفر والباقي راجعة.

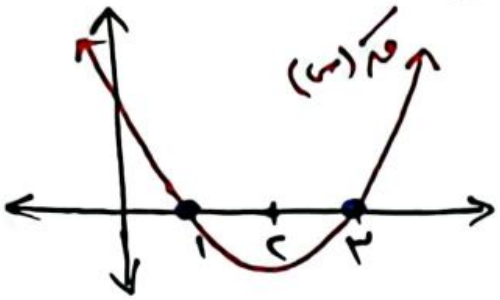
لاحظ هنا سؤال عن قيمة $س$ وليس قيمة $م$ وليس سؤال عن القيمة



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2020 س اختر

ما قيمة / قيم (س) التي يكون عندها للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية




(أ) ١ (ب) ٢

(ج) ٣ (د) ١ ، ٣

لاحظ أن الرسمة هي للاقتران المشتق (ق'(س))

ومنه الشكل المرسوم

+ + + | - - - | + + +

أعظمي ، ٣ ، صغرى

∴ القيمة الصغرى هي عند س = ٣

أ. معتصم ريحان

---

2020 س دور ثاني

اذا كان ق(س) = { س² + ١ ، -١ ≤ س < ٣ ؛ ٨ ، س = ٣ }

فما القيمة العظمى المطلقة للاقتران ق(س) إن وجدت

(أ) ٢ (ب) ٨

(ج) ١٠ (د) لا يوجد للاقتران قيمة عظمى مطلقة

الحل: نبحث الاتصال عند س = ٣

نها ق(س) = ق(٣)
س ← ٣

١٠ ≠ ٨

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٣ ⟸ ق'(٣) = غ.م

أ. معتصم ريحان
00972598709519

ق'(س) = { ٢س ، -١ < س < ٣ }

ق'(س) = ٠ ⟸ ٢س = ٠ ⟸ س = ٠

ق'(س) غير موجودة عند س = -١ ، س = ٣ لأنهم أطراف فترة.

ق(٣) = منفصل لأنه عندها الاقتران غير متصل

ق(-١) = (-١)² + ١ = ٢

نحسب النهاية عند س = ٣ من اليسار

نها ق(س) = ٣² + ١ = ١٠
س ← ٣

ق(٣) < نها ق(س)
س ← ٣

٨ < ١٠

| اشارة ق'(س) | - - - - - | + + + |
|---|---|---|
| سلوك ق(س) | -١ ، ٠ ، ٣ | |
| | أعظمي ، صغرى ، أعظمي | |

لا يوجد للاقتران قيمة عظمى مطلقة لكن يوجد عظمى محلية عند س = -١

لأنه النهاية أفسدت على س = ٣ فرحتها بالقيمة العظمى المطلقة.

(ص ٦)



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

ص ٢٥ س
دور ثاني

ليكن ق(س) ، هـ(س) اقترانين سالبين وقابلين للاشتقاق ومتناقصين على ح وكان ل(س) = (ق ∘ هـ(س))$^{٢}$ فإي العبارات التالية صحيحة دائماً على الاقتران ل(س) .

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

(أ) ل(س) متناقص على ح
(ب) ل(س) متزايد على ح
(جـ) لَ(س) ≥ صفر
(د) ل(س) اقتران ثابت .

الحل/ ل(س) = (ق ∘ هـ(س))$^{٢}$

⇐ ل(س) = (ق(هـ(س)))$^{٢}$

⇐ لَ(س) = ٢ (ق(هـ(س)) × قَ(هـ(س)) × هـَ(س))

⇐ لَ(س) = ٢ × (−) × (−) × (−) = (−)

∴ لَ(س) < صفر ∴ ل(س) متناقص على ح .

معطى من ق(س) سالب / السؤال هـ(س) سالب

ق(س) متناقص ∴ قَ(س) < ٠
هـ(س) متناقص ∴ هـَ(س) < ٠

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

ص ٢٥ س
دور ثاني

ليكن قَ(س) = ٦ (س+١) (س−٢)$^{٢}$ فإن لمنحنى الاقتران ق(س) قيمة

(أ) عظمى محلية عند س = −١
(ب) صغرى محلية عند س = −١
(جـ) عظمى محلية عند س = ٢
(د) صغرى محلية عند س = ٢

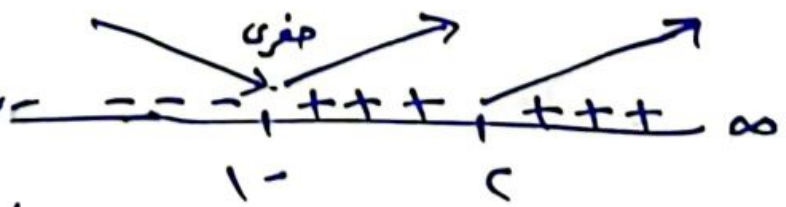
الحل/ قَ(س) = ٦ (س+١) (س−٢)$^{٢}$ = صفر

إما س+١ = ٠ أو (س−٢)$^{٢}$ = ٠

س = −١ أو س = ٢

أ. معتصم ريحان
حصص أونلاين خاصة مميزة

∴ للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = −١




لاحظ لا يوجد عند س = ٢ قيم قصوى

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

ص ٥



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

**تجريبي القدس** ق ق

اذا كان ق(س) كثير حدود ، قَ(١) = صفر ، قً(١) × قً(٢) > صفر
قً(٢) > صفر فإنّ ق(١) قيمة

(أ) عظمى محلية (ب) صغرى محلية (جـ) عظمى مطلقة (د) صغرى مطلقة .

**الحل** بما أن قً(٢) > صفر ∴ قً(٢) موجب

معطى أيضاً أن قً(١) × قً(٢) > صفر

نستنتج أن (لازم قً(١) يكون) ⊕ × ⊕ > صفر

معطى أنّ قَ(١) = صفر و قً(١) > صفر

نستنتج منها أنه ق(١) قيمة صغرى محلية

هذه قاعدة نعرف من خلالها العظمى والصغرى عن طريق المشتقة الثانية وهي عكسية

**قاعدة** قً(١) > صفر ∴ ق(١) صغرى
ولو كان قً(١) < صفر ∴ ق(١) عظمى

---

**تجريبي قلقيلية** ق ق

اذا كان ق(س) = جا π س ، س ∈ [-١ ، ١] فإنه أكبر قيمة للاقتران ق(س)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{\pi}{2}$

(١ ، ٠)
(٠ ، ١-) | (٠ ، ١)
(١- ، ٠)

**الحل** قَ(س) = جتا π س × π = صفر

جتا π س = صفر

ما هي الزاوية التي جتا لها يساوي صفر

π س = ٩٠ ، π س = ٢٧٠

س = $\frac{1}{2}$ ، س = $\frac{3}{2}$ مرفوضة

∈ ]-١ ، ١[ ∉ [-١ ، ١]

(*) النقطة الحرجة وقيمها

ق($\frac{1}{2}$) = جا π × $\frac{1}{2}$ = ١ أكبر قيمة للاقتران

ق(١) = جا π × ١ = صفر صغرى مطلقة

ق(-١) = جا π × -١ = صفر صغرى مطلقة

إشارة قَ(س) + + + − − −

سلوك ق(س) -١ ↗ $\frac{1}{2}$ ↘ ١

(ص ٦)



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

2022 الدورة الاستكمالية / اذا كانت لمنحنى م(س) = ٢س^٣ + أ س^٢ تمتلك حرجة محلية عندما س = ١ فما قيمة أ

أ) -٣ ب) -٢ ج) ٢ د) ٣

الحل: م'(١) = صفر ← استنتج القاعدة وعوض.

م'(س) = ٦س^٢ + ٢أس

م'(١) = ٦(١)^٢ + ٢أ(١) = صفر

٢أ = -٦ ⇐ أ = -٣

---

2021 دور ثاني / اذا كانت م(س) = س هـ^س فماذا يكون للاقتران م(س)

أ) قيمة عظمى محلية عندما س = ١

ب) قيمة حرجة محلية عندما س = ١

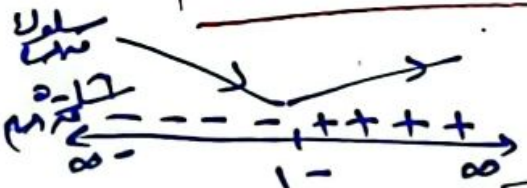
ج) قيمة عظمى محلية عندما س = -١

د) قيمة حرجة محلية عندما س = -١

الحل: م'(س) = س × هـ^س + هـ^س × ١ = صفر

هـ^س (س + ١) = ٠

لا يساوي صفر ← هـ^س ≠ صفر ⇐ س + ١ = ٠ ⇐ س = -١




أ. معتصم رحايل 0097259870951

---

2019 تجريبي ملحق / إذا كانت م(س) = أ س^٣ - ب س^٢ وكان م(١) = -١ وكان للاقتران م أ، ب على الترتيب

أ) ٣، ٢ ب) ٢، ٢ ج) ١، ٣ د) ١، -١

صفر للاقتران م(١) = -١

م'(١) = ٠ ← ٣أ(١)^٢ - ٢ب(١)

-١ = أ - ب ... (١)

م'(س) = ٣أس^٢ - ٢ب س

م'(١) = ٣أ(١)^٢ - ٢ب(١)

صفر = ٣أ - ٢ب ... (٢)

نحل معادلة (١) مع (٢) بالحذف

نضربها في -٣ ← -١ = أ - ب

صفر = ٣أ - ٢ب

٣ = -٣أ + ٣ب

صفر = ٣أ - ٢ب

٣ = ب

الآن نعوض لإيجاد أ

-١ = أ - ٣

أ = ٢

أ. معتصم رحايل

تابعنا على الفيس والبوتيوب



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2019 تجريبي تام الله

إذا كانت $م(س) = \begin{cases} س^2 - 2س & ، س \geq 2 \text{ أو } س < -2 \\ 1 & ، س = -2 \end{cases}$ فكون على الفترة $[-2, 2]$ فإنه إحدى العبارات الآتية صحيحة :-

أ) $م(-2)$ عظمى محلية
ب) $م(1)$ عظمى محلية
ج) $م(0)$ عظمى محلية
د) $م(2)$ عظمى محلية.

أ. معتصم ريحان
00972598709519

الحل الاقتران $م(س)$ غير متصل عند $س = 2$

$م(س) = \begin{cases} 2س & ، س < 2 \\ س^2 & ، س \geq 2 \end{cases}$

$م(س)$ مساوي صفر $\Leftarrow$ $س < 2$

$\Leftarrow 2س = 0 \Leftarrow س = 0$

سلوك $م(س)$

إشارة $م'(س)$ : $---$ | $+++$ | $+++$ عند $-2$ و $0$ و $2$

$م(-2)$ عظمى

$م(-2)$ عظمى محلية بما أنه متناقص

$\therefore م(2) < \text{نهاية } م(س)$ عند $س \to 2^-$

$\therefore 1 < 4$

لاحظ $م(2) = 1$

نهاية $م(س) = 2^2 = 4$ عند $س \to 2^-$

أ. معتصم ريحان
00972598709519
تابعني على الفيس والبوستوب

فحص أوله كاينة خطة فيزة.

---

2019 تجريبي الوسطى

إذا كانت $م(س) = |س - 2| - 5$ ، $س \in ح$ فما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران

أ) $-5$ ب) $-2$ ج) صفر د) $5$

أ. معتصم ريحان

الحل أولاً نجد تعريف المطلق $س - 2 = 0 \Leftarrow س = 2$

$+++$ | $---$ عند $2$

$|س - 2| = \begin{cases} س - 2 & ، س \geq 2 \\ 2 - س & ، س < 2 \end{cases}$

$م(س) = \begin{cases} س - 8 & ، س \geq 2 \\ -س - 2 & ، س < 2 \end{cases}$

$قـ(س) = \begin{cases} 1 & ، س \geq 2 \\ -1 & ، س < 2 \end{cases}$

الآن مساوي $قـ(س)$ صفر

$ص \neq 1$

$ص \neq -1$

$\therefore$ غير معرف عند $س = 2$ : $قـ(2^+) \neq قـ(2^-)$

$---$ | $+++$ عند $-3$ و $\infty$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $س = 3$ وتساوي

$م(2) = -5$ $\neq$ صفر



Camscanner الوجه صوتيا بـ

الحصة رقم 35
توجيهي علمي 2022
أ. معتصم ريحان
00972598709519

# ((أسئلة مقالية)) أسئلة امتحانات سابقة
## ((على درس القيم القصوى))

**س11 ص2** جد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س) = \frac{س+1}{س^2+3}$

لاحظ المجال كل ح لأنه المقام لا يمكن يكون صفر

**الحل** $ق'(س) = \frac{(س^2+3)\times(1) - (س+1)\times(2س)}{(س^2+3)^2} = صفر$

* نساوي البسط بصفر $\Leftarrow (س^2+3) - (س+1)\,2س = صفر$

$\Leftarrow س^2+3-2س^2-2س = صفر \Leftarrow -س^2-2س+3=0$

$\Leftarrow س^2+2س-3=0 \Leftarrow (س+3)(س-1)=0 \Leftarrow \boxed{س=-3}$ أو $\boxed{س=1}$

* نساوي المقام بصفر $\Leftarrow (س^2+3)^2 = صفر \Leftarrow س^2+3 = صفر$

$\Leftarrow س^2 = -3$ لا يمكن حلها في ح / مستحيل ايجاد الجذر

سلوك ق(س)

إشارة ق'(س) $- - - \;|\; + + + \;|\; - - -$ ($-3$ ، $1$)

∴ ق(س) متناقص $]-\infty ، -3] \cup [1 ، \infty[$

∴ ق(س) متزايد $[-3 ، 1]$

عند س = −3 يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها $ق(-3) = \frac{-3+1}{(-3)^2+3} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$

عند س = 1 يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها $ق(1) = \frac{1+1}{(1)^2+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

أ. معتصم ريحان 00972598709519

---

**س19 ص2** تجريبي سلفيت

اذا كان للاقتران $ق(س) = س^3 - 3س^2 + جـ$ قيمة صغرى محلية قيمتها 2 فما قيمة الثابت جـ

(أ) صفر (ب) 6 (ج) −4 (د) 2

القيمة الصغرى طلعت عند س = 2

**الحل** $ق'(س) = 3س^2 - 6س = صفر$

$س(3س - 6) = صفر$

$\boxed{س = صفر}$ $\boxed{س = 2}$

∴ $ق'(2) = صفر$

$ق(2) = 2$

$\Leftarrow ق(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + جـ = 2$

$8 - 12 + جـ = 2$

$\boxed{جـ = 6}$ #

أ. معتصم ريحان

$+ + + \;|\; - - - \;|\; + +$ (صفر عظمى ، 2 صغرى)

(ص1)



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

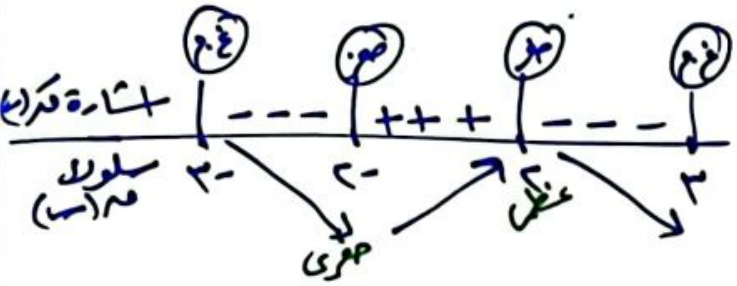
2017 دور ثاني

اذا كانت $م(س) = ٤س - \frac{١}{٣}س^٣$ ، $[-٣، ٣]$ أوجد

① النقط الحرجة.
② فترات التزايد والتناقص
③ القيم القصوى المطلقة للاقتران $م(س)$.

الحل $م'(س) = ٤ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow (س = \pm ٢) \in [-٣، ٣]$

① النقط الحرجة هي عندما $س = \{-٣، -٢، ٢، ٣\}$




$م(-٣) = ٤(-٣) - \frac{١}{٣}(-٣)^٣ = -٣$

$م(-٢) = ٤(-٢) - \frac{١}{٣}(-٢)^٣ = -\frac{١٦}{٣}$

$م(٢) = ٤(٢) - \frac{١}{٣}(٢)^٣ = \frac{١٦}{٣}$

$م(٣) = ٤(٣) - \frac{١}{٣}(٣)^٣ = ٣$

∴ النقط الحرجة هي

$(-٣، -٣)$ نقطة حرجة ويوجد عندها قيمة عظمى محلية

$(-٢، -\frac{١٦}{٣})$ نقطة حرجة ويوجد عندها قيمة صغرى محلية وهي مطلقة أيضاً (أصغر قيمة)

$(٢، \frac{١٦}{٣})$ نقطة حرجة ويوجد عندها قيمة عظمى محلية وهي مطلقة أيضاً (أكبر قيمة)

$(٣، ٣)$ نقطة حرجة ويوجد عندها قيمة صغرى

② الاقتران $م(س)$ متناقص $[-٣، -٢] \cup [٢، ٣]$

الاقتران $م(س)$ متزايد $[-٢، ٢]$

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس والبوتيوب

2019 تجريبي القدس

أكبر قيمة للاقتران $م(س) = س^٣ - ٣س + ١$ ، $س \in [٠، ٣]$ هي

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٣
ج) صفر د) $-١$

حاول أنه تحل بنفسك يا بطل

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس والبوتيوب
فيها أدلة لأنه حاضر ومميزة على الزووم


CamScanner

2020 س / اذا كانه م(س) = ٦ س^{-١} - ٣ س^{٢} أوجد :

① مجالات التزايد والتناقص للإقتران م(س)

② القيم القصوى المحلية ، وحدد المطلقة منها إنه وجدت .

أ. معتصم ريحان

الحل م'(س) = ٦ × (-١) س^{-٢} - ٣ × ٢ س = ص'

⇐ ٣ س^{٢} = ٣ ⇐ س^{٢} = ١ ربع الطرفين

⇐ س = ١ ⇐ س = ١

لاحظ أن مجال م(س) هو ح ، ح ≠ صفر

الاقتران م(س) متزايد [صفر ، ١]

الاقتران م(س) متناقص [١ ، ∞[

إشارة م'(س)

+ + + + | - - - - -

صفر ١ ∞

سلوك م(س)

نفرض ن م'(س) لايجاد الاشارات فوق خط الاعداد .

أ. معتصم ريحان

للاقتران م(س) قيمة حرجة عندما س = صفر

وقيمتها م(٠) = صفر

للاقتران م(س) قيمة عظمى محلية ومطلقة عندما س = ١ وقيمتها م(١) = ٣

لاحظ أنه لا يوجد في السؤال قيمة حرجة مطلقة لأنه اما لا نهاية وطلبت على القيمة الحرجة . أ. معتصم ريحان

دور ثاني 2020 س / اذا كانه م(س) = ١/٣ س^{٣} - س^{٢} - ٢ س + ٤ أوجد ① مجالات التزايد والتناقص ② القيم القصوى المحلية انه وجدت .

الحل م'(س) = س^{٢} - ٢ س - ٢ = ٠

(س - ٢)(س + ١) = ٠

س = ٢ أو س = -١

إشارة م'(س)

+ + + + | - - - - | + + + +

-∞ -١ ٢ ∞

سلوك م(س)

م(س) متزايد ]-∞ ، -١] ∪ [٢ ، ∞[

م(س) متناقص [-١ ، ٢]

للاقتران م(س) قيمة قصوى عظمى محلية عندما س = -١ وقيمتها م(-١) = ٥/٣

للاقتران م(س) قيمة قصوى صغرى محلية عندما س = ٢ وقيمتها م(٢) = -٥

لاحظ لا يوجد قيم قصوى عظمى او صغرى مطلقة في السؤال لأنه اما لا نهاية وطلبت على القيمة

ص

أ. معتصم ريحان

حصص أونلاين خاصة مميزة

٠٠٩٧٢٥٩٨٧٠٩٥١٩



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2021 / اذا كان $ق(س) = ه^{س} - ه^{-س}$ فما هي أصغر قيمة للاقتران $ق(س)$ في الفترة $[0، 3]$

**قاعدة** إذا تساوت المسافات تتساوى الأسس

الحل $ق(س) = ه^{س} - ه^{-س} = صفر$

$\Leftarrow ه^{س} = ه^{-س} \Leftarrow$ **س = 1**

أصغر قيمة للاقتران $ق(س)$ هي عند $س = 1$

وقيمتها $ق(1) = ه^{1} - ه^{-1} = صفر$

**ق(1) = صفر** قيمة صغرى محلية ومطلقة

إشارة $ق'(س)$: $---$ (0) $---$ (1) $+++$ (3) $+++$

سلوك $ق(س)$: ↓ معكوس ↑

أ. معتصم ريحان تابعنا على الفيس واليوتيوب

---

2021 / اذا كان $ق(س) = س^{3} - 6س^{2} - 15س$ ، $س \in [-2، 6]$

أوجد ① فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$

② القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران $ق(س)$ إن وجدت.

الحل $ق'(س) = 3س^{2} - 12س - 15 = صفر \Leftarrow س^{2} - 4س - 5 = صفر$

$\Leftarrow (س - 5)(س + 1) = صفر \Leftarrow$ **س = 5** أو **س = -1**

أ. معتصم ريحان

الاقتران $ق(س)$ تزايد $[-2، -1] \cup [5، 6]$

الاقتران $ق(س)$ تناقص $[-1، 5]$

إشارة $ق'(س)$: $+++$ (-2) $---$ (-1) $---$ (5) $+++$ (6)

سلوك $ق(س)$: ↑ معكوس ↓ معكوس ↑

للاقتران $ق(س)$ قيمة قصوى صغرى عندما $س = -2$ وقيمتها $ق(-2) = -2$

للاقتران $ق(س)$ قيمة قصوى عظمى محلية ومطلقة عندما $س = -1$ وقيمتها $ق(-1) = 8$

للاقتران $ق(س)$ قيمة قصوى صغرى محلية ومطلقة عندما $س = 5$ وقيمتها $ق(5) = -100$

للاقتران $ق(س)$ قيمة قصوى عظمى عندما $س = 6$ وقيمتها $ق(6) = -90$

أ. معتصم ريحان 00972598709519

---

2019 / اذا كان $ق(س)$ اقتراناً معرفاً في $[-1، 1]$ وكان $ق(1) = 2$ ، $\lim_{س \to 1^{-}} ق(س) = 1$

حاول أن تحل بنفسك فما العبارة الصحيحة فيما يأتي :-

أ) $ق(1)$ قيمة صغرى محلية

ب) $ق(1)$ قيمة صغرى مطلقة

ج) $ق(1)$ قيمة عظمى محلية

د) $ق(1) = صفر$

أ. معتصم ريحان متفوق أدبه لا يسمح بالغش متميز على الزوم 00972598709519



Camscanner

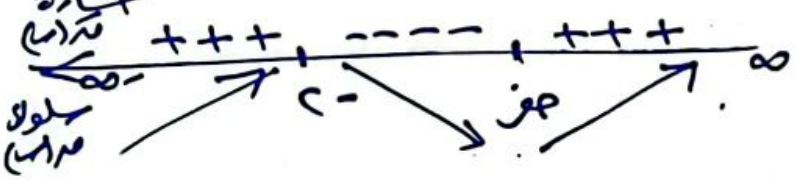
**س2022** اذا كان ق(س) = −٢أ س$^{٣}$ + ٦س$^{٢}$ + ك حيث أ، ك ∈ ح
وكان لمنحنى ق(س) قيمة صغرى محلية وأخرى مطلقة محلية احداهما تكون عند (س = −٢) فأوجد: ① قيم الثابت أ.
② قيم الثابت ك علماً بأن مجموع القيمتين العظمى والصغرى يساوي −١٢

**الحل** ق′(س) = −٦أ س$^{٢}$ + ١٢س = صفر ⟸ أ س$^{٢}$ − ٢س = صفر
⟸ س (أ س − ٢) = صفر ⟸ $\boxed{\text{س = صفر}}$ أو $\boxed{\text{س} = \frac{٢}{\text{أ}}}$

بما أنه قال في السؤال احدى القيم القصوى تساوي (−٢)
∴ $\frac{٢}{\text{أ}}$ = −٢ ⟸ −٢أ = ٢ ⟸ $\boxed{\text{أ} = -١}$ #

أ. معتصم ريحان

* يوجد قيمة صغرى محلية عند س = صفر
وقيمتها ق(٠) = ك القيمة الصغرى



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| اشارة ق′(س) | + + + | − − − − | + + + | | |
| سلوك ق(س) | ↗ | −٢ ↘ | صفر | ↗ | ∞ |

* يوجد قيمة عظمى محلية عند س = −٢
وقيمتها ق(−٢) = −٢أ(−٢)$^{٣}$ + ٦(−٢)$^{٢}$ + ك = ١٦أ + ٢٤ + ك القيمة العظمى

* معطى في السؤال أن مجموع القيمتين العظمى والصغرى يساوي (−١٢)
∴ ك + ١٦أ + ٢٤ + ك = −١٢
٢ك + ١٦أ = −١٢ − ٢٤ ⟸ ٢ك + ١٦أ = −٣٦
⟸ $\boxed{\text{ك} + ٨\text{أ} = -١٨}$ ①
⟸ ك + ٨ × (−١) = −١٨
ك = −١٨ + ٨ = $\boxed{-١٠}$ #

أ. معتصم ريحان
توجيهي على 2022
تابعني على الفيس واليوتيوب

**خارجي** اثبت أن ق(س) = س$^{٤}$ − ٤س$^{٣}$ + ٣٠ موجب دائماً
حاول أن تحل بنفسك

أ. معتصم ريحان

ص


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

2021 س دور ثاني

إذا كان $ق(س) = \frac{س^2+3}{س-1}$ ، $س \neq 1$ . فأوجد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س)$ .

لاحظ أن $س = 1$ لا تنتمي للمجال

أ. معتصم ريحان

الحل

$ق'(س) = \frac{(س-1)\times(2س) - (س^2+3)\times(1)}{(س-1)^2} = صفر$

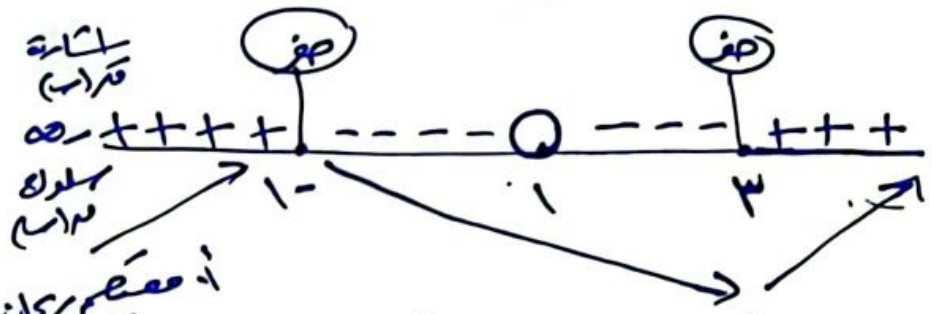
$ق'(س) = \frac{2س^2 - 2س - س^2 - 3}{(س-1)^2} = صفر \Leftarrow \frac{س^2 - 2س - 3}{(س-1)^2} = صفر$

نساوي البسط بصفر $\Leftarrow س^2 - 2س - 3 = 0 \Leftarrow (س-3)(س+1) = صفر$

$\Leftarrow س = 3$ أو $س = -1$

نساوي المقام بصفر $(س-1)^2 = صفر \Leftarrow \boxed{س = 1} \notin$ المجال $ق(س)$

أ. معتصم ريحان




$ق(-1) = -2$ عظمى محلية

$ق(3) = 6$ صغرى محلية

لا يوجد قيم مطلقة للاقتران $ق(س)$ لأن المالانهاية عطلت عملها.

2020 س تجريبي الوسطى

جد أكبر وأصغر قيمة للاقتران $ق(س) = جا^2س + جتاس$ ، $س \in [0, \pi]$

$ق'(س) = 2(جاس) \times جتاس - جاس = 0$

$ق'(س) = جاس(2جتاس - 1) = صفر$

$\boxed{جاس = 0}$ أو $2جتاس - 1 = صفر$

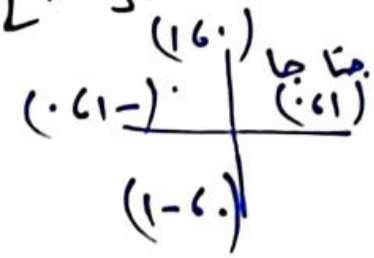
$\boxed{جتاس = \frac{1}{2}}$

$\therefore س = صفر \notin ]0, \pi[$

$س = 180 \notin ]0, \pi[$

$س = 60$

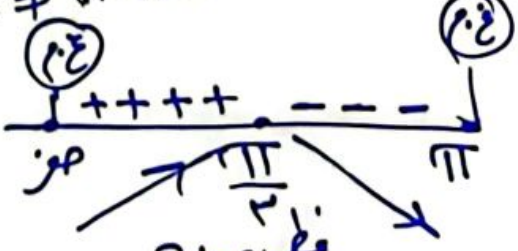
$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{180} \times 60 \in ]0, \pi[$




أكبر قيمة للاقتران هي عند $س = \frac{\pi}{3}$ وقيمتها $ق(\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{4}$

وأصغر قيمة للاقتران هي عند $س = \pi$ وقيمتها $ق(\pi) = -1$

يوجد قيمة صغرى عند $س = صفر$ وقيمتها $ق(صفر) = 1$




أ. معتصم ريحان



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

2020 تجريبي شماة غزة

اذا كانت $ق(س) = س(٢-س)^{٣}$ ، $س \in [-٢ ، ٣]$

جد ما يلي ① فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

② القيم القصوى المحلية مبيناً نوعها

الحل: ق(س) متصل وقابل للاشتقاق لأنه كثير حدود

$ق'(س) = س \times -٣(٢-س)^{٢} + (٢-س)^{٣}$

$ق'(س) = -٣س(٢-س)^{٢} + (٢-س)^{٣} = صفر$

$(٢-س)^{٢} \times (-٣س + (٢-س)) = صفر$

$(٢-س)^{٢} \times (-٤س + ٢) = صفر$

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونه لاينه مميزة

إما $(٢-س)^{٢} = صفر$ أو $-٤س + ٢ = صفر$

$٢ - س = ٠$ أو $-٤س = -٢$

$س = ٢$ ، $س = \frac{١}{٢}$

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

ق(س) متزايد $[-٢ ، \frac{١}{٢}]$

متناقص $[\frac{١}{٢} ، ٣]$

يوجد قيمة صغرى محلية عند س = -٢ وقيمتها ق(-٢) = -١٢٨ وهي مطلقة.

يوجد قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{١}{٢}$ وقيمتها ق($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٢٧}{٢٦}$ وهي مطلقة أيضاً

يوجد قيمة صغرى محلية عند س = ٣ وقيمتها ق(٣) = -٣

لاحظ عند س = ٢ لا يوجد قيم قصوى لأن الاقتران لم يغير من سلوكه عندها.



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

**خارجي** اذا كان ق(س) كثير حدود معرف على ح وله قيمة عظمى محلية عند س = أ وقيمة صغرى محلية عند س = ب ، وبتطبيق نظرية رول على ق'(س) ، فأثبت وجود جـ ∈ ]أ ، ب[ بحيث ق''(جـ) = صفر

**الحل** ق'(أ) = صفر لأنه عند أ يوجد قيمة عظمى محلية
ق'(ب) = صفر لأنه عند ب يوجد قيمة صغرى محلية.

استتبع القاعدة تاعوض

الآن نطبق شروط رول الثلاثة :

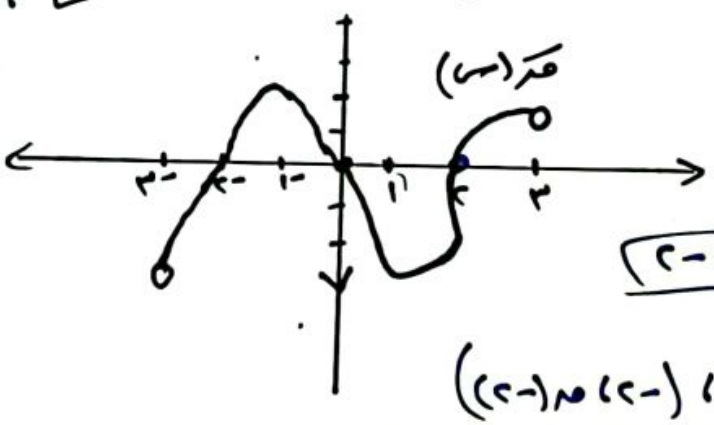
① ق'(س) متصل على [أ ، ب] لأنه كثير حدود.
② ق'(س) قابل للاشتقاق على ]أ ، ب[ لأنه كثير حدود.
③ ق'(أ) = ق'(ب)

∴ يوجد جـ ∈ ]أ ، ب[ بحيث أنه ق''(جـ) = صفر

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب
حصص خاصة أونه لاينه مميزة.

---

**خارجي** يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق المتصل على [-٣ ، ٣] فجد



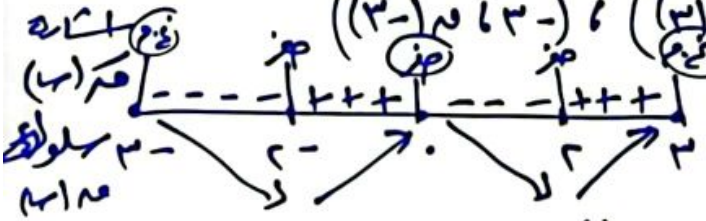

① النقط الحرجة للاقتران ق(س)
② فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)
③ القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س)

**الحل** ① من الرسم عند س = ٢ ، س = ٠ ، س = -٢
المشتقة الأولى تساوي صفر

∴ النقط الحرجة هي (٢ ، ق(٢)) ، (٠ ، ق(٠)) ، (-٢ ، ق(-٢))

ومن الرسم أطراف الفترة عند س = ٣ ، س = -٣ والمشتقة عندهم غير موجودة.

∴ النقط الحرجة بسبب أنها غ.م هي (٣ ، ق(٣)) ، (-٣ ، ق(-٣))




② من خط الأعداد المجاور ⟸
ق(س) متزايد [-٢ ، ٠] ، [٢ ، ٣]
ق(س) متناقص [-٣ ، -٢] ، [٠ ، ٢]

أ. معتصم ريحان

③ للاقتران ق(س) قيمة قصوى عظمى محلية عند س = -٣ وقيمتها ق(-٣)
للاقتران ق(س) " " عظمى محلية عند س = صفر وقيمتها ق(٠)
للاقتران ق(س) " " صغرى محلية عند س = -٢ وقيمتها ق(-٢)
للاقتران ق(س) " " صغرى محلية عند س = ٢ وقيمتها ق(٢)

أ. معتصم ريحان تابعني على الفيس واليوتيوب
0897259870951 9


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران م(س) = ٢ جاس جتاس في [٠، ٢π]

الحل م(س) = $\frac{٣}{٢}$ × ٢ جاس جتاس ← لا متطابقة

∴ م(س) = $\frac{٣}{٢}$ × جا٢س

⇐ م'(س) = $\frac{٣}{٢}$ × جتا٢س × ٢

⇐ م'(س) = ٣ جتا٢س

⇐ م''(س) = ٣ × -جا٢س × ٢

⇐ م''(س) = -٦ جا٢س = صفر ⇐ جا٢س = صفر

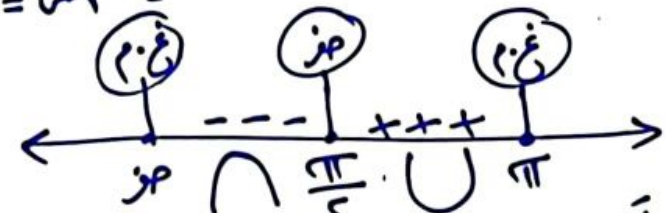
٢س = صفر ⇐ س = ٠

٢س = π ⇐ س = $\frac{π}{٢}$

٢س = ٢π ⇐ س = π

مقعر للأسفل في [٠، $\frac{π}{٢}$]

مقعر للأعلى في [$\frac{π}{٢}$، π]




فرضنا المقدار ر ≠ ٠ عادي لا يساوي صفر

أ. مقصح ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة

00972598709519

أ. مقصح ريحان تابعنا على الفيس واليوتيوب

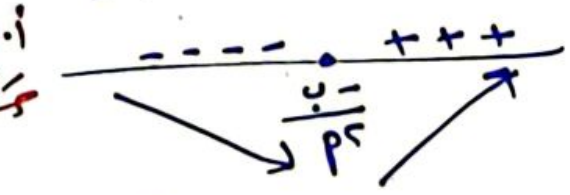
خارجي مهم اذا كان م(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية ويمر منحناه بنقطة الأصل ويحقق الاقتران شروط نظرية رول على الفترة [٠، ٤] اذا كانت العمق الصغرى للاقتران في هذه الفترة يساوي -٤ فجد قاعدة الاقتران م(س)

الحل م(س) = ٢س + ب س + جـ ← فرضنا الاقتران كثير حدود من الدرجة الثانية بصورة عامة

م'(س) = ٢٢س + ب = ٠

⇐ س = $\frac{-ب}{٢٢}$

قال في السؤال أنه للاقتران نهاية صغرى




م(س) يحقق رول ∴ الثلاث شروط تتحقق

ومنها م(٠) = م(٤) ← الشرط الثالث لرول

٠ = ١٦٢ + ٤ب + جـ

جـ = -١٦٢ - ٤ب

صفر = ١٦٢ + ٤ب

صفر = ٢ + ٤ب

صفر = ب(ب + ٤) ⇐ ب = ٠ مرفوضة ، ب = -٤

نرجع نعوض لنجد قيمة ٢

م($\frac{-ب}{٢٢}$) = ٢($\frac{-ب}{٢٢}$)$^{٢}$ + ب($\frac{-ب}{٢٢}$) + جـ

$\frac{١٦٢}{١٦}$ = $\frac{ب^{٢}}{١٦}$ - $\frac{ب^{٢}}{٢٢}$ = -٤ ⇐ ٢ = ١

ب$^{٢}$ = ١٦٢ ← (١)

م(س) = س$^{٢}$ - ٤س

قال في السؤال أنه م(س) يمر (٠،٠) ∴ جـ = صفر

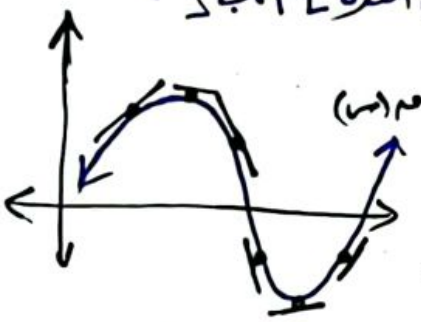


ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حصة رقم 36
توجيهي علمي 2022
أ. معتصم ريحان

# الدرس الرابع: التقعر ونقط الانعطاف

* تعريف: يقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعر للأعلى في الفترة [أ، ب] ، إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في الفترة ]أ، ب[ وأنه مقعر للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في الفترة ]أ، ب[ .




* اختبار التقعر باستخدام المشتقة الثانية:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة ]أ، ب[ ، وكان قً(س) معرفاً في الفترة ]أ، ب[ فإن منحنى ق(س) يكون:

1. مقعراً للأعلى في الفترة ]أ، ب[ ، إذا كانت قً(س) > صفر لجميع قيم س ∈ ]أ، ب[ .
2. مقعراً للأسفل في الفترة ]أ، ب[ ، إذا كانت قً(س) < صفر لجميع قيم س ∈ ]أ، ب[ .
3. غير مقعر للأعلى أو للأسفل في الفترة ]أ، ب[ إذا كانت قً(س) = صفر لجميع قيم س ∈ ]أ، ب[

* سيتم التعامل مع الفترات مفتوحة.

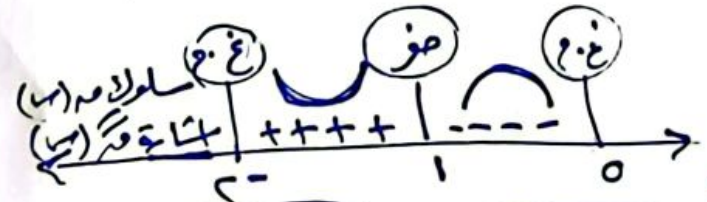
أ. معتصم ريحان

---

مثال 1 ص 76: جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س² − س³ ، س ∈ ]−٢، ٥[

الحل: ق(س) متصل على ]−٢، ٥[ لأنه كثير حدود

قَ(س) = ٦س − ٣س² ⟸ قً(س) = ٦ − ٦س = صفر ⟸ س = ١




منحنى ق(س) مقعر للأعلى في الفترة ]−٢، ١[

منحنى ق(س) مقعر للأسفل في الفترة ]١، ٥[

أ. معتصم ريحان تابعني على الفيس واليوتيوب

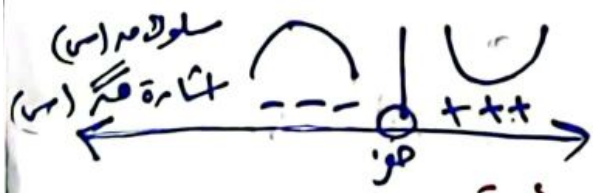
---

مثال 2 ص 76: جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) = (س² + ١)/س ، س ≠ ٠

ق(س) متصل على مجاله

الحل: ق(س) = س + ١/س ⟸ قَ(س) = ١ − ١/س²

⟸ قً(س) = ٢/س³ ≠ ٠




منحنى ق(س) مقعراً للأسفل في الفترة ]−∞، ٠[

منحنى ق(س) مقعراً للأعلى في الفترة ]٠، ∞[

* حصص خاصة أونلاين.

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال (3) ص 76 / الحل

اثبت أن منحنى الاقتران م(س) = لو جتاس ، س ∈ ]٠ ، π/٣[ مقعر للأسفل.

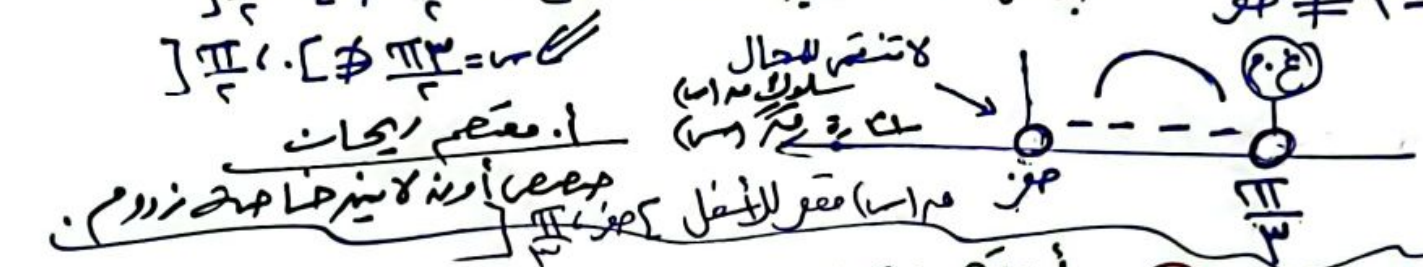
م(س) متصل في ]٠ ، π/٣[ لأن الجتا في الربع الأول موجب

فبالتالي سيكون ما داخل اللوغاريتم موجب

م(س) = لو جتاس ⇐ م'(س) = −ظاس ⇐ م''(س) = −قا²س = −١/جتا²س

جتاس = ٠ ⇐ جتاس = ١ ⇐ س = ٠ ∉ ]٠ ، π/٣[

س = π/٢ ∉ ]٠ ، π/٣[




∴ معقم ريمان

م(س) مقعر للأسفل ]ص ف ، π/٣[ حيث أن ص ف لا ينتمي لمجال الاقتران فهي نهاية ولا تساوي صفر.

## تعريف

أ. معقم ريمان

(1) تسمى النقطة (جـ ، م(جـ)) نقطة انعطاف للاقتران م(س) إذا كان:

- م(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ
- يغير الاقتران اتجاه تقعره عند س = جـ من الأعلى إلى الأسفل أم العكس

(2) زاوية الإنعطاف: هي زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى م(س) عند نقطة الإنعطاف

(3) اذا كانت (جـ ، م(جـ)) نقطة انعطاف وكانت م''(جـ) = صفر فتسمى النقطة (جـ ، م(جـ)) نقطة انعطاف أفقي. أ. معقم ريمان

مثال (4) ص 77 / الحل

جد نقاط الانعطاف (إنه وجد) للاقتران م(س) = ٣ جاس جتاس ، س ∈ ]٠ ، π[

م(س) = ٣/٢ جا٢س

أ. معقم ريمان

يجد الاشارات نعوض في الأعداد من م''

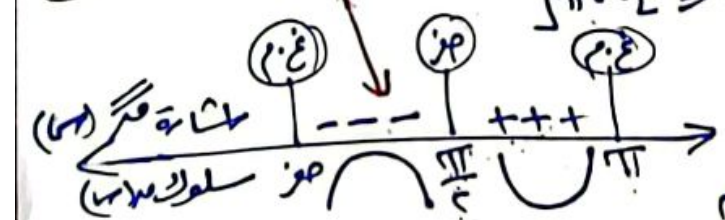
م''(س) = −٣ جا٢س + ٣ جتا٢س = ٠

م''(س) = ٣ جتا٢س ، س ∈ ]٠ ، π[

م''(س) = −٦ جا٢س = صفر

جا٢س = صفر ⇐ ٢س = صفر ⇐ س = صفر ∉ ]٠ ، π[

٢س = ١٨٠ ⇐ س = ٩٠ ∈ ]٠ ، π[




أ. معقم ريمان

النقطة (π/٤ ، م(π/٤)) = (π/٤ ، صفر) نقطة إنعطاف

هل النقطة (π/٢ ، صفر) نقطة انعطاف أفقي؟!

م'(π/٢) = ٣ جتا٢ × π/٢ = ٣ × −١ = −٣ ≠ صفر ∴ (π/٢ ، صفر) ليست نقطة إنعطاف أفقي.



CamScanner

**مثال 5** ص 77 / بين أنه لا يوجد للاقترانه م(س) = $\sqrt{9-س^2}$ نقطة انطفاف في الفترة ]-٣، ٣[

**الحل** م(س) = $\sqrt{9-س^2}$ متصل في الفترة ]-٣، ٣[

م'(س) = $\frac{-2س}{2\sqrt{9-س^2}}$ ⟸ م'(س) = $\frac{-س}{\sqrt{9-س^2}}$

⟸ م''(س) = $\frac{\sqrt{9-س^2} \times -1 - (-س) \times \frac{-2س}{2\sqrt{9-س^2}}}{(\sqrt{9-س^2})^2}$

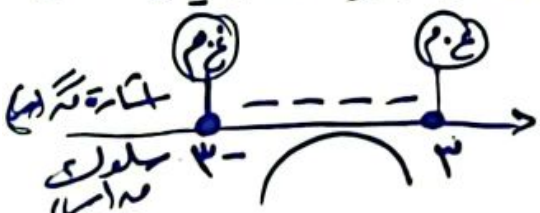
⟸ م''(س) = $\frac{-\sqrt{9-س^2} - \frac{س^2}{\sqrt{9-س^2}}}{9-س^2}$ = $\frac{\frac{-(9-س^2)-س^2}{\sqrt{9-س^2}}}{9-س^2}$

⟸ م''(س) = $\frac{-9}{\sqrt{9-س^2}} \times \frac{1}{9-س^2}$ ⟸ م''(س) = $\frac{-9}{\sqrt{(9-س^2)^3}}$ ≠ صفر

∀ س ∈ ]-٣، ٣[ ولكن م''(س) < صفر دائماً

ومنها يكون منحنى م(س) مقعراً للأسفل في ]-٣، ٣[

وبما أن م(س) لا يغير من اتجاه تقعره فلا يوجد نقاط إنطفاف للاقترانه م(س) في ]-٣، ٣[

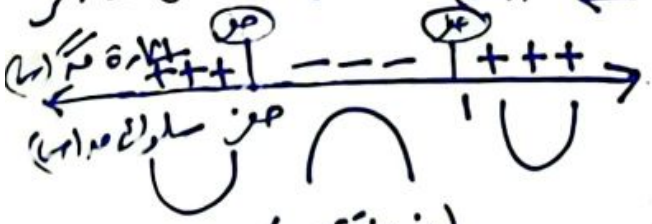



أ. معتصم ريحان
00972598709519
حصص خاصة أونلاين وزووم.

**مثال 6** ص 78 / إذا كان م(س) = $س^4 - ٢س^3$ ، س ∈ ح فجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقترانه م(س)، ثم جد نقط وزوايا الإنطفاف إن وجدت.

**الحل** م(س) متصل لأن م'(س) = $٤س^3 - ٦س^2$ ⟸ م''(س) = $١٢س^2 - ١٢س$ = صفر

⟸ س = ٠ أو س = ١




م(س) مقعر للأعلى ]-∞، صفر[ ∪ ]١، ∞[

م(س) مقعر للأسفل ]٠، ١[

∴ (٠،٠) نقطة انطفاف لأنه عندها الاقترانه غير من سلوكه (غير من تقعره)

∴ (١،-١) نقطة انطفاف لأنه عندها الاقترانه غير من سلوكه (غير من تقعره)

**لإيجاد زوايا الانطفاف** هـ١ زاوية الانطفاف عند النقطة (٠،٠)

ظا هـ١ = م'(٠) = صفر ⟸ هـ١ = صفر

هـ٢ زاوية الانطفاف عند (١،-١) ⟸ ظا هـ٢ = م'(١) = -٢ ⟸ هـ٢ = ظا^-١(-٢)


CamScanner

**مثال (7) ص 78**

عيّن مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران

**الحل**

$$ق(س) = \begin{cases} س^3 ، & 0 < س < 2 \\ س^2 ، & 2 < س < 4 \end{cases}$$

أ. معتصم ريحان
حصص أونه لاينه خاصة
زووم

ق(س) غير متصل عند س = ٢ ومنها ق(٢) غير موجودة.

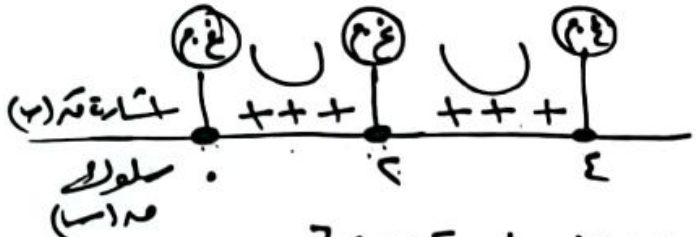
$$ق'(س) = \begin{cases} 3س^2 ، & 0 < س < 2 \\ 2س ، & 2 < س < 4 \end{cases} \Leftarrow ق''(س) = \begin{cases} 6س ، & 0 < س < 2 \\ 2 ، & 2 < س < 4 \end{cases}$$

① $ق''(س) = 0$ عندما $0 < س < 2$

$\therefore 6س = 0 \Leftarrow س = 0 \notin ]0 ، 2[$

② $ق''(س) = 0$ عندما $2 < س < 4$

$\therefore 2 \neq$ صفر أبداً

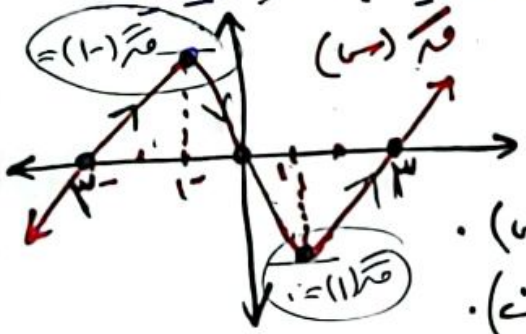



منحنى ق(س) مقعر للأعلى في ]٠ ، ٢[ وكذلك في ]٢ ، ٤[

أ. معتصم ريحان تابعني على الفيس واليوتيوب

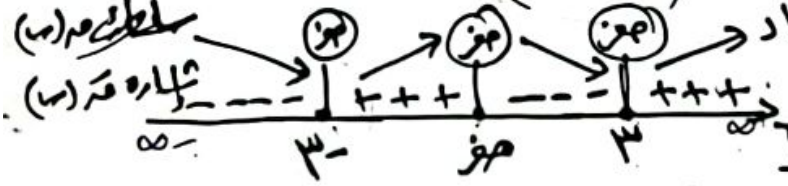
**مثال 8 ص 79 مهم جداً**

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق'(س) معتمداً عليه جد كلاً مما يأتي:




1. فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).
2. القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س).
3. مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س).
4. قيم س التي يكون عندها نقاط الإنعطاف (إن وجدت).

**الحل** نمثل اشارة ق'(س) على خط الأعداد




1. منحنى ق(س) متزايد في ]-٣ ، ٠[ ، ]٣ ، ∞[

منحنى ق(س) متناقص في ]-∞ ، -٣] ، [صفر ، ٣]

2. ق(-٣) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية

ق(٣) قيمة صغرى محلية

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونه لاينه
0097259870951 9

3. ق(س) مقعر للأعلى ]-∞ ، -١[ ، ]١ ، ∞[

ومقعراً للأسفل في ]-١ ، ١[

4. نقاط الانعطاف تكون عند س = -١ ، س = ١ لأنه الاقتران يغير من سلوكه وتقعره عندها.

ص 4



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

* **ملاحظة:** اذا كان ق(س) كثير حدود وكانت (س، ق(س$_1$)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س)، فإنّ قً(س$_1$) = صفر

أ. معتصم ريحان

---

نشاط ② ص 80 مهم

اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان منحناه يمر بالنقطة (٠، ٥) وله نقطة انعطاف أفقي عند النقطة (٢، ١)، جد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل: نفرض أنّ ق(س) = أ س$^3$ + ب س$^2$ + جـ س + د ، حيث أ، ب، جـ، د ∈ ح، أ ≠ صفر

بما أنه ق(٠) = ٥ ∴ $\boxed{د = ٥}$ #

وبما أنّ (٢، ١) نقطة انعطاف أفقي فإنّ ق(٢) = ١ ، قَ(٢) = صفر ، قً(٢) = صفر

وبما أنّ ق(٢) = ١ ⟸ ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ٥ = ١ ⟸ $\boxed{٨أ + ٤ب + ٢جـ = -٤}$ ①

أ. معتصم ريحان

⟸ قَ(س) = ٣أ س$^2$ + ٢ب س + جـ

وبما أن قَ(٢) = صفر ⟸ $\boxed{صفر = ١٢أ + ٤ب + جـ}$ ②

حل معادلة ① مع ②

٨أ + ٤ب + ٢جـ = -٤ أطرح

١٢أ + ٤ب + جـ = صفر

$\boxed{-٤أ + جـ = -٤}$ ③

* حل معادلة ② مع ③

١٢أ + ٤ب + جـ = صفر أطرح

-٤أ + صفر + جـ = -٤

$\boxed{١٦أ + ٤ب = ٤}$ ④

أ. معتصم ريحان

⟸ قً(س) = ٦أ س + ٢ب

⟸ قً(٢) = ٦×أ×٢ + ٢ب = صفر

$\boxed{١٢أ + ٢ب = صفر}$ ⑤

∴ ق(س) = $-\frac{١}{٢}$ س$^3$ + ٣س$^2$ − ٦س + ٥

#

أ. معتصم ريحان

حل معادلة ④ مع ⑤

١٦أ + ٤ب = ٤ ④

١٢أ + ٢ب = صفر ⑤ ← × (-٢)

١٦أ + ٤ب = ٤

-٢٤أ - ٤ب = صفر

-٨أ = ٤

أ = $-\frac{١}{٢}$ ⟸ $\boxed{ب = ٣}$ #

أرجع عوض في معادلة ③ عن قيمة أ

-٤ × $-\frac{١}{٢}$ + جـ = -٤

$\boxed{جـ = -٦}$ #

(ص 5)



CamScanner ـحه ضوئيا بـ

## (*) اختبار المشتقة الثانية في تعيين القيم القصوى

**نظرية:** اذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحتوي جـ وكان قَ(جـ) = صفر فإنه:

يعني بالعكس

① ق(جـ) قيمة عظمى محلية، اذا كانت قً(جـ) < صفر

② ق(جـ) قيمة صغرى محلية، اذا كانت قً(جـ) > صفر

③ يفشل تطبيق الاختبار اذا كانت قً(جـ) = ٠ أو قً(جـ) غير موجودة.

أ. معتصم ريحان

---

**مثال (٩) ص 80** جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س) = ٣س^٤ − ٨س^٣ + ٦س^٢ باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن)

**الحل:** ق(س) متصل وقابل للإشتقاق في ح لأنه كثير حدود

قَ(س) = ٠ ⟸ ١٢س^٣ − ٢٤س^٢ + ١٢س = ٠

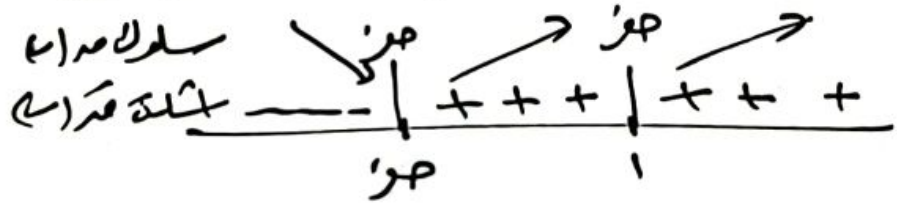
⟸ ١٢س(س^٢ − ٢س + ١) = ٠ ⟸ ١٢س(س − ١)^٢ = ٠

∴ س = ٠ أو س = ١ ⟸ أصفار المشتقة الأولى

$\boxed{\text{قً(س)} = ٣٦\text{س}^٢ - ٤٨\text{س} + ١٢}$

قً(٠) = ١٢ > ٠ اذاً ق(٠) = قيمة صغرى محلية

بما أن قً(١) = ٠ ∴ يفشل اختبار المشتقة الثانية ونعود للأولى




∴ لا يوجد قيمة قصوى عند س = ١

لأن الاقتران لم يغير من سلوكه.

أ. معتصم ريحان
تابعني في الفيس والبوتيوب

(ص ٥)



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

## * حل تمارين ومسائل درس التقعر ونقط الانعطاف ص 81+82 :

س1 / ص81 عين فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق(س) في الحالات الآتية :

أ. معتصم ريحان
توجيهي علمي 2022

**أ** $\text{ق}''(\text{س}) = (\text{س}^2 - 3\text{س} - 4)(\text{س} + 2)$ ، $\text{س} \in \mathbb{Z}$

**الحل** $\text{ق}''(\text{س}) = (\text{س}^2 - 3\text{س} - 4)(\text{س} + 2) = \text{صفر}$

إما $\text{س}^2 - 3\text{س} - 4 = \text{صفر}$ أو $\text{س} + 2 = 0 \Leftarrow \boxed{\text{س} = -2}$

$(\text{س} - 4)(\text{س} + 1) = \text{صفر}$

$\boxed{\text{س} = 4}$ $\boxed{\text{س} = -1}$

ق(س) مقعر للأعلى $]-2, -1[$ ، $]4, \infty[$

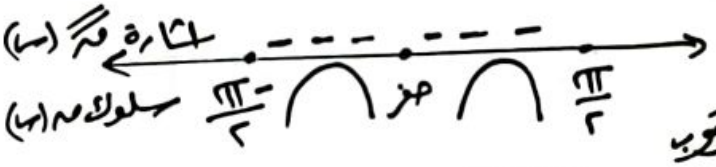
ق(س) مقعر للأسفل $]-\infty, -2[$ ، $]-1, 4[$

أ. معتصم ريحان

**ب** $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جاس} - \text{س}$ ، $\text{س} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

**الحل** $\text{ق}''(\text{س}) = \text{جتاس} - 1 = \text{صفر} \Leftarrow \text{جتاس} = 1 \Leftarrow \boxed{\text{س} = \text{صفر}}$

ق(س) مقعر للأسفل في $\left]-\frac{\pi}{2}, \text{صفر}\right[$ ، $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$



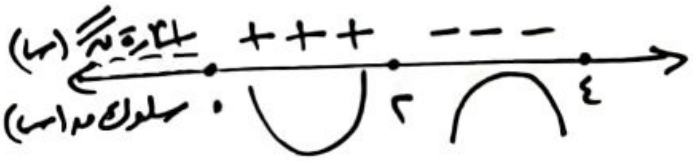

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس واليوتيوب

**ج** $\text{ق}(\text{س}) = 4\text{س}^3 - \text{س}^4 + \text{س}$ ، $\text{س} \in ]0, 4[$

**الحل** $\text{ق}'(\text{س}) = 12\text{س}^2 - 4\text{س}^3 + 1 \Leftarrow \text{ق}''(\text{س}) = 24\text{س} - 12\text{س}^2 = \text{صفر}$

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = 0}$ $\boxed{\text{س} = 2}$

$\notin ]0, 4[$ $\in ]0, 4[$




ق(س) مقعر للأعلى في $]0, 2[$

ق(س) مقعر للأسفل في $]2, 4[$

أ. معتصم ريحان
00972598709519
تابعني على الفيس واليوتيوب
حصص خاصة أونلاين Zoom

ص7



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

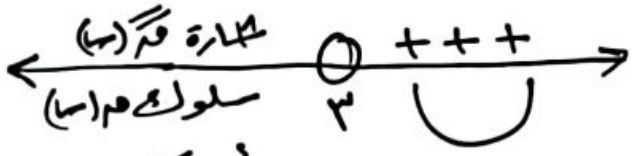
س١ تابع

**د** ق(س) = (س − ٣)^(٣/٢) ، س > ٣

الحل: ق′(س) = ٣/٢ (س − ٣)^(١/٢) ⟸ ق″(س) = ٣/٤ (س − ٣)^(−١/٢)

⟸ ٣ / ٤(س − ٣)^(١/٢) ≠ صفر

إشارة ق″(س): + + + ، ٣ ، سلوك ق(س)



ق(س) مقعر للأعلى في ]٣ ، ∞[

أ. معتصم ريحان

---

**هـ** ق(س) = جا س/٢ ، س ∈ ]٠ ، π[

الحل: ق′(س) = ١/٢ جتا س/٢ ⟸ ق″(س) = −١/٤ جا س/٢ = ٠ ⟸ جا س/٢ = صفر

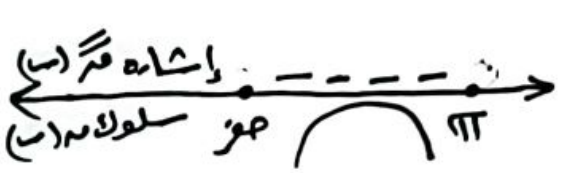
∴ إما س/٢ = صفر ⟸ س = ٠ ∉ ]٠ ، π[

أو س/٢ = π ⟸ س = ٢π ∉ ]٠ ، π[

إشارة ق″(س): − − − − ، صفر ، π ، سلوك ق(س)

ق(س) مقعر للأسفل في ]٠ ، π[

أ. معتصم ريحان / حصص خاصة أونلاين



---

**و** ق(س) = هـ^س جتا س ، س ∈ ]٠ ، ٢π[

الحل: ق′(س) = هـ^س × −جا س + جتا س × هـ^س

ق″(س) = ~~هـ^س × −جتا س~~ + −جا س × هـ^س + ~~جتا س × هـ^س~~ + هـ^س × −جا س = صفر

ق″(س) = −٢ هـ^س جا س = صفر ⟸ هـ^س جا س = صفر ⟸ جا س = صفر

لا يساوي صفر

∴ ⟸ س = π ∈ ]٠ ، ٢π[

⟸ س = صفر ∉ ]٠ ، ٢π[

إشارة ق″(س): − − − ، + + + ، صفر ، π ، ٢π ، سلوك ق(س)

ق(س) مقعر للأسفل في ]٠ ، π[

ق(س) مقعر للأعلى في ]π ، ٢π[

أ. معتصم ريحان حصص أونلاين مميزة.

00972598709519

---

**ز** ق(س) = { [١/٣ س − ١] ، ١ < س ≤ ٣ ؛ س^٣ ، ٣ < س < ٥ }

الحل: نعيد تعريف الصحيح

طول الدرجة = ١ / |١/٣| = ٣

الفترة المطلوبة: صفر ، ١ ، ٣ ، ٦

[١/٣ س − ١] = { −١ ، صفر ≤ س < ٣ ؛ صفر ، ٣ ≤ س < ٦ }

هذه الفترة المطلوبة مع اضافة سطر جديد لادخال رقم ٣ مثل الفترة المطلوبة

∴ ق(س) = { −١ ، ١ < س < ٣ ؛ صفر ، س = ٣ ؛ س^٣ ، ٣ < س < ٥ }

اذا أردت أن تضيف يساوي لازم تفتح سطر جديد

صـ 8



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

تابع حل سؤال فرعي [أ]

ص 81

$$م(س)=\begin{cases} -1 & ، 1<س<3 \\ \text{صفر} & ، س=3 \\ س^3 & ، 3<س<5 \end{cases}$$

لاحظ أنه م(س) غير متصل عند س=3

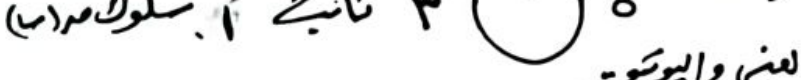
∴ قَ(3) = غ.م

$$قَ(س)=\begin{cases} \text{صفر} & ، 1<س<2 \\ 3س^2 & ، 3<س<5 \end{cases} \Rightarrow قَ(س)=\begin{cases} \text{صفر} & ، 1<س<3 \\ 6س & ، 3<س<5 \end{cases}$$

قَ(س) = 6س = صفر ⟸ س = صفر ∉ ]3، 5[

م(س) متزايد للأعلى ]3، 5[

م(س) ثابت ]1، 3[




أ. معتصم رحيمات / دبلوم العين والبوتوكس

ص 81 ج 2 حدد نقاط الإنعطاف لمنحنى الاقتران م(س) في الحالات الآتية (إنه وجدت):

أ. معتصم رحيمات
00972598709519

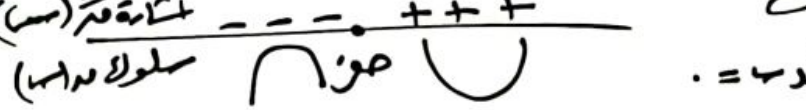
(أ) م(س) = س³ + س

الحل م(س) متصل على ح لأنه كثير حدود.

قَ(س) = 3س² + 1 ⟸ قَ(س) = 6س = صفر ⟸ س = صفر

∴ (صفر، م(صفر)) = (صفر، صفر) نقطة انعطاف

لأنه تحقق الشروط ① م(س) متصل عند س = صفر
② قَ(صفر) = صفر
③ الاقتران يغير فيه سلوكه عندها.




أ. معتصم رحيمات
حصص خاصة أونلاين

(ب) م(س) = جتاس ، س ∈ ]صفر، 2π[

الحل م(س) متصل على [صفر، 2π]

قَ(س) = −جاس ⟸ قَ(س) = صفر ⟸ −جتاس = صفر ⟸ جتاس = صفر

س = π/2 ∈ ]صفر، 2π[

س = 3π/2 ∈ ]صفر، 2π[

∴ (π/2، م(π/2)) = (π/2، صفر) نقطة انعطاف لتحقق الشروط السابقة

∴ (3π/2، م(3π/2)) = (3π/2، صفر) نقطة انعطاف م(س) متصل عند س = π/2، 3π/2

أ. معتصم رحيمات
00972598709519
حصص أونلاين

قَ(π/2) = صفر

قَ(3π/2) = صفر

الاقتران يغير فيه سلوكه عندهما

ص 9



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أ. معتصم ريحان
00972598709519
حصص خاصة أونلاين
مميزة زووم

ج) $ق(س) = \sqrt[3]{٥ - س}$

الحل/ $ق(س) = (٥ - س)^{\frac{١}{٣}}$ ⟸ ق(س) متصل على ح

⟸ $ق'(س) = \frac{١}{٣}(٥ - س)^{\frac{-٢}{٣}} \times -١$

⟸ $ق''(س) = \frac{-٢}{٩}(٥ - س)^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{٢}{٩\sqrt[3]{(٥ - س)^{٥}}} \neq$ صفر

$ق''(س)$ = غ.م عند أصفار المقام ⟸ ٥ - س = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٥}$ ← صفر مقام

∴ (٥، ق(٥)) = (٥، ٠) نقطة انعطاف

لأنها تحقق الثلاث شروط.

| | | | |
|---|---|---|---|
| إشارة $ق''(س)$ | - - - | ٥ | + + + |
| سلوك ق(س) | ∩ | | ∪ |

أ. معتصم ريحان تابعني على العينس واليوتيوب

---

* تابعني على قناتي على اليوتيوب وصفحتي الرسمية على العينس بوك باسم ((معتصم ريحان رياضيات توجيهي))

* تابعني على مجموعات الواتس والتليجرام.

* للتسجيل معي في الدروس الخصوصية أونلاين على الزووم راسلني واتس 00972598709519

* هذا التلخيص موجود بالكامل على شكل فيديوهات مسجلة اذا أردتها راسلني واتس ((الفيديوهات غير مجانية)).

* تلخيص كل وحدة موجود بشكل منفصل على شكل ملف pdf التلخيص عامل ومجاني لكل طلاب فلسطين

وما تنسونا من دعواتكم الطيبة

أ. معتصم بسام ريحان - فلسطين - غزة.



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

حصة رقم 37
توجيهي علمي 2022
أ. معتصم ريحان

# (*) تابع حل أسئلة تمارين ومسائل درس التقعر ونقط الانعطاف ص 81+82

س 3 ص 82

جد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانات الآتية وحدد نوع كل منها باستخدام اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن تطبيقها) وفي حالة عدم إمكانية تطبيقها استخدم اختبار المشتقة الأولى:

(أ) ق(س) = س³ + ٦س² ، ق(س) متصل على ح لأنه ك.ح.

الحل: قَ(س) = ٣س² + ١٢س ⟸ قَ(س) = ٠ ⟸ ٣س² + ١٢س = ٠

س = ٠ ، س = -٤

نجد ⟸ قً(س) = ٦س + ١٢ = صفر

الآن نستخدم اختبار المشتقة الثانية

قً(٠) = ٦ × ٠ + ١٢ = ١٢ > صفر

∴ عند س = صفر يوجد قيمة صغرى محلية

قً(-٤) = ٦ × -٤ + ١٢ = -١٢ < صفر

∴ عند س = -٤ يوجد قيمة عظمى محلية.

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب
حصص خاصة أونلاين مميزة

أ. معتصم ريحان

(ب) ق(س) = |س + ٦| أولاً نُعيد تعريف المطلق.

الحل: ق(س) = { س + ٦ ، س ≥ -٦ ؛ -س - ٦ ، س < -٦ }

س + ٦ = ٠ ⟸ س = -٦

ق(س) متصل على ح

- - - ، + + +
(س+٦) ، -٦ ، (-س-٦)

نجد قَ(س) = { ١ ، س > -٦ ؛ -١ ، س < -٦ }

⟸ قَ(-٦) = غ.م

∴ قً(-٦) = غ.م

يفشل اختبار المشتقة الثانية ونعود لاختبار المشتقة الأولى

إشارة قَ(س): - - - ، + + + +
سلوك ق(س): ∞ ↘ -٦ ↗ ∞

∴ (-٦ ، ق(-٦)) = (-٦ ، ٠) قيمة صغرى محلية وحيدة مطلقة.

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب
حصص خاصة أونلاين مميزة.

00972598709519



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س4 ص82 إذا كان للاقتران ق(س) = أ س² + س³ نقطة إنعطاف عند س = -١ ، فجد قيمة/قيم الثابت أ .

الحل/ بما أن للاقتران ق(س) نقطة إنعطاف عند س = -١ يعني ق″(-١) = صفر

⟸ ق′(س) = ٢أ س + ٣ س² ⟸ ق″(س) = ٢أ + ٦ س

الآن عوض ⟸ ق″(-١) = ٢أ + ٦(-١)

⟸ صفر = ٢أ - ٦ ⟸ $\boxed{أ = ٣}$ # .

أ. معتصم ريحان

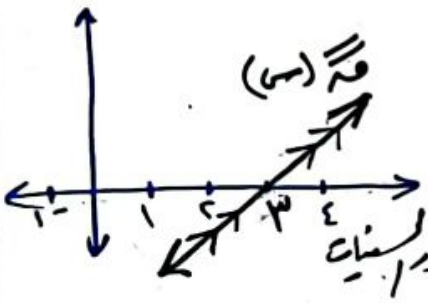
---

س5 ص82 الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق″(س) إذا علمت أن ق′(٠) = ق′(٦) = صفر ، جد كلاً مما يأتي :-

(أ) فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

(ب) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

(جـ) فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س)




الحل/ * لاحظ من الشكل أن ق″(٣) = صفر لأنها تقطع محور السينات

* الآن نرسم خط الأعداد ونضع عليه شكل التقعرات للأعلى وللأسفل

اشارة ق″(س) - - - - - ٣ + + + ∞

سلوك ق(س) ∩ ∪

* من الشكل الجزء الموجود على يمين س = ٣ موجب والجزء الموجود على يسار س = ٣ سالب

أ. معتصم ريحان / حصص خاصة أون لاين

حل (أ) ق(س) مقعر للأعلى في ]٣ ، ∞[ ومقعر للأسفل في ]-∞ ، ٣[

النقطة (٣ ، ق(٣)) هي نقطة انعطاف لأنها تحقق الشروط الثلاثة

متصل عند س = ٣ ، ق″(٣) = ٠ ، يغير الاقتران من سلوكه عندها

حل (ب) لاحظ من السؤال نفسه معطينا ق′(٠) = ق′(٦) = صفر ∴ $\boxed{س = ٠ ، س = ٦}$ نقط حرجة

من الشكل المعطى ق″(٦) = > صفر ، ق″(٠) < صفر

ق(٠) = عظمى محلية

ق(٦) = صغرى محلية

حل آخر (ب)

اشارة ق′(س) + + - - - + + +

سلوك ق(س) ↗ صفر ↘ ٦ ↗ ∞

* ويمكن ايجاد القيم القصوى من اختبار المشتقة الثانية هكذا

ق″(٠) = سالب ← من رسمة الشكل المعطى في السؤال

ق″(٦) = موجب

∴ عند س = ٠ عظمى محلية

وعند س = ٦ صغرى محلية

المطلوب (جـ) ق(س) تزايد ]-∞ ، صفر] ، [٦ ، ∞[

ق(س) تناقص [صفر ، ٦]

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس واليوتيوب

ص2



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس واليوتيوب

مهم ص 82 س 6

إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة يمر منحناه بالنقطة (١، ٥) وله نقطة انعطاف عند س = ٢ بحيث إن معادلة المماس عند نقطة الانعطاف هي ٣س + ص = ٧ ، فجد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل: نفرض أن الاقتران $\boxed{ق(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + د}$ — (١)

* لاحظ أنه قال في السؤال أن الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (١، ٥) يعني ق(١) = ٥

الآن نعوض في المعادلة رقم (١) ينتج التالي ← $\boxed{٥ = أ + ب + جـ + د}$ — (٢)

* ولاحظ أيضاً أنه قال في السؤال أنه للاقتران نقطة انعطاف عند معادلة المماس ٣س + ص = ٧ عند س = ٢ ، إذاً نعوض عند س = ٢ بمعادلة المماس

⇐ ٣ × ٢ + ص = ٧ ⇐ $\boxed{ص = ١}$ ∴ نستنتج أن $\boxed{ق(٢) = ١}$ من معطى نقطة الانعطاف

الآن نعوض المعطى $\boxed{ق(٢) = ١}$ في معادلة رقم (١) ينتج ⇐ $\boxed{١ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د}$ — (٣)

أ. معتصم ريحان

الآن نحل معادلة (٢) مع (٣) بالحذف

$٥ = أ + ب + جـ + د$ — (٢)

$١ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د$ — (٣)

أطرح

$\boxed{٤ = -٧أ - ٣ب - جـ}$ معادلة (٤)

الحل النهائي

$ق(س) = -س^٣ + ٦س^٢ - ١٥س + ١٥$

أ. معتصم ريحان

* الآن نجد ميل المماس عن طريق معادلة المماس ٣س + ص = ٧

$م = \frac{-معامل س}{معامل ص}$ ⇐ $م = \frac{-٣}{١} = \boxed{-٣}$ ← هذا هو ميل المماس عند س = ٢

∴ $ق'(٢) = -٣$

* الآن نشتق الاقتران ق(س) ونعوض بـ (٢) ونساوي بـ (-٣)

$ق'(س) = ٣أ س^٢ + ٢ب س + جـ$

$ق'(٢) = \boxed{١٢أ + ٤ب + جـ = -٣}$ معادلة (٥)

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين Zoom

الآن نحل معادلة (٤) مع (٥) بالحذف

$٤ = -٧أ - ٣ب - جـ$

$-٣ = ١٢أ + ٤ب + جـ$

أجمع

$\boxed{١ = ٥أ + ب}$ — (٦)

نحل معادلة (٦) مع (٧) بالحذف ينتج

$١ = ٥أ + ب$

$صفر = ٦أ + ب$

أطرح

$١ = -أ$ ⇐ $\boxed{أ = -١}$ ← أرجع عوض في كل المعادلات تجد باقي المجاهيل $\boxed{د = ١٥}$

* بما أنه للاقتران ق(س) نقطة انعطاف عند س = ٢ إذاً $ق''(٢) = صفر$

$ق''(س) = ٦أ س + ٢ب$

$ق''(٢) = ١٢أ + ٢ب = صفر$

⇐ $\boxed{٦أ + ب = صفر}$ — (٧)

$\boxed{ب = ٦}$

$\boxed{جـ = -١٥}$

∴ $ق(س) = -س^٣ + ٦س^٢ - ١٥س + ١٥$

ص 3



حه ضوئيا بـ CamScanner

أ. معتصم ريحان

س7 ص82

اذا كان للاقتران كثير الحدود ق(س) = س^٤ − ٤س^٣ + ك(س)

نقطة إنعطاف أفقي هي (١، ٢) وكان ع(س) = ك^٢(س) احسب ع''(١)

الحل: بما أنه قال في السؤال أن النقطة (١، ٢) هي نقطة انعطاف افقي

اذاً نستنتج الآتي ⟸ ق(١) = ٢ ، ق'(١) = صفر ، ق''(١) = صفر

الآن سنجد مشتقة الاقتران ع(س)

⟸ ع'(س) = ٢ (ك(س)) × ك'(س) × ١ ← استخدمنا مشتقة القوس

⟸ ع''(س) = ٢ × (ك(س) × ك''(س) + ك'(س) × ك'(س))

خلينا رقم ٢ لحاله في الخارج واستخدمنا قاعدة الضرب

⟸ ع''(س) = ٢ك(س) × ك''(س) + ٢(ك'(س))^٢

أ. معتصم ريحان

المطلوب ع''(١) = ٢ك(١) × ك''(١) + ٢(ك'(١))^٢ ——— (١)

* الآن سنذهب في رحلة لايجاد قيمة ك(١) و ك''(١) و ك'(١) ثم نعود لمعادلة (١) ونعوض فيها

عوض النقطة (١، ٢) في الاقتران ق(س)

⟸ ٢ = (١)^٤ − ٤(١)^٣ + ك(١) ⟸ ك(١) = ٥ #.

* الآن سنجد المشتقة الأولى ونعوض عن س = ١ ونساوي بصفر لأنه ق'(١) = صفر

ق'(س) = ٤س^٣ − ١٢س^٢ + ك'(س)

صفر = ٤(١)^٣ − ١٢(١)^٢ + ك'(١) ⟸ ك'(١) = ٨ #.

أ. معتصم ريحان

* الآن سنجد المشتقة الثانية ونعوض عن س = ١ ونساويها بصفر أ. معتصم ريحان

ق''(س) = ١٢س^٢ − ٢٤س + ك''(س)

صفر = ١٢(١)^٢ − ٢٤(١) + ك''(١) ⟸ ك''(١) = ١٢ #.

* الآن سنعود الى معادلة رقم (١) حبيبتنا ونعوض فيها لأنه هي المطلوب.

ع''(١) = ٢ × ٥ × ١٢ + ٢(٨)^٢

ع''(١) = ١٢٠ + ١٢٨

∴ ع''(١) = ٢٤٨

وهو المطلوب

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

حصص خاصة أون لاين Zoom

00972598709519



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 8 / ص 82

اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [-٣، ٢] ويحقق الشروط الآتية:

ق(٠) = صفر ، ق'(١) = صفر ، ق'(-٢) = صفر ، ق''(س) > صفر

عندما س > صفر ، ق''(س) < صفر عندما س < صفر

أ. معتصم ريحان

تابعني على العنبر واليوتيوب

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة الآتية

(أ) حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س).

(ب) ما قيمة / قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيم قصوى ؟؟ وما نوع كل منها ؟؟

(جـ) ما قيمة / قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقطة انعطاف ؟؟

الحل / النقاط الحرجة من معطيات السؤال هي: عند س = {-٣، ٢} لأنها نقاط طرفية ، عند س = {١، -٢} لأن المشتقة عندها تساوي صفر

أ. معتصم ريحان

المطلوب (ب)

لو لاحظنا من اختبار المشتقة الثانية ⟸ ق''(١) > صفر ⟸ ومنها ق(١) صغرى محلية.

وأيضاً ⟸ ق''(-٢) < صفر ⟸ ومنها ق(-٢) عظمى محلية.

(*) لاحظ لو استخدمنا اختبار المشتقة الثانية على أطراف الفترة [-٣، ٢] سيفشل لأن اختبار المشتقة الثانية سيفشل عندما ق''(س) غ.م / صفر

(*) من معطيات السؤال

(أ) المطلوب

الاقتران ق(س) متزايد [-٣، -٢] ، [١، ٢]

الاقتران ق(س) متناقص [-٢، ١]

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة

00972598709519

المطلوب (جـ) لاحظ معطى السؤال أن ق(٠) = صفر

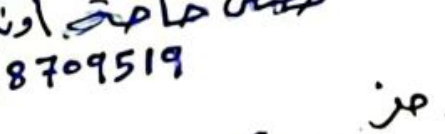
وأيضاً معطى أن ق''(س) > صفر عندما س > صفر

" " أن ق''(س) < صفر عندما س < صفر

نستنتج منهم أن الاقتران يغير من اتجاه تقعره عند س = صفر

أ. معتصم ريحان

∴ النقطة (٠، ق(٠)) = (٠، ٠) نقطة انعطاف




لأن الاقتران عند هذه النقطة يحقق الشروط الثلاثة:

- متصل عند س = صفر
- ق''(٠) = صفر
- الاقتران غير من شكل تقعره عند س = صفر



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

# حل أسئلة امتحانات سابقة لدرس التقعر ونقط الانعطاف

س 2007 دراسات

يقع الاقتران فوق جميع مماساته عندما يكون الاقتران

(أ) مقعراً للأعلى (ب) مقعراً للأسفل (ج) متزايداً (د) متناقصاً .

أ. معتصم ريحان

س 2007 دراسات

اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية فإن الاقتران ق

(أ) لا توجد له نقط انعطاف (ب) توجد له نقطة انعطاف واحدة فقط

(ج) يوجد له نقطتي إنعطاف (د) توجد له نقطة انعطاف واحدة على الأقل

الحل

ق(س) = أ س² + ب س + ج ← الشكل العام لكثير الحدود من الدرجة الثانية

قَ(س) = ٢أ س + ب

قً(س) = ٢أ = صفر ← لا يوجد قيم لسين اذاً لا يوجد للاقتران ق نقط انعطاف

أ. معتصم ريحان

س 2007

اذا كان ق(س) = س |س| فإنّ

(أ) قَ(٠) غير موجودة (ب) ق(٠) قيمة عظمى

(ج) ق(٠) قيمة صغرى محلية (د) (٠، ق(٠)) نقطة إنعطاف .

أ. معتصم ريحان

الحل

|س| = { س ، س ≥ صفر ؛ -س ، س < صفر }

⇐ ق(س) = { س² ، س ≥ صفر ؛ -س² ، س < صفر }

⇐ قَ(س) = { ٢س ، س > صفر ؛ -٢س ، س < صفر }

قَ(٠)⁺ = قَ(٠)⁻ ، صفر = صفر

قَ(٠) = صفر

⇐ قً(س) = { ٢ ، س > صفر ؛ -٢ ، س < صفر }

قً(٠)⁺ = قً(٠)⁻ ، ٢ ≠ -٢

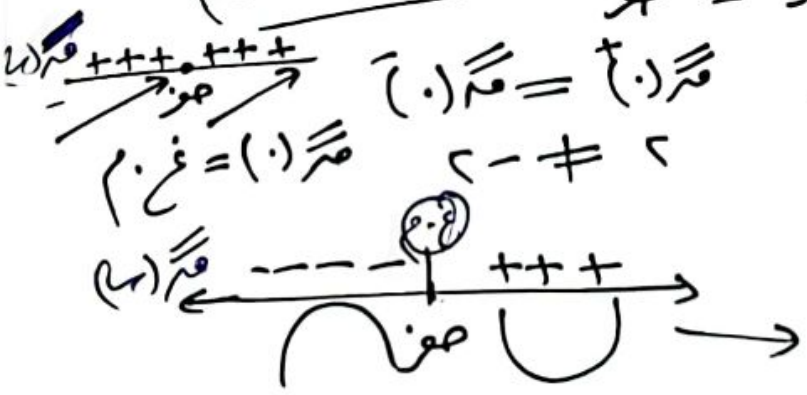
قً(٠) = غ.م

قً(س) + + + + + + + ، صفر

قً(س) - - - - | + + +

صفر

اذاً عند (٠، ق(٠)) نقطة انعطاف



أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين zoom

00972598709519

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

2007 س إكمال / اذا كانت النقطة (١، ٢) نقطة إنعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) وكان ق'(س) = ٤س^٣ - ل س^٢ حيث ل ثابت فإن ل تساوي:

(أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ١٢ (د) ٢٤

الحل / (١، ٢) نقطة انعطاف ∴ منها ق''(١) = صفر وأيضاً ق(١) = ٢

ق''(س) = ١٢س - ٢ل س

ق''(١) = ١٢(١) - ٢ل(١)

صفر = ١٢ - ٢ل ⟸ ل = ٦

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب
00972598709519

2008 س / اذا كان ق(س) معرفاً على [-١، ١] ، ق''(س) = موجودة في ]-١، ١[ ويوجد عند س = صفر نقطة انعطاف فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً

(أ) منحنى ق مقعر للأعلى في [-١، ٠] وللأعلى في [٠، ١]

(ب) ق له نقطة حرجة في ]-١، ١[

(ج) ق' له نقطة حرجة في ]-١، ١[

(د) ق'' له نقطة حرجة في ]-١، ١[

الحل / بما أنه قال في السؤال يوجد نقطة انعطاف عند س = صفر ∴ ق''(٠) = صفر

ومنها نستنتج أن ق' له نقطة حرجة في ]-١، ١[ : أ. معتصم ريحان

⟸ زود شرطة

2010 س / اذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى واحدة وكان ق'(١) = صفر ، ق''(١) = -٣ وكان ق(س) يمر بالنقطة (١، -٢) فإن تلك القيمة العظمى هي:

(أ) -٣ (ب) -٢ (ج) صفر (د) ١

يسأل عن القيمة ولا يسأل عن س

ركز في السؤال

الحل / معطى من السؤال أن ق''(١) = -٣ < صفر

∴ عند س = ١ يوجد قيمة قصوى عظمى محلية

ولكن نريد ايجاد قيمتها ، وهو في السؤال معطينا النقطة (١، -٢)

∴ القيمة العظمى عند س = ١ وقيمتها -٢ #

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

2011 س / اذا كانت ق'(-١) = ق'(٣) = صفر وكانت ق''(س) > صفر في الفترة ]-٢، ٢[ فإن

(أ) ق(-١) عظمى محلية (ب) ق(-١) صغرى محلية (ج) ق(٣) عظمى محلية (د) ق(٣) صغرى محلية.

الحل / معطى في السؤال ق''(س) > صفر ∴ حسب اختبار المشتقة الثانية اذاً لازم تكون صغرى

س = ٣ تقع خارج الفترة ]-٢، ٢[

بما أنه معطى ق'(-١) = صفر وأيضاً ق''(-١) > صفر

∴ عند س = -١ في صغرى محلية

∴ ق(-١) صغرى محلية

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س١١ ق/ إذا كان للاقتران ق(س) = أ س² + س³ نقطة انعطاف عند س = -١
فإن قيمة أ تساوي (أ) -٣ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٣

الحل ق'(س) = ٢أ س + ٣س²
ق''(س) = ٢أ + ٦س ⟸ صفر = ٢أ + ٦×-١
⟸ ٢أ = ٦ ⟸ أ = ٣ #

ق''(-١) = صفر استنتجناها

أ. معتصم ريحان

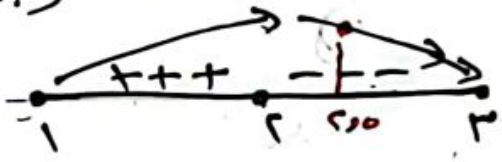
---

س١٤ ق/ اذا كان ق(س) متصلاً على [١، ٣] وكانت ق''(س) < صفر لجميع قيم س ∈ ]١، ٣[ ، وكان ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في [١، ٣] وكان ق'(٢) = صفر فإن

(أ) ق(٢,٥) > صفر
(ب) ق(٢,٥) > ق(٢)
(جـ) ق(٢,٥) = ق(٢)
(د) ق(٢,٥) < ق(٢)

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

الحل النقط الحرجة للاقتران ق(س) هي عند س = ١ ، س = ٣ لأنهم أطراف فترة.
وأيضاً هناك نقطة حرجة عند س = ٢ لأنه قال في السؤال ق'(٢) = صفر




معطينا في السؤال ق''(س) < صفر لجميع قيم سبق
∴ عند ⟸ ق(٢) يوجد قيمة عظمى محلية ]١، ٣[

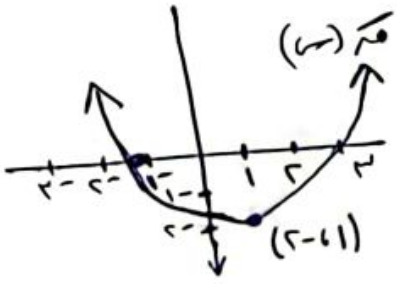
من الرسمة نلاحظ أن ق(٢,٥) < ق(٢) لأن ق(٢) هي العظمى المطلقة من الشكل

أ. معتصم ريحان

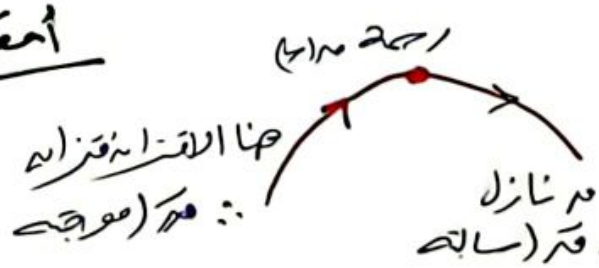
---

س١٤ ق/ اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق'(س) فإن نقطة انعطاف منحنى ق(س) هي

(أ) (١، -٢) (ب) (١، ق(١)) (جـ) (٣، ٠) (د) (-١، ٠)




أ. معتصم ريحان



أ. معتصم ريحان

اذا كان الاقتران طالع اذاً ق' > صفر
" " " ق نازل اذاً ق' < صفر
" " " ق' طالع اذاً ق'' > ٠
" " " ق' نازل اذاً ق'' < ٠

لاحظ



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

2014 س إكمال

النقطة (٠، ١) هي نقطة انعطاف لإحدى الاقترانات الآتية :

(أ) ق(س) = س$^{٢}$ + ١ (ب) هـ(س) = ١ − س$^{٤}$ (جـ) هـ(س) = س$^{٤}$ + ١ (د) ك(س) = س$^{٣}$ + ١

الحل

ق(٠) = ٠$^{٢}$ + ١
ق(٠) = ١
قَ(س) = ٢س
قً(س) = ٢
×

هـ(٠) = ١ − (٠)$^{٤}$
هـ(٠) = ١
هـَ(س) = −٤س$^{٣}$
هـً(س) = −١٢س$^{٢}$
هـً(٠) = −١٢ × (٠)$^{٢}$
هـً(٠) = صفر

− − − ٠ − − −
∩ صفر ∩
×

هـ(٠) = (٠)$^{٤}$ + ١
هـ(٠) = ١
هـَ(س) = ٤س$^{٣}$
هـً(س) = ١٢س$^{٢}$
هـً(٠) = ١٢(٠)$^{٢}$
هـً(٠) = صفر

+ + + ٠ + + +
∪ صفر ∪
×

ك(٠) = (٠)$^{٣}$ + ١
ك(٠) = ١
كَ(س) = ٣س$^{٢}$
كً(س) = ٦س
كً(٠) = ٦ × ٠
كً(٠) = صفر

− − − ٠ + +
∩ صفر ∪

تغير عندها السلوك

أ. معتصم ريحان
تابعني في الفيس واليوتيوب
حصص خاصة أونلاين

---

2015 س 2020 دور ثاني

اذا كان لمنحنى الاقتران ق(س) = س$^{٣}$ + م س$^{٢}$ − ٩س نقطة انعطاف عند س = ١ فإن قيمة الثابت م تساوي :

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) −٣ (د) −٤

الحل

قَ(س) = ٣س$^{٢}$ − ٢م س − ٩
قً(س) = ٦س − ٢م
صفر = ٦ × (١) − ٢م ⟸ م = ٣ #

قً(١) = صفر استنتجناها

أ. معتصم ريحان

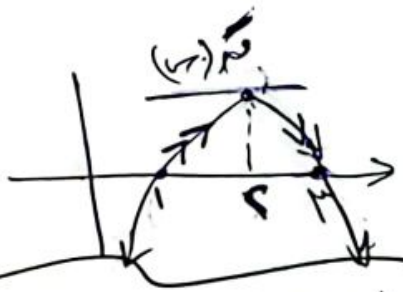
---

2016 س

الشكل المجاور يبين منحنى قَ(س)، إن مجموعة حل المتباينة قً(س) > صفر هي

(أ) ]١، ٣[ (ب) ]٢، ∞[ (جـ) ]−∞، ٢[ (د) ]−∞، ١[ ∪ ]٣، ∞[

]−∞، ٢[




قً(س)

+ + + + ٠ − − −
∪ ٢ ∩

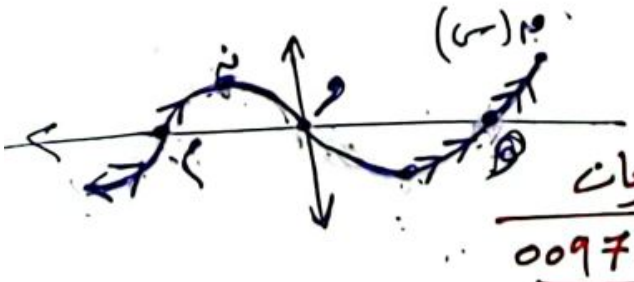
أ. معتصم ريحان
تابعني في الفيس واليوتيوب
حصص خاصة أونلاين مميزة

---

2016 س

بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق(س) فإن النقطة التي يكون عندها قَ، قً موجبتين هي :

(أ) م (ب) ن (جـ) هـ (د) و




الحل

م نقطة تحور للتقعر
ن نقطة تحور للتزايد والتناقص
و نقطة تحور للتقعر
لاحظ عند هـ ← قَ موجبة
قً موجبة

أ. معتصم ريحان
00972598709519



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خاص جدا / اذا كانه $م(س) = س^{٣}(٢-س)$ $س \in [-١، ٤]$ نجد مجالات التزايد والتناقص للاقترانه $م(س)$ والقيم القصوى المحلية للاقترانه $م(س)$ وحدد المطلقة منها وجد مجالات التقعر للاعلى للمنحنى $م(س)$

قاعدة الضرب

الحل $م'(س) = (س) \times (٣(٢-س)^{٢} \times (-١)) + ((٢-س)^{٣} \times (١))$

$م'(س) = -٣س(٢-س)^{٢} + (٢-س)^{٣}$ سنأخذ $(٢-س)^{٢}$ عامل مشترك

$م'(س) = (٢-س)^{٢}(-٣س + (٢-س))$

$م'(س) = (٢-س)^{٢}(٢-٤س) = ص$

$ص = ٢-٤س$

$٢-س = ٠$ أو $٤س = ١$

$س = ٢$ $\Leftarrow$ $س = \frac{١}{٤} \in ]-١، ٤[$

$\therefore$ $م'(س)$ تتزايد $[-١، \frac{١}{٤}]$

$م(س)$ تتناقص $[\frac{١}{٤}، ٢]$ ، $[٢، ٤]$

$م(-١)$ صغرى محلية $= ٨١$

$م(\frac{١}{٤})$ عظمى محلية $= ٥$ ومطلقة.

$م(٤)$ صغرى محلية $= -٣٢$ ومطلقة

(*) الآن نجد $م''(س)$ ونساويها بصفر

$م''(س) = ((٢-س)^{٢}) \times (-٤) + (٢-٤س) \times (٢(٢-س) \times (-١)) = ص$

قاعدة الضرب

$م''(س) = -٤(٢-س)^{٢} + (٢-٤س) \times (-٢(٢-س)) = ص$

أخذنا $(٢-س)$ عامل مشترك

$م''(س) = (٢-س)(-٤(٢-س) + (-٢)(٢-٤س)) = ص$

$م''(س) = (٢-س)(-١٢ + ١٢س) = ص$

اما $س = ٢$ أو $س = ١$

$م''(س)$ سلوك $م(س)$

$م(س)$ مقعر للأعلى $]١، ٢[$

$م(س)$ مقعر للأسفل $]-١، ١[$ و $]٢، ٤[$

أ. مقصم ريحان
تابعين لنا الفيس واليوتيوب
مقصم خاصة أونه لاينيم ميزة
٠٥٩٧٢٥٩٨٧٠٩٥١٩



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بداية حصة رقم 38 — توجيهي علمي 2022 — حصة 38

**س 2016:** اذا كان ق(س) = $\frac{1}{2}$ س + جتاس معرفاً على [٠، π] فإنه منحنى ق(س) يكون مقعراً للأسفل في:

(أ) [٠، π] (ب) [٠، $\frac{\pi}{2}$] (ج) [$\frac{\pi}{2}$، π] (د) [٠، $\frac{\pi}{2}$]

**الحل:** ق′(س) = $\frac{1}{2}$ − جاس

ق″(س) = − جتاس = صفر

جتاس = صفر ⟸ س = $\frac{\pi}{2}$ ∈ ]٠، π[ ✓

س = $\frac{3\pi}{2}$ ∉ ]٠، π[ مرفوضة

إشارة ق″(س): − − − − ، + + + +

سلوك ق(س): صفر ∩ $\frac{\pi}{2}$ ∪ π

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس واليوتيوب

---

**س 2016:** اذا كان ق كثير حدود وكان الشكل المجاور يبين إشارة ق″(س) وكانت ق′(٣) = صفر فإن العبارة الصحيحة دائماً هي:

+ + + + صفر − − − ، ٤

(أ) ق″(٣) = صفر (ب) ق′(٤) = صفر (ج) ق(٣) قيمة صغرى محلية (د) ق(٣) قيمة عظمى محلية.

**الحل:** معطى أن ق′(٣) = صفر ومن الرسمة ق″(٣) < صفر

∴ ق(٣) قيمة صغرى محلية

أ. معتصم ريحان

---

**س 2017:** اذا كان ق(س) = جتا²س معرفاً على [٠، $\frac{\pi}{2}$] فإن قيمة س التي يكون عندها نقط انعطاف س تساوي:

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

صفر: − − − ، + + +

صفر ∩ $\frac{\pi}{4}$ ∪ $\frac{\pi}{2}$

**الحل:** ق′(س) = ٢ جتاس × − جاس ← متطابقة ضعف الزاوية

ق′(س) = − جا٢س

ق″(س) = −٢ جتا٢س = صفر ⟸ جتا٢س = ٠ ⟸ ٢س = $\frac{\pi}{2}$ ⟸ س = $\frac{\pi}{4}$ ✓

٢س = $\frac{3\pi}{2}$ ⟸ س = $\frac{3\pi}{4}$ مرفوضة ✗

أ. معتصم ريحان

---

**س 2017:** الشكل المجاور هو ق′(س) على [−٣، ٥] فإن ق(س) يكون

(أ) مقعر للأسفل في [٠، ٥] (ب) مقعر للأسفل في [−٣، ٣]

(ج) متناقص [٠، ٥] (د) متناقص [٠، ٣]

ق′(س): ٤ ، −٣ ، ٣ ، ٥

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

إشارة ق″(س): + + + ، − − − ، ع.م ، صفر ، ع.م

−٣ سلوك ق(س) ، ٣ ، ٥

من الرسمة

إشارة ق″(س): − − − − − ، صفر ، صفر ثابت ∩ ٥

−٣ سلوك ق(س)



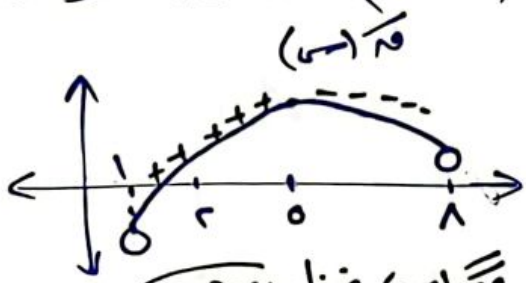
CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 17 دور ثاني

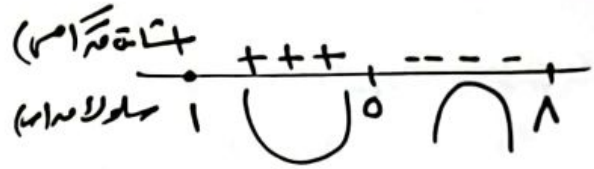
الشكل المجاور هو ق(س) نقطة الإنعطاف لمنحنى ق(س) هي

أ) (١، ق(١)) ب) (٥، ق(٥)) ج) (٢، ق(٢)) د) لا يوجد نقط انعطاف

أ. معتصم ريحان




منها ⟸




عندما نرى الاقتران ق(س) طالع في فترة معينة اذاً ق(س) متزايد موجب

وعندما نرى الاقتران ق(س) نازل في فترة معينة اذاً ق(س) متناقص سالب

أ. معتصم ريحان / تابعني على العين واليوتيوب

س 17 دور ثاني

اذا كان ق(س) كثير حدود وكانت زاوية ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه في الفترة ]٢، ٥[ هي زاوية منفرجة فإن العبارة الصحيحة هي:

أ) ق(س) متناقص في الفترة [٢، ٥] ب) ق(س) متزايد في الفترة [٢، ٥]

ج) ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [٢، ٥] د) ق(س) مقعر للأسفل في الفترة [٢، ٥].

الحل: لاحظ موجود تعريف زاوية الانعطاف في الكتاب الوزاري ص 77.

زاوية الإنعطاف هي ⟸ زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة الإنعطاف ومنها ظاهـ = ق(س)

* لكن لاحظ في هذا السؤال قال لمنحنى ق(س) اذاً ⟸ ظاهـ = ق(س)

وذكر في السؤال أن الزاوية منفرجة ∴ ⟸ ٩٠ < هـ < ١٨٠

والظل في الربع الثاني يكون سالب ∴ ق(س) < صفر سالبة

أ. معتصم ريحان تابعني على العين واليوتيوب 00972598709519

س 17 دور ثاني

اذا كان ق(س) = $\frac{1}{3}$ س$^3$ + س$^2$ − ٢س فإن منحنى ق(س) يقع فوق جميع مماساته على الفترة

أ) ]−١، ∞[ ب) ]١، ∞[ ج) ]−∞، −١] د) ]−∞، ١]

الحل: ق(س) = س$^2$ + ٢س − ٢

ق(س) = ٢س + ٢ = صفر

⟸ س = −١

* يكون الاقتران مقعر للأعلى اذا وقع فوق جميع مماساته

* يكون الاقتران مقعر للأسفل اذا وقع تحت جميع مماساته

أ. معتصم ريحان



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 2018/ إذا كانت النقطتان (٠ ، ق(٠)) ، (½ ، ق(½)) هما نقطتا إنعطاف لمنحنى ق(س) ، وكانت قَ(س) = ٤س³ − ك س² فإنّ قيمة الثابت ك هي

(أ) −٣ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٦

الحل/ قً(٠) = صفر ، قً(½) = صفر لأنه قال نقط إنعطاف

قً(س) = ١٢س² − ٢ك س

قً(صفر) = ١٢(٠) − ٢ك(٠)

قً(٠) = صفر − صفر

صفر = صفر

قً(½) = ١٢(½)² − ٢ك × ½

صفر = ٣ − ك

٣ = ك

أ. معتصم ريحان

حصص أونلاين خاصة مميزة.

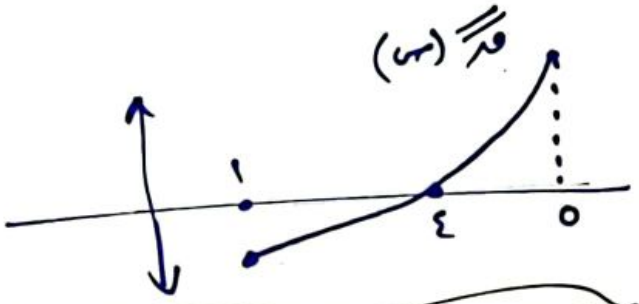
س 2018/ الشكل المجاور يمثل قً(س) ، حيث ق(س) كثير حدود ، قَ(٣) = صفر فإنّ العبارة الصحيحة هي:

(أ) ق(٣) قيمة صغرى محلية

(ب) ق(س) مقعر لأعلى في [١ ، ٥]

(ج) ق(س) مقعر لأعلى في [٤ ، ٥]

(د) قَ(س) متناقص في [٤ ، ٥]



أ. معتصم ريحان تابعني على العنيسوك

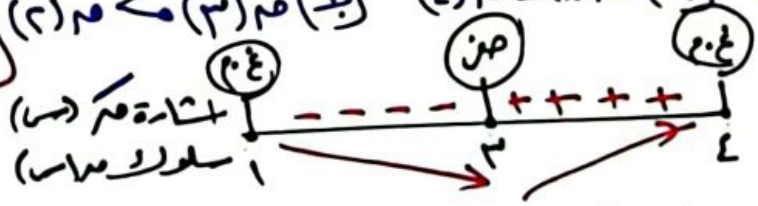
س 2019/ اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في [١ ، ٤] وكانت قً(س) > صفر لجميع س ∈ ]١ ، ٤[ وكان للاقتران ق(س) ثلاث نقاط حرجة فقط بحيث قَ(٣) = صفر فما العبارة الصحيحة مما يأتي:

(أ) ق(٣) < صفر (ب) ق(١) = ق(٤) (ج) ق(٣) > ق(٢)

(د) ق(٣) < ق(٢)

أ. معتصم ريحان

النقط الحرجة هي عند س = ١ ، س = ٣ ، س = ٤




معطى في السؤال أن قً(س) > صفر ومنها قً(٣) > صفر ∴ عند س = ٣ يوجد قيمة صغرى محلية حسب اختبار المشتقة الثانية

عند س = ٣ صغرى اذاً أصغر وحدة فيهم ∴ ق(٣) < ق(٢)

أ. معتصم ريحان

حصص أونلاين خاصة مميزة على الزووم

0097259870951 9

ص 3



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س١٩ ق / اذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ ، س ∈ [−٣ ، ٣] ما احداثيات نقطة الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

(أ) (−١ ، ٤) (ب) (١ ، −٢) (جـ) (٢ ، −٤) (د) (٠ ، ٠)

الحل: قَ(س) = ٣س$^{٢}$ − ٦س

قً(س) = ٦س − ٦ = صفر

− − − ٠ + + +

−٣ ∩ ١ ∪ ٣

(١ ، ق(١)) نقطة انعطاف

ق(١) = (١)$^{٣}$ − ٣(١)$^{٢}$ = −٢

∴ احداثيات نقطة الانعطاف هي (١ ، −٢)

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

س١٩ ق دور ثاني / اذا كان قً(س) = (س$^{٤}$ + ٥)(٣ − س)$^{٥}$ (س − ٤)$^{٤}$ فما مجموعة قيم س التي يكون عندها نقطة إنعطاف للإقتران ق(س)

(أ) {٣ ، ٤} (ب) {٣ ، −٥} (جـ) {٣} (د) {٣ ، ٤ ، −٥}

الحل: قً(س) = (س$^{٤}$ + ٥)(٣ − س)$^{٥}$ (س − ٤)$^{٤}$ = صفر

اما س$^{٤}$ + ٥ = ٠ أو (٣ − س)$^{٥}$ = صفر أو (س − ٤)$^{٤}$ = صفر

س$^{٤}$ = −٥ لا يوجد قيم لسين ∈ ح

٣ − س = ٠ ، س = ٣

س − ٤ = صفر ، س = ٤

لاحظ عند س = ٣ فقط نقطة انعطاف

وعند س = ٤ لا يوجد نقطة انعطاف لان الاقتران لم يغير من سلوكه عندها.

+ + + ٠ − − − − ٠ − − − −

٣ ∩ ٤ ∩

اشارة قً(س) سلوك ق(س)

أ. معتصم ريحان / حصص خاصة أونلاين

س١٩ ق دور ثاني / اذا كان ق(س) = س$^{٣}$ + ك س$^{٢}$ − ٩س ، ك ∈ ح اقتراناً له نقطة إنعطاف عند س = −١ فما ظل زاوية الإنعطاف.

(أ) −١٢ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ١٢

الحل: ظاهـ = قَ(س)

قَ(س) = ٣س$^{٢}$ + ٢ك س − ٩

قً(س) = ٦س + ٢ك

قً(−١) = ٦(−١) + ٢ك

صفر = −٦ + ٢ك

٣ = ك

قَ(−١) = ٣(−١)$^{٢}$ + ٢×٣(−١) − ٩

قَ(−١) = ٣ − ٦ − ٩

قَ(−١) = −١٢

∴ ظاهـ = −١٢

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة

ص ٦



حه ضوئيا بـ CamScanner

2020 س / اذا كانت $م(س) = \sqrt[3]{6 - 2س} + 2$ فما قياس زاوية الانطفاء لمنحنى الاقتران $م(س)$ إن وجدت

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{2}$ (ج) $\pi$ (د) لا توجد زاوية انطفاء

الحل $م'(س) = \frac{1}{3}(6 - 2س)^{-\frac{2}{3}} \times (-2)$

$م''(س) = -\frac{2}{3} \times -\frac{2}{3} \times (6 - 2س)^{-\frac{5}{3}} \times -2$

$م''(س) = -\frac{8}{9}(6 - 2س)^{-\frac{5}{3}}$ = صفر

$6 - 2س$ = صفر $\Leftarrow$ $س = 3$

السؤال طلب زاوية الانطفاء لمنحنى $م(س)$

$\therefore$ ظا$\theta$ = $م'(3)$

$\Leftarrow م'(3) = \frac{1}{3}(6 - 2 \times 3)^{-\frac{2}{3}} \times -2 = \frac{-2}{3(6-6)^{\frac{2}{3}}} = \frac{-2}{0}$ غير معرف

$\therefore م'(3)$ غير معرف عندما $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$

$\rightarrow$ هذه الزوايا يكون ظاها غير معرف

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| غير معرف | 1 | 0 | |

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين
بزودكم بميزة

2020 س / اذا كان منحنى الاقتران $م(س) = جا س + ب س^2$ نقطة انطفاء عندما $س = \frac{\pi}{2}$ فما قيمة ب

(أ) 4 (ب) $-4$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{4}$

الحل نستنتج أنه $م'(\frac{\pi}{2}) = 0$ لأنه قال عندها نقطة انطفاء

$م(س) = جتا س + 2ب س$

$م'(س) = -جا س + 2ب \Leftarrow م'(\frac{\pi}{2}) = -جا\frac{\pi}{2} + 2ب$

صفر $= -1 + 2ب \Leftarrow ب = \frac{1}{4}$

أ. معتصم ريحان تابعني على اليوتيوب

2020 س / اذا كان $م(س) = 18 - 6س - جا س$ فأي من الخيارات التالية تتحقق فرضية منحنى $م(س)$ $\forall س \in ح$

(أ) متزايد (ب) متناقص (ج) مقعر لأعلى (د) مقعر لأسفل

الحل $م'(س) = -6 - 2جتا س$ = صفر

$\Leftarrow -2جتا س = 6$

$\Leftarrow جتا س = -3$

لا يوجد قيم لـ س لأنه $-1 \leq جتا س \leq 1$

إشارة $م'(س)$: $---$ ($-\infty$) $+++$ ($\infty$)

سلوك $م(س)$: متناقص

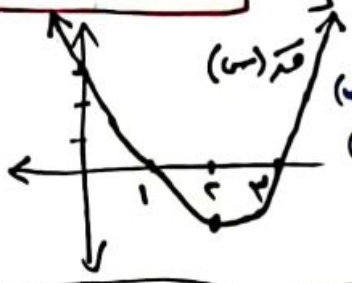


ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

س٢٥ / معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ما المجال الذي يقع فيه منحنى الاقتران ق(س) تحت جميع مماسات

(أ) ]١، ٣[ (ب) ]٢، ∞[ (ج) ]-∞، ١[ ∪ ]٣، ∞[ (د) ]-∞، ٢[

الحل




اشارة ق''(س) - - - + + +

سلوك ق(س) ∩ ٢ ∪ ∞

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

(*) حصص خاصة أونلاين zoom مميزة.

---

س٢٥ / دور ثاني / اذا كان ق(س) اقتران متصل على ح وكان ق'(س) = (٢س-١)^(-١/٢) - ١ فإن قياس زاوية الإنعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)

أ. معتصم ريحان

(أ) صفر (ب) π/٤ (ج) ٣π/٤ (د) π

الحل ق''(س) = ½ (٢س-١)^(-١/٢) × (٢) = صفر

⇐ (٢س-١)^(-١/٢) = صفر ⇐ ٢س-١ = ٠ ⇐ س = ½

زاوية الإنعطاف = ظاهـ = ق'(½) ⇐ (٢×½ - ١)^(-١/٢) - ١ = -١

∴ ظاهـ = -١ ∴ الزاوية هـ = π/٤ والظل يكون سالب في الربع الثاني والرابع

∴ الزاوية π/٤ نريد أن نجد زاوية إسنادها التي تقع في الربع الثاني والرابع لأن الظل هنا سالب

في الربع الثاني π - π/٤ = ٣π/٤ موجودة في الخيارات ✓

في الربع الرابع ٢π - π/٤ = ٧π/٤ غير موجودة في الخيارات.

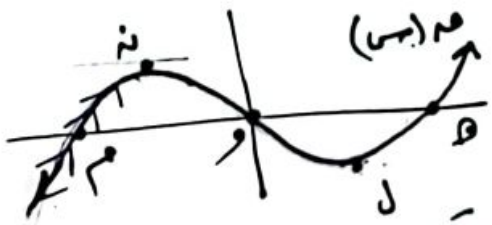
أ. معتصم ريحان

00972598709519

---

س٢٥ / دور ثاني / بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) في النقطة / النقط التي يكون عندها ق'(س) = صفر ، ق''(س) سالبة

(أ) هـ، م (ب) ن (ج) ل (د) و




الحل ق'(س) = ٠ عند س = ن ، س = ل

ق'(س) + + + - - - - - - + + +

ن ، ل

ل ، ن هما أصفار المشتقة الأولى

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة

00972598709519

ق''(س) - - - - + + + +

ن و ل

ق''(ن) سالبة

ق''(ل) موجبة

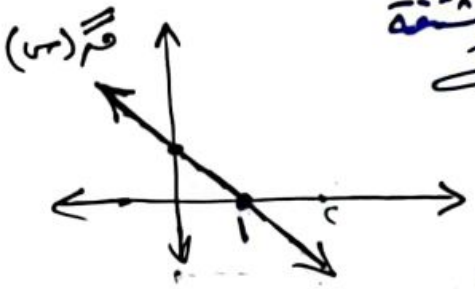
∴ النقطة التي يكون عندها ق'(س) = صفر ، ق''(س) سالبة هي ن # ص



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

**2020 س دور ثاني** / يمثل الشكل المجاور منحنى ق″(س) اذا كان ق′(٢) = صفر فماذا تمثل النقطة (٢، ق(٢))

أ) عظمى محلية ب) صغرى محلية ج) ليست حرجة لمنحنى ق(س) د) نقطة إنعطاف




الحل

اشارة ق″(س) + + + | ٠ − − −

سلوك ق(س) ∪ ١ ∩

اختبار المشتقة الثانية

س = ٢ تقع في الفترة ]١، ∞[

∴ ق″(٢) < صفر ∴ ق(٢) قيمة عظمى محلية.

أ. معتصم ريحان

---

**2020 س تجريبي طوباسي** / اذا كان ق(س) كثير حدود معرف على ح وكان ق′(١) = صفر ، ق″(١) × ق″(٣) > صفر وكان ق′(س) متناقص في [٢، ٤] فإنّ النقطة (١، ق(١)) هي :-

أ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق ب) قيمة صغرى محلية للاقتران ق. أ. معتصم ريحان

ج) قيمة صغرى مطلقة للاقتران ق د) نقطة انعطاف للاقتران ق.

الحل معطى في السؤال أنّ ق′(س) متناقص في [٢، ٤] ∴ ق″(س) < صفر سالب في [٢، ٤]

معطى في السؤال أنّ ق″(١) × ق″(٣) > صفر

∴ ق″(١) × سالب > صفر

٣ ∈ [٢، ٤]

∴ لازم تكون ق″(١) سالب وبما أنه ق″(١) < صفر ∴ ق(١) قيمة عظمى محلية حسب اختبار المشتقة الثانية

أ. معتصم ريحان

---

**2020 س تجريبي نابلسي** / اذا كان ق(س) = س |س| فإنّ العبارة الصحيحة فيما يلي

أ) ق′(١) غير موجودة ب) ق(٠) قيمة عظمى محلية. أ. معتصم ريحان

ج) ق(٠) قيمة صغرى محلية د) (٠، ق(٠)) نقطة إنعطاف.

الحل |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠ }

ق″(س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٢ ، س < ٠ }

ق″(٠) = غ.م

ق(س) = { س² ، س ≥ ٠ ؛ −س² ، س < ٠ }

متصل عند س = صفر

ق′(س) = { ٢س ، س > ٠ ؛ −٢س ، س < ٠ }

ق′(٠) موجودة وتساوي صفر

ق″(س) − − − − | + + +

سلوك ق(س) ∩ صفر ∪

∴ (٠، ق(٠)) نقطة انعطاف

أ. معتصم ريحان تابعين على الفيس واليوتيوب.

+ + + | ٠ + + +

صفر

لا يوجد عظمى أو صغرى عند س = ٠.



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

2019 تجريبي رام الله والبيرة

اذا كان للإقتران ق(س) كثير حدود وكانت ق''(س) < صفر عندما س < ٣ وكانت ق''(س) > صفر عندما س > ٣ وكان ق'(١) = صفر فما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات الآتية :.

أ. معتصم ريحان

[أ] ق''(١) = صفر [ب] ق'(٣) = صفر [ج] ق(١) عظمى محلية [د] ق(١) صغرى محلية.

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

حصص خاصة أونلاين مميزة

00972598709519

إشارة ق''(س): - - - - ٣ + + +

سلوك ق(س): ∩ ∪

مُعطى ق'(١) = صفر

∴ ق''(١) < صفر (سالبة) ∴ ق(١) عظمى محلية

حسب إختبار المشتقة الثانية

---

2020 تجريبي خانيونس

اذا كان المستقيم ص + ٣س + ٢ = صفر مماساً لمنحنى ق(س) عند نقطة الإنعطاف (-١، ١) فما ظل زاوية الانعطاف عند هذه النقطة.

[أ] -٣ [ب] -١ [ج] صفر [د] ١

الحل م المماس = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{١} = -٣$ ∴ ق'(-١) = -٣

ظل زاوية الانعطاف = ظا هـ = ق'(-١) = -٣

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة جداً

ملاحظة

ظا هـ = ق'(س) ← زاوية الانعطاف لمنحنى ق(س)

ظا هـ = ق''(س) ← زاوية الانعطاف لمنحنى ق'(س)

---

2020 الدورة الاستكمالية

ليكن ق(س) = جاس - √٣ جتاس ، س ∈ [٠، π] فما الإحداث السيني لنقطة الإنعطاف للإقتران ق(س)

[أ] $\frac{\pi}{٦}$ [ب] $\frac{\pi}{٤}$ [ج] $\frac{\pi}{٣}$ [د] $\frac{\pi}{٢}$

الحل ق'(س) = جتاس - √٣ × -جاس

رتبنا ق'(س) = جتاس + √٣ جاس

ق''(س) = $\frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{\sqrt{٣}\ \text{جتاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{صفر}}{\text{جتاس}}$ (قسمنا على جتاس)

أ. معتصم ريحان

-ظاس + √٣ = صفر

-ظاس = -√٣

ظاس = √٣

ق''(س): + + + $\frac{\pi}{٣}$ - - - - ∞

سلوك ق(س): ∪ ∩

نقطة انعطاف

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ ، س = $\frac{\pi}{٣}$ + π = $\frac{٤\pi}{٣}$ ∉ ]٠، π[ مرفوضة

ص 8



حة ضوئيا بـ CamScanner

**٢٠١٩ س سلفيت**

اذا كان المستقيم ص = ١ − ٤س مماساً للاقتران ق(س) عند نقطة الإنعطاف (١، −٣) فإن ظل زاوية الإنعطاف

أ) ١ ب) −٣

ج) صفر د) −٤

الحل معادلة المستقيم ص + ٤س = ١

م = −معامل س / معامل ص = −٤ / ١ = −٤

الميل = ق′(١) = −٤

∴ ظاهـ = −٤

ظل زاوية الإنعطاف = −٤

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين مميزة Zoom

---

**٢٠١٩ س سلفيت**

اذا كان للاقتران ق(س) = أ س² + س³ نقطة إنعطاف عند س = −١ فإن قيمة الثابت أ هي:

نستنتج أن ق″(−١) = صفر

أ) −٣ ب) −٣/٢

ج) ٣ د) ٣/٢

ق′(س) = ٢أ س + ٣س²

ق″(س) = ٢أ + ٦س

ق″(−١) = ٢أ + ٦(−١) = صفر

٢أ = ٦

أ = ٣ #

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب علشان تستفيد.

---

**٢٠١٩ تجريبي الخليل**

اذا كان ق(س) = ٣(أ − ٢)س² + ٨س + ٥ فما قيمة الثابت أ التي تجعل ق(س) مقوراً للأسفل

أ) أ < ٢ ب) أ > ٢ ج) أ > ١٢ د) أ < ١٢

الحل ق′(س) = ٦(أ − ٢)س + ٨

ق″(س) = ٦أ − ١٢ < صفر

٦أ < ١٢

أ < ٢

أ. معتصم ريحان
تابعني على مجموعات الواتس آب والتليجرام للفائدة أكثر.

---

**٢٠١٩ تجريبي الخليل**

اذا كان ق(س) اقتران يحقق شروط نظرية رول في الفترة [−١، ٢] وكانت جـ التي تحددها النظرية هي جـ = ١ وكان ق″(١) = −٣ فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة:

أ) ق(١) قيمة صغرى محلية للاقتران ب) (١، ق(١)) نقطة انعطاف

ج) ق(١) قيمة عظمى محلية للاقتران د) ق(−١) ≠ ق(٢)

أ. معتصم ريحان

نستنتج من معطيات السؤال أن ق′(١) = صفر ← نتيجة رول.

وبما أن ق″(١) = −٣ سالبة

∴ ق(١) قيمة عظمى محلية حسب اختبار المشتقة الثانية.

ص٩



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

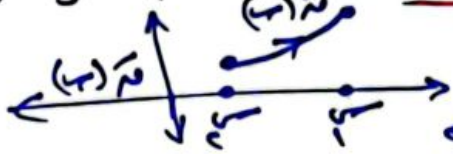
**س٢٠٩ تجريبي الخليل**

اذا كانت $س_1$ ، $س_2$ ∈ [أ ، ب] وكان $ق'(س_1) - ق'(س_2) > صفر$ ∀ $س_1 > س_2$ فأي العبارات التالية صحيحة دائماً.

أ. معتصم ريحان

(أ) منحنى ق(س) متزايد في [أ ، ب]
(ب) منحنى ق(س) متناقص في [أ ، ب]
(ج) منحنى ق(س) مقعر لأعلى في [أ ، ب]
(د) منحنى ق(س) مقعر لأسفل في [أ ، ب]

**الحل** لو فرضنا رسمة توضيحي




انتبه قال في السؤال $س_1 > س_2$

معطى في السؤال $ق'(س_1) - ق'(س_2) > صفر$

∴ $ق'(س_1) > ق'(س_2)$

أكبر يتكون فوق في الرسمة

اشارة $ق''(س)$: $+ + +$ ، $س_2$ ∪ $س_1$ ، (ب) (أ)

∴ ق(س) مقعر لأعلى في [أ ، ب]

أ. معتصم ريحان

---

**س٢٠١٩ الخليل تجريبي**

اذا كانت النقطة (٥ ، ٢) نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) بحيث $ق'(٥) = ١$ ، $ق'(٢) = -١$ فما قياس زاوية الانعطاف.

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $-\frac{\pi}{٤}$
(ج) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\pi$

**الحل** معطى $ظا هـ = ق'(س)$

$ق''(٥) = صفر$ ، $ق'(٥) = ١$

∴ $ظا هـ = ق'(٥) = ١$

∴ $هـ = \frac{\pi}{٤}$ أو $هـ = \pi + \frac{\pi}{٤} = \frac{٥\pi}{٤}$

---

**س٢٠١٩ تجريبي يطا**

اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة فما أكبر عدد من نقاط الانعطاف لمنحنى $ق'(س)$

(أ) ١ (ب) صفر
(ج) ٢ (د) ٣

**الحل** للحصول على نقاط الانعطاف للاقتران $ق'(س)$ لازم نجد $ق'''(س)$

ق(س) ← $ق'(س)$ ← $ق''(س)$ ← $ق'''(س)$

من الدرجة ٣ ، ٢ ، ١ ، صفر ← عدد ثابت

لا يوجد نقط انعطاف لأنه فش قيم لسين

---

**س٢٠١٩ الخليل**

اذا كان ق(س) كثير حدود وكان $ق'(١) = صفر$ ، وكان $ق''(١) \times ق''(٢) > صفر$ وكان $ق''(٢) > صفر$ فإنه

(أ) ق(١) قيمة عظمى محلية
(ب) ق(٢) قيمة عظمى محلية.
(ج) ق(١) قيمة صغرى محلية
(د) (٢ ، ق(٢)) نقطة إنعطاف.

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين مميزة

**الحل** معطى $ق''(١) \times ق''(٢) > صفر$

⇓

لازم يكون ← $\boxed{+} \times + > صفر$

بما أن $ق''(١) > صفر$ موجب ∴ ق(١) قيمة صغرى محلية حسب اختبار المشتقة الثانية

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس واليوتيوب.

ص ١٥



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س2021/ اذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − أ س$^{٢}$ وكانت النقطة (−١، ب) نقطة إنعطاف لمنحنى ق(س) فما قيمة الثابت ب

أ) −٣ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

الحل/ ق″(−١) = ٠ ، ق(−١) = ب

أ. معتصم ريحان / تابعني على اليوتيوب
00972598709519

ق′(س) = ٣س$^{٢}$ − ٢أ س

ق″(س) = ٦س − ٢أ

ق″(−١) = ٦(−١) − ٢أ = ٠ ⟸ −٢أ = ٦ ⟸ أ = −٣

ق(−١) = (−١)$^{٣}$ − −٣(−١)$^{٢}$

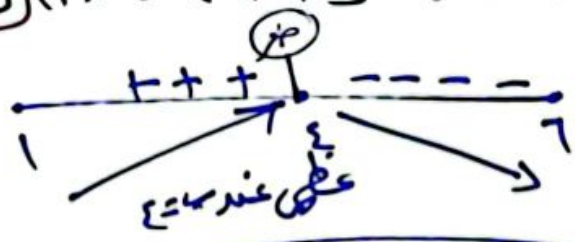
ب = −١ + ٣ ⟸ ب = ٢

حصص خاصة أون لاين زووم.

س2021/ اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على الفترة [١، ٦] وكانت ق″(س) < صفر لجميع قيم س ∈ ]١، ٦[ وكان للاقتران ثلاث نقط حرجة في [١، ٦] فإذا علمت أنّ ق′(٤) = صفر فما العبارة الصحيحة فيما يلي:

أ) ق(٤) < صفر ب) ق(٤) < ق(٣) ج) ق(٤) > ق(٣) د) ق(٤) = ق(٣)

الحل




∵ قال ق″(س) < صفر ∀ س ∈ ]١، ٦[

∴ ق″(٤) < صفر

∴ ق(٤) قيمة عظمى محلية حسب اختبار المشتقة الثانية

∴ ق(٤) > ق(٣)

أ. معتصم ريحان تابعني على الفيس واليوتيوب

س2021 دور ثاني/ ما العبارة الصحيحة دائماً من العبارات الآتية:

أ) اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية فإنّ له نقطة حرجة واحدة فقط.

ب) اذا كان ق(س) كثير حدود بحيث ق′(٢) = ٥ فإنّ ق″(٢) = صفر

ج) الاقتران ق(س) = (١ − س)$^{٤}$ يكون مقعراً للأسفل على ح.

د) اذا كان ق′(أ) ≠ صفر حيث أ ∈ لمجال ق(س)، فلا يوجد قيم قصوى محلية عند س = أ.

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أون لاين على الزوم
00972598709519

ص١١



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

حصة رقم 39

توجيهي علمي 2022

أ. معتصم ريحان

# ⊛ الأسئلة المقالية لدرس التقعر ونقط الإنعطاف ⊛

## أسئلة امتحانات سابقة

**س 2019** / اذا كان للاقتران ق(س) = س$^{٤}$ − ٤س$^{٣}$ + ك(س) نقطة إنعطاف أفقي هي النقطة (١، ٢) وكان ع(س) = ك$^{٢}$(س) إحسب ع″(١)

الحل (١، ٢) نقطة انعطاف أفقي ∴ ق(١) = ٢ (نقطة)، ق′(١) = صفر (أفقي)، ق″(١) = صفر (إنعطاف)

أ. معتصم ريحان

⇐ ق(١) = (١)$^{٤}$ − ٤(١)$^{٣}$ + ك(١)

٢ = −٣ + ك(١) ⇐ ك(١) = ٥ #

⇐ ق′(س) = ٤س$^{٣}$ − ١٢س$^{٢}$ + ك′(س)

⇐ ق′(١) = −٨ + ك′(١)

⇐ صفر = −٨ + ك′(١)

⇐ +٨ = ك′(١) #.

⇐ ع′(س) = ٢ (ك(س)) × ك′(س)

⇐ ع″(س) = ٢ (ك(س) × ك″(س) + ك′(س) × ك′(س))

⇐ ع″(١) = ٢ (ك(١) × ك″(١) + ك′(١) × ك′(١))

⇐ ع″(١) = ٢ (٥ × ١٢ + ٨ × ٨)

⇐ ع″(١) = ٢ (١٢٤) = ٢٤٨ #.

ق″(س) = ١٢س$^{٢}$ − ٢٤س + ك″(س)

ق″(١) = −١٢ + ك″(١)

صفر = −١٢ + ك″(١)

+١٢ = ك″(١) #

أ. معتصم ريحان / حصص خاصة أونلاين

**س 2019 دور ثاني** / اذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ − ٩س + ٥ ، س ∈ [−٢، ٦] أوجد كلاً مما يأتي:

① مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ② القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

③ مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لاقتران ق(س).

الحل ق′(س) = ٣س$^{٢}$ − ٦س − ٩ = ٠ ⇐ س$^{٢}$ − ٢س − ٣ = ٠ ⇐ س = ٣ أو س = −١

ق″(س) = ٦س − ٦ = صفر ⇐ س = ١ #

اشارة ق′(س): ++ ، −− ، ++

سلوك ق(س): −٢ ، −١ ، ٣ ، ٦

صغير كبير ، صغير كبير

ق(س) تزايد [−٢، −١] و [٣، ٦]

ق(س) تناقص [−١، ٣]

للاقتران ق(س) قيمة قصوى عظمى محلية عند س = −١

وقيمتها ق(−١) = ١ (−١، ١٠) عظمى محلية

للاقتران ق(س) قيمة قصوى صغرى محلية عند س = ٣

وقيمتها ق(٣) = −٢٢ (٣، −٢٢) صغرى محلية

للاقتران قيمة صغرى محلية عند (−٢، ٣)

للاقتران قيمة عظمى محلية عند (٦، ٥٩)

ص ١

اشارة ق″(س): − − − ، + + +

سلوك ق(س): −٢ ، ١ ، ٦

ق(س) مقعر لأسفل في ]−٢، ١[

ق(س) مقعر لأعلى في ]١، ٦[

⊛ لاحظ عند (١، −٦) نقطة انعطاف للاقتران ق(س)

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس واليوتيوب

حصص خاصة أونلاين zoom

00972598709519



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 2019 دور ثاني / اذا كان ق(س) = س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س + د ، ب ، جـ ، د ∈ ح

بحيث ق(٠) = ٤ وكان للاقتران ق(س) نقطة انعطاف عند س = ١

ومعادلة المماس لمنحنى ق(س) عند نقطة الإنعطاف هي ٢س + ص − ٥ = صفر أوجد قاعدة الإقتران

الحل: ق(٠) = (٠)$^{٣}$ + ب(٠)$^{٢}$ + جـ(٠) + د

$\boxed{٤ = د}$ #

ق″(١) = صفر ← لأنه عندها انعطاف

ق′(س) = ٣س$^{٢}$ + ٢ب س + جـ

ق″(س) = ٦س + ٢ب

ق″(١) = ٦(١) + ٢ب

صفر = ٦ + ٢ب

$\boxed{-٣ = ب}$ #

الميل = ظا هـ = ق′(١) = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

∴ ق′(١) = $\frac{-٢}{١}$ = −٢

ق′(١) = ٣(١)$^{٢}$ + ٢ب(١) + جـ

−٢ = ٣ + ٢ × −٣ + جـ

−٢ + ٣ = جـ

$\boxed{١ = جـ}$ #

أ. معتصم ريحان

∴ ق(س) = س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ + س + ٤ ← قاعدة الاقتران

أ. معتصم ريحان / حصص خاصة الكترونية مميزة أونلاين 00972598709519

---

س 2020 / اذا كان ق(س) = $-\frac{١}{٢}$ جا$^{٢}$س + $\frac{١}{٤}$ جتا٢س + $\frac{٥}{٤}$ ، س ∈ ]٠ ، π[ أوجد :-

① مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ② نقط الإنعطاف ③ زاوية الإنعطاف.

الحل: ق(س) = $-\frac{١}{٢}$ جا$^{٢}$س + $\frac{١}{٤}$ (١ − ٢جا$^{٢}$س) + $\frac{٥}{٤}$

ق(س) = $-\frac{١}{٢}$ جا$^{٢}$س + $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٢}$ جا$^{٢}$س + $\frac{٥}{٤}$

ق(س) = − جا$^{٢}$س + $\frac{٣}{٢}$

ق′(س) = $\boxed{-٢(\text{جا س}) \times \text{جتا س}}$ متطابقة

ق′(س) = − جا٢س

ق″(س) = − جتا٢س × ٢ = صفر

⇐ جتا٢س = صفر

٢س ← ٢س = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ $\boxed{س = \frac{\pi}{٤}}$ ∈ ]٠ ، π[

٢س ← ٢س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ⇐ $\boxed{س = \frac{٣\pi}{٤}}$ ∈ ]٠ ، π[

④ زوايا الانعطاف

ظا هـ = ق′($\frac{\pi}{٤}$) = −١ ⇐ ∴ هـ = $\frac{٣\pi}{٤}$

ظا هـ = ق′($\frac{٣\pi}{٤}$) = ١ ⇐ ∴ هـ = $\frac{\pi}{٤}$

أستخدمنا متطابقة جتا ضعف الزاوية

$\boxed{\text{جتا٢س} = ١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}}$

قبل ما نشتق أسهل.

اشارة ق″(س): − − − ، + + + ، − − −

سلوك ق(س): صفر ∩ $\frac{\pi}{٤}$ ∪ $\frac{٣\pi}{٤}$ ∩ π

ق(س) مقعر لأسفل ]صفر ، $\frac{\pi}{٤}$[ ، ]$\frac{٣\pi}{٤}$ ، π[

ق(س) مقعر لأعلى ]$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$[

* ($\frac{\pi}{٤}$ ، ١) نقطة إنعطاف

* ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، ١) نقطة انعطاف

لتحقق الشروط الثلاثة

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

أ. معتصم ريحان

تابعين على الفيس واليوتيوب

س ٢٠٢٠ دور ثاني

اذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{س}$ + ٢ أوجد ∴

① مجالات التقعر للأعلى وللأسفل ② نقط الانعطاف ③ زوايا الإنعطاف.

الحل: ق(س) = $س^{\frac{1}{3}}$ + ٢

قَ(س) = $\frac{1}{3}$ $س^{-\frac{2}{3}}$ ⟸ قً(س) = $\frac{-2}{9}$ $س^{-\frac{5}{3}}$ = صفر

رجع شكله لأصله ضروري

⟸ $\frac{-2}{9\, س^{\frac{5}{3}}}$ = صفر البسط ≠ صفر

المقام = صفر عندما س = ٠ ∴ قً(٠) = غ.م

① ق(س) مقعر لأعلى ]-∞ ، صفر[

ق(س) مقعر لأسفل ]صفر ، ∞[

غ.م

اشارة قً(س) ← +++ | ---- → ∞

سلوك ق(س) ∪ صفر ∩

② (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف لأنها حققت الشروط الثلاثة. أ. معتصم ريحان

(٠ ، ٢)

ق(س) متصل عند س = ٠

قً(٠) = غير موجودة (نقطة حرجة).

الاقتران يغير من سلوكه عند س = صفر

ضروري ترجع الاقتران لأصله اذا كان الأس سالب

③ زاوية الانعطاف = ظا هـ = قَ(٠) = $\frac{1}{3(0)^{\frac{2}{3}}}$ = غير موجودة

∴ الزاوية التي الظل عندها غير موجود هي هـ = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{2}$ ، ....

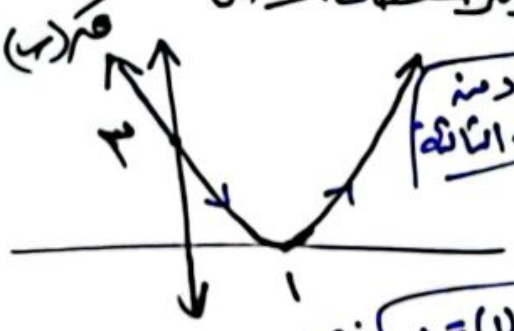
أ. معتصم ريحان / حصص خاصة أونلاين 00972598709519

---

س ٢٠٢٠ دور ثاني

يمثل الشكل المجاور منحنى قَ(س) لكثير حدود ق(س) من الدرجة الثالثة

أوجد قاعدة الاقتران إذا علمت أن منحناه يمر بنقطة الأصل




كثير حدود من الدرجة الثالثة

الحل: ق(٠) = صفر لأنه يمر بنقطة الأصل

ق(س) = أ $س^3$ + ب $س^2$ + جـ س + د

ق(٠) = د ⟸ ∴ د = صفر #

من الشكل نستنتج أن قَ(١) = ٠ ، قَ(صفر) = ٣

قً(١) = ٠ نستنتج

اشارة قً(س) ← --- | +++ →

سلوك ق(س) ∩ ١ ∪

قَ(س) = ٣ أ $س^2$ + ٢ ب س + جـ

قَ(٠) = جـ ⟸ جـ = ٣ #

أ. معتصم ريحان

قً(س) = ٦ أ س + ٢ ب

قً(١) = ٦ أ (١) + ٢ ب

صفر = ٦ أ + ٢ ب ①

قَ(١) = ٣ أ $(1)^2$ + ٢ ب (١) + ٣

صفر = ٣ أ + ٢ ب + ٣ ← جـ

-٣ = ٣ أ + ٢ ب ②

قاعدة الاقتران

∴ ق(س) = $س^3$ - ٣ $س^2$ + ٣ س

نحل معادلة ① مع ② بالحذف ينتج أ = ١ ، ب = -٣



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

بداية ⟸ الجزء الثاني من الحصة رقم 39 #

**س٢٥ الدور الثاني**

اذا كان للاقتران ق(س) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س + جـ نقطة إنعطاف عند (-١، ٨) وكان قياس زاوية الإنعطاف عند نقطة الإنعطاف تلك يساوي $\frac{٣\pi}{٤}$ أوجد قيم الثوابت أ، ب، جـ

أ. معتصم ريحان

الحل: نستنتج من معطيات السؤال أن ق(-١) = ٨ و ق''(-١) = صفر

* ظل زاوية الانعطاف = ق'(-١) = ظا($\frac{٣\pi}{٤}$) ⟸ ق'(-١) = -١

ق(-١) = (-١)$^{٣}$ + أ(-١)$^{٢}$ + ب(-١) + جـ

٨ = -١ + أ - ب + جـ

٩ = أ - ب + جـ ← (١)

* ق'(س) = ٣س$^{٢}$ + ٢أ س + ب

ق''(س) = ٦س + ٢أ

ق''(-١) = ٦(-١) + ٢أ

صفر = -٦ + ٢أ

٣ = أ #

ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ = -١

لاحظ ظا ١٣٥ = -١

* ق'(س) = ٣س$^{٢}$ + ٢أ س + ب

ق'(-١) = ٣(-١)$^{٢}$ + ٢أ(-١) + ب

-١ = ٣ - ٢أ + ب

-١ = ٣ - ٢×٣ + ب

-١ + ٣ = ب ⟸ ب = ٢ #

أ. معتصم ريحان

الآن نعوض في معادلة (١) ٩ = أ - ب + جـ

٩ = ٣ - ٢ + جـ

٨ = جـ #

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس والبوتيوب

---

**س٢٦**

اذا كان ق(س) = ١٢ + س$^{٢}$ + ٢ لو$_{B}$(س - ١) ، س > ١ فجد:

(١) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل (٢) نقطة الإنعطاف (إن وجدت أ).

الحل: ق'(س) = ٢س + ٢ × $\frac{١}{س-١}$

ق''(س) = ٢ + $\frac{-٢ \times (١)}{(س-١)^{٢}}$ = صفر

⟸ $\frac{-٢}{(س-١)^{٢}}$ = -٢ ⟸ (س - ١)$^{٢}$ = ١

⟸ س - ١ = ± ١ ⟸ س = ٢ ، س = صفر ← مرفوضة ∉ س > ١

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أون لاين مميزة
0097259870951 9
تابعني على الفيس والبوتيوب

اشارة ق''(س): ○ - - - - ● + + + ∞

سلوك ق(س): ١ ⌒ ٢ ⌣ ∞

الفترات دائماً مفتوحة في التقعر.

ق(س) مقعر للأسفل ]١، ٢[

ق(س) مقعر للأعلى ]٢، ∞[

(٢، ١٦) نقطة انعطاف لتحقق شروطها الثلاثة

ص٦



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س٢٤/ اذا كان ق(س) = س$^{٢}$ + $\frac{ب}{س}$ ، س ≠ صفر ب ∈ ح باستخدام اختبار المشتقة الثانية بين أن منحنى الاقتران ق(س) لا يأخذ أي قيمة عظمى محلية في مجاله

الحل: ق'(س) = $\frac{٢س}{١}$ + $\frac{-ب}{س^{٢}}$ = صفر ⟸ ٢س$^{٣}$ − ب = ٠ ⟸ $\boxed{س^{٣} = \frac{ب}{٢}}$

⟸ $\boxed{س = \sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}}$

ق''(س) = ٢ + $\frac{ب \times ٢س}{س^{٤}}$

أ. معتصم ريحان / تابعني على اليوتيوب

ق''(س) = ٢ + $\frac{٢ب}{س^{٣}}$ ⟸ ق''$\left(\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}\right)$ = ٢ + $\frac{٢ب}{\left(\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}\right)^{٣}}$

⟸ ق''$\left(\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}\right)$ = ٢ + $\frac{٢ب}{\frac{ب}{٢}}$ = ٢ + ٢$\cancel{ب}$ × $\frac{٢}{\cancel{ب}}$ = ٢ + ٤ = ٦

∵ ق''$\left(\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}\right)$ = ٦ > صفر ∴ ق$\left(\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}\right)$ قيمة صغرى محلية

∴ اشارة ق''(س) − − − − ٠ + + + +

سلوك ق(س) ↘ $\sqrt[٣]{\frac{ب}{٢}}$ ↗

∴ الاقتران ق(س) لا يأخذ قيمة عظمى محلية في مجاله

أ. معتصم ريحان

س٢٥/ اذا كان ق(س) = أس$^{٣}$ + ٣س$^{٤}$ + ٢ب حيث أ، ب ∈ ح وكان لمنحنى ق(س) قيمة عظمى محلية قيمتها ٨ وله نقطة انعطاف عند س = ١ فأوجد قيمة الثابتين أ، ب

الحل: حاول تحل بنفسك يا بطل

أ. معتصم ريحان

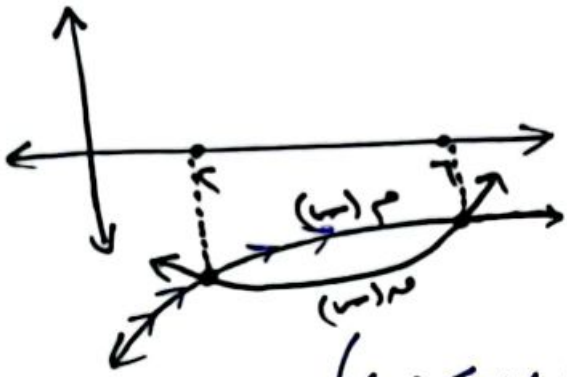
00972598709519

ص ٥



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

دور ثاني 2021 / الشكل المجاور يبين منحني كل من الاقترانين ق(س)، م(س) في الفترة [٢، ٦] بحيث ك(س) = $\text{ه}^{\text{ق(س)}\,\text{م(س)}}$، بين أن الاقتران ك(س) مقعر لأعلى في الفترة ]٢، ٦[




الحل: معطى ك(س) = $\text{ه}^{\text{ق(س)} \times \text{م(س)}}$

أ. معتصم ريحان / تابعين في الفيس واليوتيوب

⇐ ك''(س) = $\text{ه}^{\text{ق(س)} \times \text{م(س)}}$ × (ق(س) × م''(س) + م'(س) × ق'(س)) = صفر

أ. معتصم ريحان

∴ ق(س) × م''(س) + (م'(س))$^{٢}$ = صفر

∴ ⊖ × ⊖ + (+)$^{٢}$ =

⊕ + ⊕ = ⊕

∴ ك''(س) موجب في ]٢، ٦[

∴ ك(س) مقعر للأعلى في ]٢، ٦[

الاقتران الأسي الطبيعي لا يساوي صفر أبداً لأنه دائماً موجب

* لاحظ من الرسم أن:

م(س) سالب في [٢، ٦] لأنه يقع تحت محور السينات.

ق(س) سالب في [٢، ٦] لأنه يقع تحت محور السينات.

م(س) متزايد ∴ ⇐ م'(س) ⊕ في ]٢، ٦[

م(س) مقعر للأسفل ∴ ⇐ م''(س) ⊖ في ]٢، ٦[

ق(س) متزايد ∴ ⇐ ق'(س) ⊕ في ]٢، ٦[

ق(س) مقعر للأعلى ∴ ق''(س) ⊕ في ]٢، ٦[

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة

00972598709519

ص6



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

**خارجي** اذا كانت ق′(−١) = ق′(٢) = صفر ، ق″(س) = −٣س أوجد

① نقط القيم القصوى ونوعها ② فترات التزايد والتناقص ③ فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقط الإنعطاف.

أ. معتصم ريحان

**الحل** معطى ق″(س) = −٣س

ق″(−١) = −٣ × −١ = ٣ > صفر

∴ يوجد عند س = −١ قيمة قصوى صغرى محلية

أصفار المشتقة الأولى

ق″(٢) = −٣ × ٢ = −٦ < صفر

∴ يوجد عند س = ٢ قيمة قصوى عظمى محلية

ق′(س) ∞ − − − | صفر + + + | صفر − − − ∞

سلوك ق(س) ↘ −١ ↗ ٢ ↘

(٢ ، ق(٢)) قيمة عظمى محلية

(−١ ، ق(−١)) قيمة صغرى محلية

* ق(س) متناقص ]−∞ ، −١] ، [٢ ، ∞[

ق(س) متزايد [−١ ، ٢]

* ق″(س) = −٣س = صفر

∴ س = صفر ⟸

اشارة ق″(س) ∞ − − − | صفر + + + ∞

سلوك ق(س) ∩ صفر ∪

ق(س) مقعر للأعلى ]−∞ ، صفر[ ، ق(س) مقعر للأسفل ]صفر ، ∞[

أ. معتصم ريحان حصص خاصة أونلاين مميزة.

---

**٢٠٢٠ تجريبي نابلسي** اذا كان للإقتران ق(س) = ٣ جا٢س + ل(س) نقطة إنعطاف أفقي هي $(\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2})$ وكان ك(س) = $(ل(س)+٢)^2$ ، فجد ك″$(\frac{\pi}{2})$

**الحل** $\boxed{ق(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}}$ نقطة ، $\boxed{ق′(\frac{\pi}{2}) = صفر}$ أفقي ، $\boxed{ق″(\frac{\pi}{2}) = صفر}$ انعطاف

ك′(س) = ٢ (ل(س) + ٢) × ل′(س)

ك′(س) = (٢ل(س) + ٤) × ل′(س)

ك″(س) = (٢ل(س) + ٤) × ل″(س) + ل′(س) × (٢ل′(س))

ك″$(\frac{\pi}{2})$ = (٢ل$(\frac{\pi}{2})$ + ٤) × ل″$(\frac{\pi}{2})$ + ل′$(\frac{\pi}{2})$ × ٢ل′$(\frac{\pi}{2})$ —— *

ك″$(\frac{\pi}{2})$ = (٢ × $\frac{3\pi}{2}$ + ٤) × صفر + ٦ × ٢ × ٦ = $\boxed{٧٢}$ #.

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

ق$(\frac{\pi}{2})$ = ٣ جا $\frac{2\pi}{2}$ + ل$(\frac{\pi}{2})$ ⟸ $\boxed{ل(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}}$ ①

ق′(س) = ٣ جتا٢س × ٢ + ل′(س) ⟸ ق′$(\frac{\pi}{2})$ = ٦ جتا $\frac{2\pi}{2}$ + ل′$(\frac{\pi}{2})$ ⟸ $\boxed{ل′(\frac{\pi}{2}) = ٦}$ ②

ق″(س) = ٦ × −جا٢س × ٢ + ل″(س) ⟸ ق″$(\frac{\pi}{2})$ = −١٢ جا $\frac{2\pi}{2}$ + ل″$(\frac{\pi}{2})$ ⟸ $\boxed{ل″(\frac{\pi}{2}) = صفر}$ ③

الآن نأخذ معادلة ① مع ② مع ③ ونعوضهم في معادلة *

ص 7

0097259870951 9

حصص خاصة أونلاين مميزة.



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

السلام عليكم ورحمة الله

هذا التلخيص المميز جداً هدية جارية مني وعن أهلي وأموات وجميع موتى المسلمين .

* هذا التلخيص موجود بالكامل فيديوهات مصورة وهي عبارة عنه حصص خاصة مميزة على الزووم ، اذا أردت التسجيلات كاملة رسلني على الواتس 00972598 709519 أ. معتصم ريحان

* فيديوهات هذا التلخيص بنفس ترتيب التلخيص وهذا هو الشرح المميز جداً والذي لا يوجد في فلسطين مثله . بفضل الله .

* بعض هذه الفيديوهات موجودة بشكل عام للكل على قناتي على اليوتيوب باسم (( معتصم ريحان رياضيات توجيهي )) وباقي الفيديوهات موجودة بروابط خاصة ملنه يطلبها واتس .

* اعتمد بشكل كامل في هذا التلخيص وبإذن الله ستحصل على العلامة الكاملة .

* لا تنسى أن تتابع صفحتي الرسمية على الفيس بوك وقناتي على اليوتيوب وكلاهما باسم (( معتصم ريحان رياضيات توجيهي ))

* بشرى سارة لكل طلاب فلسطين هذا التلخيص شامل ومجاني بالكامل لكل طلاب فلسطين وبإمكانك ارساله لمنه تحب لكنه فيديوهات هذا التلخيص غير مجانية وانا أردت الحصول عليها رسلني واتس .

أ. معتصم سلام ريحان
00972598 709519

تابعني على مجموعات الواتس والتليجرام ضروري .



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الوحدة الثانية

الدرس الخامس

# (( تطبيقات القيم القصوى ))

الحصة رقم 40

توجيهي علمي 2022

حصص خاصة أونلاين

أ. معتصم ريحان

* قبل البدء في الدرس سيلزمك قوانين مهمة جداً .

1) المستطيل
- محيط المستطيل = ٢ × ( الطول + العرض )
- مساحة المستطيل = الطول × العرض

2) المربع
- محيط المربع = ٤ × طول الضلع
- مساحة المربع = طول الضلع × نفسه = (طول الضلع)$^2$

أ. معتصم ريحان

3) المثلث
- محيط المثلث = مجموع أضلاع المثلث الثلاثة .
- مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الإرتفاع
- أو مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × حاصل ضرب أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

4) الدائرة
- محيط الدائرة = ٢ π نق
- مساحة الدائرة = π نق$^2$

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة

00972598709519

تابعني على الفيس واليوتيوب

5) الكرة
- مساحة سطح الكرة = ٤ π نق$^2$
- حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق$^3$

6) المخروط
- المساحة الجانبية = π × نق × ل
- المساحة الكلية = π نق ل + π نق$^2$
- حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × π نق$^2$ ع

7) الإسطوانة
- المساحة الجانبية = ٢ π نق ع
- المساحة الكلية = ٢ π نق ع + ٢ π نق$^2$
- حجم الاسطوانة = π نق$^2$ ع

أ. معتصم ريحان

8) شبه المنحرف
- محيط شبه المنحرف = مجموع أضلاعه .
- مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ × ( مجموع القاعدتين المتوازيتين ) × الارتفاع

(ص1)



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

(9) المكعب

المساحة الجانبية للمكعب = ٤ × (الضلع)$^{٢}$

المساحة الكلية للمكعب = ٦ × (الضلع)$^{٢}$

حجم المكعب = (الضلع)$^{٣}$

أ. معتصم ريحان

تابعني على العيني واليوتيوب.

(10) متوازي المستطيلات

المساحة الجانبية = (الطول + العرض) × ٢ × الإرتفاع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + (٢ × مساحة القاعدة)

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الإرتفاع

أ. معتصم ريحان

(11) قانون المسافة بين نقطتين

$$ف = \sqrt{(ص_٢ - ص_١)^٢ + (س_٢ - س_١)^٢}$$

(12) قانون منتصف قطعة مستقيمة

$$س = \frac{س_١ + س_٢}{٢} \quad ، \quad ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$$

أ. معتصم ريحان 00972598709519

(13) الهرم الرباعي المنتظم

المساحة الجانبية = ٢ × طول القاعدة × الارتفاع الجانبي للهرم

المساحة الكلية = ٢ × القاعدة × الارتفاع الجانبي + (طول ضلع القاعدة)$^{٢}$

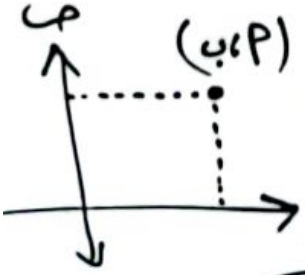
حجم الهرم الرباعي المنتظم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع الرأسي.

(14) إذا تشابه مثلثان فإن زواياهم متساوية وأضلاعهم أطوالها متناسبة

الأضلاع متناسبة

$$\frac{ب جـ}{ع ص} = \frac{أ جـ}{س ع} = \frac{أ ب}{س ص}$$

(15) النقطة (أ ، ب)




أ هو المقطع السيني وهو بعد العدد أ عن محور الصادات.

ب هو المقطع الصادي وهو بعد العدد ب عن محور السينات.

أ. معتصم ريحان / تابعني على العيني واليوتيوب / حصص خاصة أونلاين مميزة



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

## ⊛ خطوات حل أي سؤال تطبيقات على القيم القصوى :-

1) ارسم أولاً حسب معطيات السؤال وركز في الرسم يا فنان .

2) حدد المعادلة الأساسية وحدد المعادلة المساعدة .

لمعرفة المعادلة أما العلاقة الأساسية يكون موجود فيها أكبر أو أصغر أو أي كلمة على وزن أفعل تدل على أكبر شيء أو أصغر شيء .

3) وحد الرموز في المعادلة الأساسية .

أ. معتصم ريحان
00972598709519

4) اشتق وساوي بصفر .

5) افحص النقطة الناتجة هل هي عظمى أم صغرى وهنا السؤال بيغششك .

6) جد المطلوب من السؤال .

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب
حصص خاصة أونلاين

7) صلي على النبي .

⊛ إذا بدك كل الخطوات بمقولة وحدة علشان أسهل عليك الحفظ انفضل يا حبيبي . ⇓

ارسم علاقتين برموز موحدة واشتق وصفر

أ. معتصم ريحان

وافحص وجد المطلوب .

مثال ① ص 84 / عددان موجبان مجموعهما ٦٠ ، جد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

نفرض العددين س ، ص

الحل

بدنا علاقتين

أساسية

حاصل ضربهما

م = س × ص

م = س × (٦٠ − س)

م = ٦٠س − س²

م' = ٦٠ − ٢س = صفر

∴ س = ٣٠

∴ ص = ٣٠

مساعدة

س + ص = ٦٠

ص = ٦٠ − س

رُحنا نوحد الرموز

⊛ ما تنسى تتحقق إما باختبار المشتقة الأولى أو الثانية

عند س = ٣٠ قيمة عظمى

قم(س) + + + ٣٠ − − − −

ارجع عوض وجيب العدد الثاني

العددان هما (٣٠) ، (٣٠)

ص 3

أ. معتصم ريحان

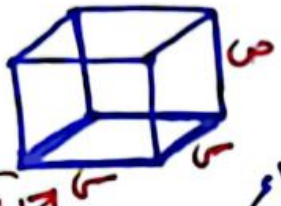


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال ② ص 84

يُراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون المقوى حجمه ٨ دسم$^{٣}$ ، جد أبعاده بحيث تكون تكلفة تصنيعه أقل ما يمكن (( سعر المتر ثابت ))

نُريد علاقتين




القاعدة مربعة

الشكل له ٤ جوانب وقاعدتين مربعتين

أساسية

التكلفة أقل ما يمكن

نريد أولاً أن نجد كمية الكرتون المطلوبة وذلك بحساب المساحة الكلية للصندوق

= مساحة الجوانب + مساحة القاعدتين

مساعدة

الحجم = الطول × العرض × الإرتفاع

٨ = س × س × ص

٨ = س$^{٢}$ ص

$\frac{٨}{س^{٢}}$ = ص

يلا نروح نوحد الرموز

ت = ٤ × (س ص) + ٢ س$^{٢}$

ت = ٤ × (س × $\frac{٨}{س^{٢}}$) + ٢ س$^{٢}$

ت = $\frac{٣٢}{س}$ + ٢ س$^{٢}$ ⟸ يلا اشتق وصفر ⟸ ت' = $\frac{-٣٢}{س^{٢}}$ + ٤ س = صفر

⟸ ٤ س = $\frac{٣٢}{س^{٢}}$ ⟸ س$^{٣}$ = ٨ ⟸ $\boxed{س = ٢ \text{ دسم}}$

ت' ---- ٢ +++

قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = ٢

* التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون قاعدة الصندوق مربعة طول ضلعها ٢ دسم وارتفاع الصندوق ٢ دسم يعني يصبح الشكل مكعب منتظم

* عندما ترى أي سؤال في الامتحان على تطبيقات القيم القصوى اقرأ السؤال جيداً وأفهمه أولاً.

* وإذا بدك تعرف السؤال أنه على درس تطبيقات القيم القصوى ستجد مئة كلمة على وزن أفعل مثل ( أكبر أو أصغر أو أقل ما يمكن أو أكبر ما يمكن )

أ. معتصم ريحان / حصص خاصة أونلاين مميزة Zoom

00972598709519

ص 4

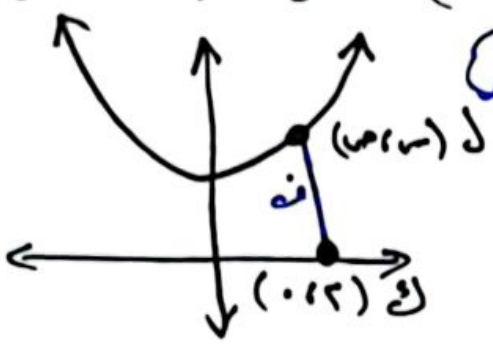


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال (3) ص 85

جد أقصر مسافة بين النقطة ك (٢، ٠) ومنحنى العلاقة $ص^2 - س^2 = ٨$

أرسم علاقتين برموز موحدة واشتق وصفر




الحل

نريد علاقتين

أساسية

أ. معتصم ريحان

أقصر مسافة بين نقطتين (٢، ٠) ، (س، ص)

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^2 + (ص_٢ - ص_١)^2}$

$ف = \sqrt{(س - ٢)^2 + (ص - ٠)^2}$

$ف = \sqrt{(س - ٢)^2 + ص^2}$

$ف = \sqrt{(س - ٢)^2 + ٨ + س^2}$

$ف = \sqrt{س^2 - ٤س + ٤ + ٨ + س^2}$

$ف = \sqrt{٢س^2 - ٤س + ١٢}$

$ف' = \frac{٤س - ٤}{٢\sqrt{٢س^2 - ٤س + ١٢}} = صفر \Leftarrow ٤س - ٤ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ١}$ #

مساعدة

معطى منحنى العلاقة

$ص^2 - س^2 = ٨$

$\Leftarrow ص^2 = ٨ + س^2$

يلا نروح نوحد الرموز

شايف المعادلة صارت ما أحلاها يلا اشتق وصفر

الآن بنرجع نعوض لإيجاد قيمة ص $\Leftarrow ص^2 = ٨ + س^2 \Leftarrow ص^2 = ٩$

$\Leftarrow \boxed{ص = \pm ٣}$ #

أ. معتصم ريحان / تابعين على الفيس واليوتيوب

الآن المطلوب أقصر مسافة يعني بنرجع نعوض في قانون المسافة

$ف = \sqrt{(س - ٢)^2 + ص^2} \Leftarrow ف = \sqrt{(١ - ٢)^2 + (٣)^2} \Leftarrow \boxed{ف = \sqrt{١٠}}$ #

وحدة

أ. معتصم ريحان

خطوة الفحص باختبار المشتقة الأولى أو إذا بدك الثانية ضرورية عليها علامة

ف'(س) $- - -$ ١ $+ + +$

سلوك ف(س) عند س = ١ قيمة صغرى مطلقة

أ. معتصم ريحان

ص ٤

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة على الزووم

00972598709519

تابعين على الفيس واليوتيوب



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال ④ ص 86

سلك طوله ٥٦ سم قُسِّم إلى جزئين ثُنِي أحدهما على شكل مربع، والجزء الآخر على شكل دائرة، ما أبعاد كل من المربع والدائرة ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن ؟؟

أ. معتصم ريحان

الحل أ. معتصم ريحان

محيط المربع = ٤ × طول الضلع

مساحة المربع = (الضلع)$^2$

$\boxed{٥٦ - س = ٤ ص}$

$\frac{٥٦ - س}{٤} = ص$

$\boxed{١٤ - \frac{١}{٤} س = ص}$

محيط الدائرة = ٢ نق π

مساحة الدائرة = π نق$^2$

$\boxed{س = ٢ نق \pi}$

$\frac{س}{٢\pi} = نق$

$\boxed{\frac{س^2}{٤\pi^2} = نق^2}$

نريد علاقتين

أساسية: مجموع مساحة الدائرة ومساحة المربع أقل ما يمكن

مساعدة: أ. معتصم ريحان 00972598709519

$م = \pi نق^2 + ص^2$

يلا نروح نوحد الرموز

$م = \pi \times \frac{س^2}{٤\pi^2} + (١٤ - \frac{١}{٤} س)^2$

يلا نروح نوحد الرموز

$م = \frac{س^2}{٤\pi} + (١٤ - \frac{١}{٤} س)^2$ ← يلا نشتق لأنه المعادلة أحلوت يا حلوين. أ. معتصم ريحان

$م' = \frac{٢}{٤\pi} س + ٢ (١٤ - \frac{١}{٤} س) \times (\frac{-١}{٤}) = صفر$

$م' = \frac{س}{٢\pi} + \frac{-١٤}{٢} + \frac{١}{٨} س = صفر$

$م' = (\frac{١}{٢\pi} + \frac{١}{٨}) س - ٧ = صفر \Leftarrow \frac{٨ + ٢\pi}{١٦\pi} س = ٧$

$\Leftarrow س = \frac{٧ \times ١٦\pi}{٨ + ٢\pi} = \frac{١١٢\pi}{٢(٤+\pi)} = \boxed{\frac{٥٦\pi}{٤+\pi}}$ # . ← س

م'(س) سلوك م(س) صغرى مطلقة

$- - - \quad \frac{٥٦\pi}{٤+\pi} \quad + + +$

الآن بنرجع نعوض لإيجاد نق ⇐ $نق^2 = \frac{(\frac{٥٦\pi}{٤+\pi})^2}{٤\pi^2}$ ⇐ $نق = \frac{\frac{٥٦\pi}{٤+\pi}}{٢\pi}$

$\Leftarrow نق = \frac{٥٦\pi}{٤+\pi} \times \frac{١}{٢\pi} = \frac{٥٦\pi}{٨\pi + ٢\pi^2} = \frac{٥٦}{٨ + ٢\pi} = \boxed{\frac{٢٨}{٤ + \pi}}$ ← نق

$ص = ١٤ - \frac{١}{٤} \times س \Leftarrow ص = ١٤ - \frac{١}{٤} \times \frac{٥٦\pi}{٤+\pi} = ١٤ - \frac{٥٦\pi}{٤(٤+\pi)}$

$\Leftarrow ص = \frac{١٤}{١} - \frac{١٤\pi}{٤+\pi} = \frac{١٤(٤+\pi) - ١٤\pi}{٤+\pi} = \boxed{\frac{٥٦}{٤+\pi}}$ ← ص

أ. معتصم ريحان

ص 6



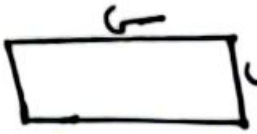
CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

مثال 5 / ص 86 أوجد أقل محيط ممكن لمستطيل مساحته ١٦ سم² .

نريد علاقتين

مسألة: أقل محيط ممكن لمستطيل

مساعدة: معطينا مساحة المستطيل




فرضنا طول المستطيل س
وعرض المستطيل ص

مساحة المستطيل = س × ص

محيط المستطيل = ٢ (س + ص)

مساحة المستطيل = س × ص

١٦ = س × ص

ص = ١٦ / س

وجدنا المجهول

م = ٢ (س + ص)

م = ٢ (س + ١٦/س)

م = ٢س + ٣٢/س

طبعاً السالب مرفوض لأننا نتكلم عن طول

س = ±٤ ⇐ س² = ١٦ ⇐ ٢س² = ٣٢ ⇐ م = ٠ ⇐ م = ٢ − ٣٢/س²

بالافتراض ونجيب ص = ١٦/س ⇐ ص = ١٦/٤ = ٤ (١)

م: − − − | + + +  (٤)

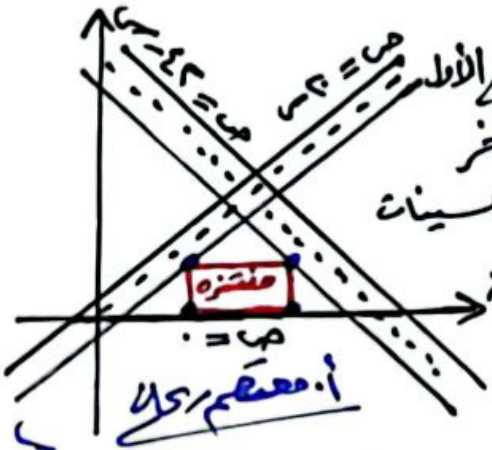
م معرفة عند س = ٤ وتأخذ قيمة صغرى مطلقة

∴ أقل محيط ص ١٦ سم

أ. معتصم ريحان تابعني لكل الفيس والبوتيوب

نشاط ٢ / ص 83 فكرة السؤال هي :

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه في الربع الأول حيث يقع رأس على المستقيم ص = ٢س والرأس الآخر على المستقيم ص = ٤٢ − س ، والرأسان المتبقيان على محور السينات فجد مساحة المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن




أ. معتصم ريحان

نريد علاقتين

مساعدة

مساحة المنتزه أكبر ما يمكن

م = الطول × العرض

م = (س − ك) × (٢٠ك)

محط ص = ٢٠ك

محط ص = ٤٢ − س

∴ ٢٠ك = ٤٢ − س

س = ٤٢ − ٢٠ك

م = ٢٠ك س − ٢٠ك²

م = ٢٠ك (٤٢ − ٢٠ك) − ٢٠ك²

م = ٨٤٠ك − ٤٠٠ك² − ٢٠ك²

م = − ٤٢٠ك² + ٨٤٠ك

م = − ٨٤٠ك + ٨٤٠ = ٠

ك = ١

أرجع لمجهول

م: + + + | − − −  (١)

عظمى عند ١

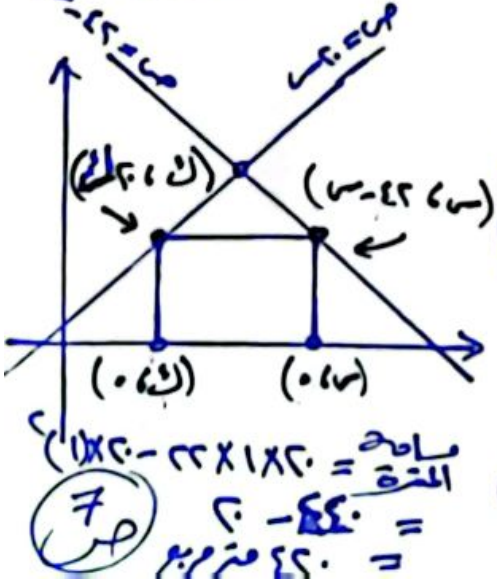
∴ س = ٤٢ − ٢٠ × ١

س = ٢٢

مساحة المنتزه = ٢٠ × ١ × ٢٢ − ٢٠ × ١²

= ٤٢٠ − ٢٠

= ٤٢٠ متر مربع




ص 7



تم مسحه ضوئيا بـ CamScanner

حصة رقم 41
توجيهي علمي 2022
أ. معتصم ريحان

# (( حل أسئلة درس تطبيقات القيم القصوى ))

تمارين ومسائل (٢-٥) ص ٨٧ : (2020 دور ثالث)

س١/ يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل في أرضه وذلك بإحاطتها بسياج فإذا كان لديه ٨٠ متراً من الأسلاك، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها.

أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان

أساسية

مساحة أكبر حديقة

م = الطول × العرض

م = س × ص

م = (٤٠ − ص) × ص

م = ٤٠ ص − ص²

م' = ٤٠ − ٢ ص = صفر ⟸ ص = ٢٠ أرجع عوض في العلاقة المساعدة لإيجاد س

∴ س = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠

مساعدة

محيط المستطيل = ٨٠

٢ (س + ص) = ٨٠

س + ص = ٤٠

س = ٤٠ − ص

يلا نروح نوحد الرموز

خطوة الفحص والتأكد

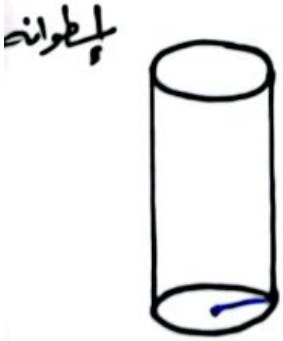
م' + + + ٢٠ − − −

المطلوب المساحة للحديقة ⟸ م = س × ص ⟸ م = ٢٠ × ٢٠ = ٤٠٠ م²

(*) حصص خاصة أون لاين مميزة.

أ. معتصم ريحان

س2 ص87/ مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ π سم³، فإذا علمت أن سعر كل ١ سم³ من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة، يُعادل ثلاث أمثال سعر ١ سم³ من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة.




نريد علاقتان

أساسية

مقلمة ذات تكلفة أقل

لاحظ أن تكلفة الجوانب تختلف عن تكلفة القاعدة.

يعني لو فرضنا تكلفة ١ سم³ من بلاستيك الجوانب = س، فإن تكلفة ١ سم³ من بلاستيك القاعدة = ٣ س.

مساعدة

حجم الأسطوانة = π × نق² × ع

١٩٢ π = π نق² ع

ع = ١٩٢ / نق²

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أون لاين مميزة

ص١ 00972598709519

نكمل في الصفحة القادمة



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

تابع حل س2 ص87

نريد علاقتان

أساسية — أ. معتصم ريحان — مساعدة

$\boxed{ع = \frac{١٩٢}{نق^٢}}$

تكلفة اسم٢ من بلاستيك الجوانب = س

تكلفة اسم٢ من بلاستيك القاعدة = ٣س

التكلفة الكلية = (تكلفة الجوانب) + (تكلفة القاعدة)

سعر تكلفة اسم٢ من الجوانب — سعر تكلفة اسم٢ من القاعدة

التكلفة الكلية = (س × محيط القاعدة × الارتفاع) + (٣س × مساحة الدائرة)

التكلفة الكلية = (س × ٢π نق × ع) + (٣س × π نق²)

يلا نوحد الرموز

التكلفة الكلية = (س × ٢π نق × $\frac{١٩٢}{نق^٢}$) + (٣س × π نق²)

أ. معتصم ريحان

التكلفة الكلية = $\frac{٣٨٤ س π}{نق}$ + ٣س × π نق²

سنشتق بالنسبة لـ نق

س ، π ثوابت

$ت' = \frac{-٣٨٤ س π}{نق^٢}$ + ٦س × π نق = صفر

$ت' = \frac{٣٨٤ س π}{نق^٢}$ = ٦س π نق ⇐ $\frac{٦٤}{نق^٢}$ = نق

⇐ نق³ = ٦٤ ⇐ $\boxed{نق = ٤}$

أرجع عوض في المعادلة المساعدة للحصول على إرتفاع المقلمة

∴ ع = $\frac{١٩٢}{نق^٢}$ ⇐ ع = $\frac{١٩٢}{(٤)^٢}$ = $\boxed{١٢}$

أ. معتصم ريحان

* خطوة التأكد

-- ٤ ++

صغرى مطلقة عند نق = ٤

* المطلوب أبعاد المقلمة التي تجعل تكلفتها أقل ما يمكن وهي

$\boxed{نق = ٤ \quad ع = ١٢}$

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

حصص خاصة أونلاين مميزة

00972598709519

ص2



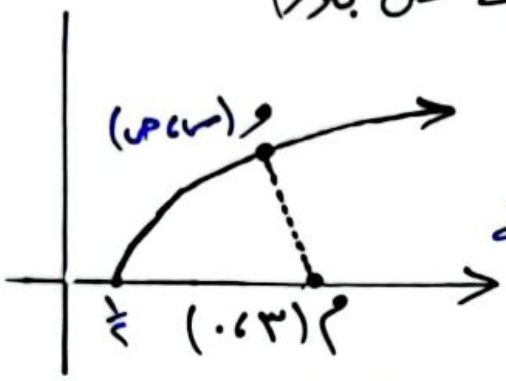
CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 3 ص 87

طريق منحنٍ معادلته في المستوى الديكارتي هي ص = ق(س) = $\sqrt{٢س - ١}$

النقطة م (٣، ٠) تمثل موقع مستشفى، يُراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إلى موقع المستشفى (م) عيّن إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (و م) أقل ما يمكن. (انظر إلى الشكل المجاور)

أ. معتصم ريحان




قانون المسافة بين نقطتين

نريد علاقتان

أساسية

المسافة بين النقطتين (و)، (م) أقل ما يمكن

مساعدة

طريق منحنى معادلته

ص = $\sqrt{٢س - ١}$

ربع الطرفين

$\boxed{ص^٢ = ٢س - ١}$

يلا نروح نوجد الرموز

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس ماليوتيوب

حصص خاصة أون لاين

$ف = \sqrt{(ص_٢ - ص_١)^٢ + (س_٢ - س_١)^٢}$

$ف = \sqrt{(ص - ٠)^٢ + (س - ٣)^٢}$

$ف = \sqrt{ص^٢ + س^٢ - ٦س + ٩}$

$ف = \sqrt{٢س - ١ + س^٢ - ٦س + ٩} \Leftarrow ف = \sqrt{س^٢ - ٤س + ٨}$

$\Leftarrow ف' = \frac{٢س - ٤}{٢\sqrt{س^٢ - ٤س + ٨}} = صفر \Leftarrow ٢س - ٤ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

خطوة الفحص

ف' ‎- - - - ٢ + + +

قيمة صغرى محلية ومطلقة.

بنرجع الآن على العلاقة المساعدة لإيجاد قيمة ص

$ص^٢ = ٢ \times س - ١$

$ص^٢ = ٢ \times ٢ - ١ = \boxed{٣}$

السالب مرفوض لأنه تعاملنا مع أطوال

$\therefore \boxed{ص = \sqrt{٣}}$

أ. معتصم ريحان

المطلوب: $\therefore$ احداثيات النقطة و ص (٢، $\sqrt{٣}$)

وعندها سيكون طول الشارع (و م) أقل ما يمكن.


أ. معتصم ريحان

00972598709519


ص 3



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

ص 87 س 4

جسم يسير في خط مستقيم بحيث إن بعده ف بالأمتار بعد ن ثانية يُعطى بالعلاقة ف = أ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن

فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [ن١ ، ن٢] هي ١٠ م/ث وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث احسب الثابتين أ ، ب .

نريد علاقتان

أ. معتصم ريحان

**أساسية**

سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث

السرعة هي مشتقة المسافة

ف = أ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن

نشتق لإيجاد معادلة السرعة

ف' = ع = أ × (− جا $\frac{\pi}{4}$ ن) × ($\frac{\pi}{4}$) + ب × (جتا $\frac{\pi}{4}$ ن) × $\frac{\pi}{4}$

ف' = ع = $-\frac{\pi}{4}$ أ جا $\frac{\pi}{4}$ ن + $\frac{\pi}{4}$ ب جتا $\frac{\pi}{4}$ ن

رتبنا شوي

لاحظ هنا الرموز موحدة لأن π ، أ ثوابت

يلا نشتق ونساوي بصفر

ف'' = ع' = ت = $-\frac{\pi^2}{16}$ أ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + $-\frac{\pi^2}{16}$ ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن

مُعطى في السؤال أن سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ∴ يلا نعوض مكان كل ن في ①

∴ ع'(١) = $-\frac{\pi^2}{16}$ أ جتا $\frac{\pi}{4}$ − $\frac{\pi^2}{16}$ ب جا $\frac{\pi}{4}$ = صفر

$-\frac{\cancel{\pi^2}}{\cancel{16}}$ أ × $\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$ = $\frac{\cancel{\pi^2}}{\cancel{16}}$ ب × $\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$

− أ = ب

ومنها ⟸ ب + أ = صفر ①

أ. معتصم ريحان

تابعين على الفيس واليوتيوب

**مساعدة**

السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(ن_2) - ف(ن_1)}{ن_2 - ن_1}$

⟸ $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠}$ = ١٠ م/ث

أ. معتصم ريحان

تابعين على الفيس واليوتيوب

= $\frac{(أ جتا \frac{\pi}{2} + ب جا \frac{\pi}{2}) - (أ جتا(٠) + ب جا(٠))}{٢}$ = ١٠

= $\frac{(صفر + ب) - (أ + صفر)}{٢}$ = ١٠

⟸ ب − أ = ٢٠ # ①

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة

00972598709519

نحل معادلة ① مع ② بالحذف

ب − أ = ٢٠

ب + أ = صفر

أجمع مباشرة

٢ب = ٢٠

ب = ١٠ ومنها أ = −١٠ # حل

أ. معتصم ريحان

تابعين على الفيس واليوتيوب



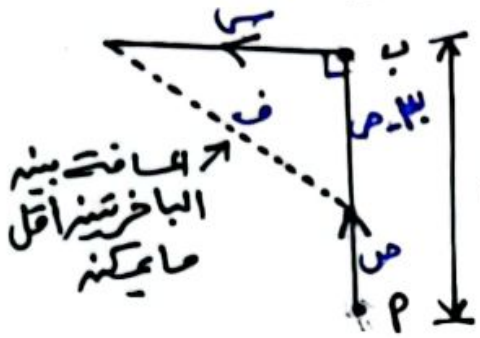
CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س5 / ص87

في الساعة الثانية عشرة ظهراً كانت الباخرة ب على بعد ٣٠ كم شمال الباخرة أ وتسير غرباً بسرعة ١٠ كم/ساعة، فإذا كانت أ تسير شمالاً بسرعة ٢٠ كم في الساعة فمتى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن.

أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان




أساسية

المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن.

حسب فيثاغورس

$ف^2 = (٣٠ - ص)^2 + (س)^2$

$ف^2 = (٣٠ - ٢٠ن)^2 + (١٠ن)^2$

$ف^2 = ٩٠٠ - ١٢٠٠ن + ٤٠٠ن^2 + ١٠٠ن^2$

$ف^2 = ٥٠٠ن^2 - ١٢٠٠ن + ٩٠٠$

الآن نشتق ونساوي بصفر

$٢ف ف' = ١٠٠٠ن - ١٢٠٠$

$صفر = ١٠٠٠ن - ١٢٠٠$

$\frac{١٢٠٠}{١٠٠٠} = ن \Leftarrow \boxed{ن = ٢و١}$

مساعدة

* الباخرة أ تسير شمالاً بسرعة ٢٠ كم/ساعة
* الباخرة ب تسير غرباً بسرعة ١٠ كم/ساعة

قانون المسافة = السرعة × الزمن

∴ المسافة التي تسيرها الباخرة ب = ١٠ × ن (الزمن)

∴ المسافة التي تسيرها الباخرة أ = ٢٠ × ن

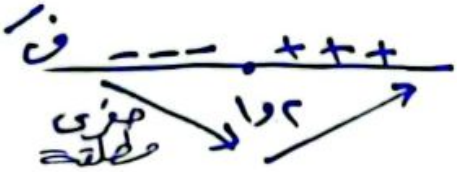
$\boxed{\begin{array}{l} ∴ س = ١٠ × ن \\ ∴ ص = ٢٠ × ن \end{array}}$

يلا نوجد الرموز

أ. معتصم ريحان

اشتقينا بالنسبة للزمن (ن)

أ. معتصم ريحان




أ. معتصم ريحان

∴ المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن بعد تحركها بمقدار (٢و١) ساعة

∴ المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن الساعة الواحدة و ١٢ دقيقة.

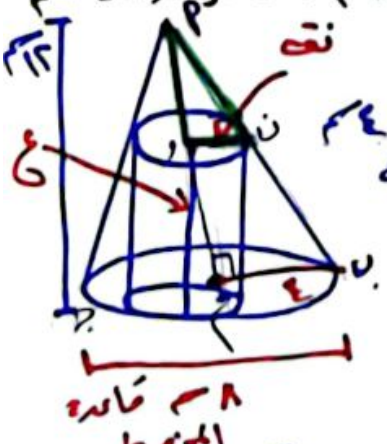
---

س6 / ص87

جد حجم أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم ونصف قطر قاعدته ٤ سم

نريد علاقتان

الحل




أساسية

جد حجم أكبر اسطوانة

حجم الاسطوانة = $\pi$ نق$^2$ ع

حجم الاسطوانة = $\pi$ نق$^2$ × (١٢ - ٣نق)

حجم الاسطوانة = ١٢$\pi$ نق$^2$ - ٣$\pi$ نق$^3$

ح' = ٢٤$\pi$ نق - ٩$\pi$ نق$^2$ = ٠

٣$\pi$ نق (٨ - ٣نق) = ٠

$\boxed{نق = ٠}$ أو $نق = \frac{٨}{٣}$

مرفوض

ح' عظمى مطلقة

مساعدة

مخروط قائم ارتفاعه ١٢ سم ونق ٤ سم

الحالة حالة تشابه مثلثات

يلا نوجد الرموز

$\frac{نق}{٤} = \frac{١٢ - ع}{١٢}$

١٢نق = ٤٨ - ٤ع

$\boxed{ع = ١٢ - ٣نق}$

∴ حجم الاسطوانة = ١٢$\pi$ $(\frac{٨}{٣})^2$ - ٣$\pi$ $(\frac{٨}{٣})^3$ = $\frac{٢٥٦\pi}{٩}$ سم$^3$

أ. معتصم ريحان 00972598709519

ص5

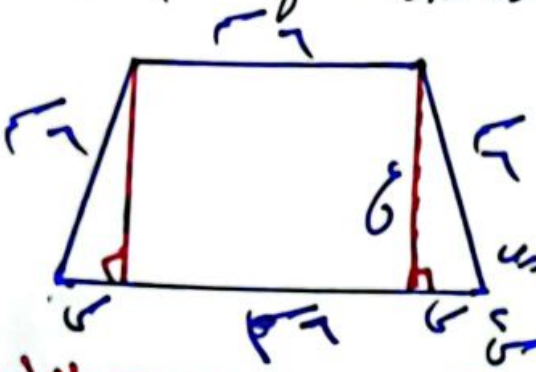


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

بداية حصة رقم (٦١) الجزء الثاني

ص 87 س 7

شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦ سم ، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف




الحل

نريد علاقتان

أساسية

أكبر مساحة لشبه المنحرف

مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ × (مجموع القاعدتين المتوازيتين) × ع

م = $\frac{1}{2}$ × (٦ + ٦ + س + س) × ع

م = (٦ + س) × ع

م = (٦ + س) × $\sqrt{٣٦ - س^2}$

مساعدة

حسب نظرية فيثاغورس

فإن $ع^2 = ٣٦ - س^2$

$ع = \sqrt{٣٦ - س^2}$

يلا نروح نوجد الرموز

بداية حصة رقم (٦١) الجزء الثاني

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

00972598709519

يلا نشتق ونساوي بصفر

$م' = (٦ + س) \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٣٦ - س^2}} + \sqrt{٣٦ - س^2} \times (١) = صفر$

ضربنا طرفي المعادلة في $\sqrt{٣٦ - س^2}$

$م' = -س(٦ + س) + (٣٦ - س^2) = صفر$

$م' = -٦س - س^2 + ٣٦ - س^2 = صفر$

$م' = -٢س^2 - ٦س + ٣٦ = ٠$

$م' = س^2 + ٣س - ١٨ = صفر$

$\boxed{س = -٦}$ مرفوض أو $\boxed{س = ٣}$

م' : + + عظمى − − + +

٣ ، −٦

∴ المساحة = (٦ + ٣) × $\sqrt{٣٦ - ٣^2}$

= ٩ × $\sqrt{٢٧}$ = ٢٧$\sqrt{٣}$ = ٤٦,٧٦ سم² #

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين مميزة

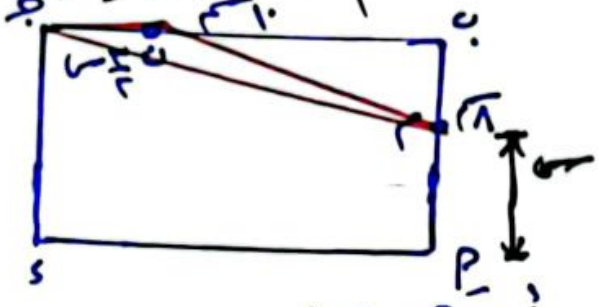
تابعني على الفيس واليوتيوب

ص 6



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 8 / ص 87 | أ ب ج د مستطيل عرضه أ ب = ٨ سم وطوله ب ج = ١٠ سم، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم، ن نقطة على الضلع ب ج بحيث ن ج = $\frac{3}{2}$ س سم جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن ج أكبر ما يمكن




نريد علاقة

لا نهائية — مساعدة

مساحة المثلث أكبر ما يمكن

مساحة Δ = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × ع

مساحة Δ = $\frac{1}{2}$ × (ن ج) × (م ب)

م Δ = $\frac{1}{2}$ × ($\frac{3}{2}$ س) × (٨ − س)

م Δ = $\frac{3}{4}$ س × (٨ − س) ⟸ م Δ = ٦ س − $\frac{3}{4}$ س²

نظل

م ++++ ---- ٤

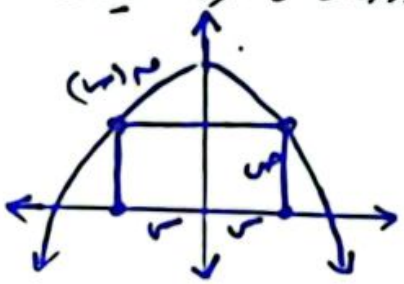
⟸ م = ٦ − $\frac{6}{4}$ س = ٠ ⟸ س = ٤

∴ س = ٤ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن ⟸ س = ٤

ومساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ($\frac{3}{2}$ × ٤) × (٨ − ٤) = ١٢ سم² #

أ. معتصم ريحان

ص 13 / جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأساه منه رؤوسه على محور السينات والرأسان الآخران على منحنى الاقتران م(س) = ٨ − $\frac{1}{2}$ س²




الحل

نريد علاقة

لا نهائية — مساعدة

مساحة أكبر مستطيل

م = ٢ س × ص

منحنى الاقتران م(س) = ٨ − $\frac{1}{2}$ س²

بالتعويض ∴ ص = ٨ − $\frac{1}{2}$ س²

م = ٢ س × (٨ − $\frac{1}{2}$ س²)

م = ١٦ س − $\frac{1}{2}$ س³

م' = ١٦ − ٣ س² = ٠

∴ س = ±٢ (السالب مرفوض لأن س > ٠)

نظل − ++ − ٢

∴ عندما س = ٢ يوجد نهاية عظمى محلية.

مساحة المستطيل = ٢ س × ص

مساحة المستطيل = ٢ × ٢ × (٨ − $\frac{8}{2}$)

٤ × ($\frac{24-8}{2}$)

٤ × $\frac{16}{2}$ = $\frac{64}{2}$

أ. معتصم ريحان

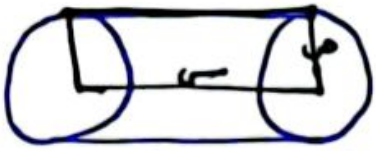
ص 7



CamScanner به صوتيا

س ٢٠١٤ / أوجد باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران مستطيل محيطه ٦٠ سم دورة كاملة حول أحد أضلاعه أ. معتصم ريحان تابعني على الفيس واليوتيوب

نريد علاقتان



أساسية

الشكل الناتج من دوران المستطيل هو اسطوانة.

أكبر حجم للشكل يعني

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × ع

حجم الاسطوانة = $\pi$ نق$^2$ × ع

ح = $\pi$ ص$^2$ × س

ح = $\pi$ ص$^2$ × (٣٠ − ص)

ح = ٣٠$\pi$ ص$^2$ − $\pi$ ص$^3$

ح' = ٦٠$\pi$ ص − ٣$\pi$ ص$^2$ = ٠ ⟸ ٣$\pi$ ص (٢٠ − ص) = ٠ ∴ ص = ٢٠ ومنها س = ١٠

المطلوب ⟸ حجم الاسطوانة = $\pi$ ص$^2$ × س = $\pi$ × (٢٠)$^2$ × ١٠ = ٤٠٠٠$\pi$

مساعدة

محيط المستطيل = ٦٠ سم

٢ (الطول + العرض) = ٦٠

٢ (س + ص) = ٦٠

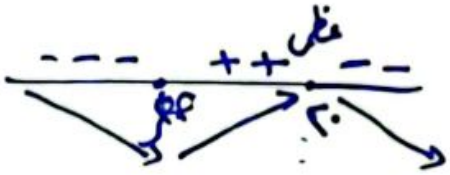
س + ص = ٣٠

س = ٣٠ − ص

يلا نروح نوحد الرموز

أ. معتصم ريحان

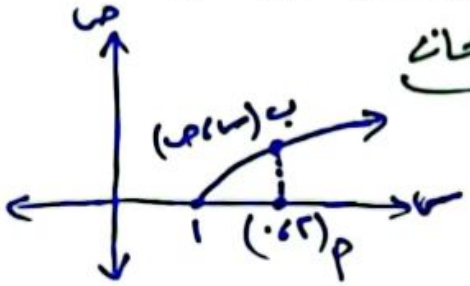
* عرض المستطيل ص يصبح نصف القطر في الأسطوانة
* وطول المستطيل س يصبح إرتفاع الاسطوانة




س ٢٠١٤ / اكمال / جد أقرب نقطة واقعة على المنحنى ص = $\sqrt{س - ١}$ إلى النقطة أ (٢، ٠)

أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان




أساسية

أقرب نقطة واقعة على المنحنى

نفرض ان النقطة هي ب (س، ص)

ف = $\sqrt{(ص_٢ - ص_١)^2 + (س_٢ - س_١)^2}$

ف = $\sqrt{(ص - ٠)^2 + (س - ٢)^2}$

ف = $\sqrt{ص^2 + س^2 - ٤س + ٤}$

ف = $\sqrt{س - ١ + س^2 - ٤س + ٤}$

ف = $\sqrt{س^2 - ٣س + ٣}$

ف' = $\frac{٢س - ٣}{٢\sqrt{س^2 - ٣س + ٣}}$ = صفر

مساعدة

النقطة المطلوبة واقعة على المنحنى

ص = $\sqrt{س - ١}$

ربع الطرفين

ص$^2$ = س − ١

يلا نروح نوحد الرموز

أ. معتصم ريحان

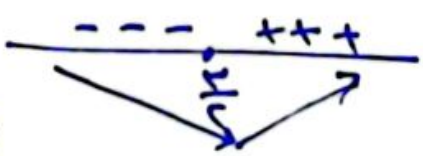
صصص خاصة أونلاين مميزة

تابعني على الفيس واليوتيوب

00972598709519

المشتقة تساوي صفر اذا كان البسط يساوي صفر

٢س − ٣ = ٠ ⟸ س = $\frac{٣}{٢}$




ص = $\sqrt{س - ١}$

ص = $\sqrt{\frac{٣}{٢} - ١}$

ص = $\sqrt{\frac{١}{٢}}$

∴ النقطة هي ($\frac{٣}{٢}$، $\sqrt{\frac{١}{٢}}$)

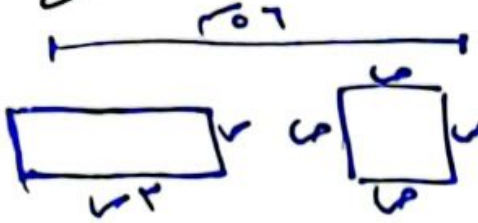
ص



حه ضوئيا بـ CamScanner

2016 / كمالي) سلك طوله ٥٦ سم قُسم إلى جزأين، صنع من احدهما مربع ومن الآخر مستطيل طوله يساوي ٣ أمثال عرضه، ما أبعاد المربع والمستطيل ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن.

أ. معتصم رحال




نريد علاقة بـ
مساحة ∎ + مساحة ∎
المطلوب
ما أبعاد المربع والمستطيل ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن
مجموع مساحتيهما = مساحة المربع + مساحة المستطيل

محيط المربع + المستطيل يساوي طول السلك

نرضنا طول ضلع المربع ص
وعرض المستطيل س
وطوله المستطيل ٣س

$٤ص + ٢(س + ٣س) = ٥٦$

$٤ص + ٨س = ٥٦$

$ص = \frac{٥٦ - ٨س}{٤}$

$ص = ١٤ - ٢س$

$م = ص^٢ + ٣س^٢$

$م = (١٤ - ٢س)^٢ + ٣س^٢$

$م = ١٩٦ - ٥٦س + ٤س^٢ + ٣س^٢$

$م = ٧س^٢ - ٥٦س + ١٩٦$

$م' = ١٤س - ٥٦ = ٠ \Leftarrow س = ٤$

$\therefore ص = ١٤ - ٢ \times ٤ = ٦$

$\therefore$ طول ضلع المربع = ٦ طول المستطيل = ١٢ عرض المستطيل = ٤

أ. معتصم رحال
مصر خامد اونة لاسيمزة
0097259870951

يلا نوحد الرموز

أ. معتصم رحال

نقطة حرجة محلية عندها.

أ. معتصم رحال

2016 / أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب إذا كان طول أب = ٢ سم وطول ب جـ = ٣ سم، د نقطة على ب جـ، أوجد طول دجـ بحيث يكون مجموع طول (دجـ) ومثلي طول (أد) أقل ما يمكن.

الحل

نريد علاقة بـ
مساعدة
المطلوب
مجموع طول دجـ ومثلي طول أد أقل ما يمكن.

أب = ٢ سم، ب جـ = ٣ سم

نفرض ب د = س

$\therefore$ دجـ = ٣ - س

مجموع الأطوال = دجـ + ٢(أد)

$ل = (٣ - س) + ٢\sqrt{٤ + س^٢}$

$(أد)^٢ = (أب)^٢ + (ب د)^٢$

$(أد)^٢ = ٤ + س^٢$

$أد = \sqrt{٤ + س^٢}$

$ل' = -١ + ٢ \times \frac{٢س}{٢\sqrt{٤ + س^٢}} = ٠$

$ل' = \frac{٢س}{\sqrt{٤ + س^٢}} = ١$

$٤ + س^٢ = ٤س^٢$

$٣س^٢ = ٤$

$س^٢ = \frac{٤}{٣}$

$س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

المطلوب طول (دجـ) = $٣ - \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

أ. معتصم رحال

ص ٩



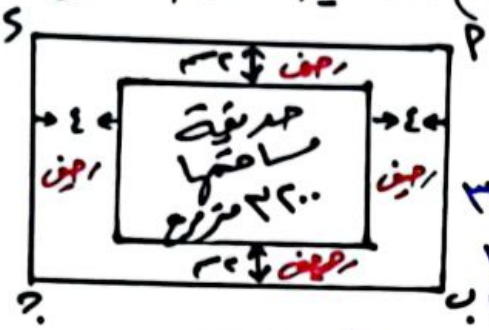
Camscanner بـ صوتيا حة

حصة رقم 42
أ. معتصم ريحان
توجيهي علمي 2022

# حل أسئلة امتحانات سابقة

## التطبيقات العملية على القيم القصوى

س 2017 / أرض مستطيلة الشكل رؤوسها أ ب جـ د تتكون من حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢٠٠ متر مربع محاطة بأرصفة عرض كل من الرصيفين أ ب ، جـ د يساوي ٤ متر وعرض كل من الرصيفين على الضلعين الآخرين ٢ متر أوجد أقل مساحة ممكنة لقطعة الأرض .




نفرض طول الحديقة س
نفرض عرض الحديقة ص

نريد علاقتان

**أساسية**

أقل مساحة ممكنة لقطع الأرض

مساحة الأرض = (الطول) × (العرض)

م = (س + ٤ + ٤) × (ص + ٢ + ٢)

م = (س + ٨) × (ص + ٤)

م = (س + ٨) × (٣٢٠٠/س + ٤)

م' = (س + ٨) × (−٣٢٠٠/س²) + (−٣٢٠٠/س + ٤) × (١)

م' = −٣٢٠٠/س − ٢٥٦٠٠/س² + ٣٢٠٠/س + ٤ = ٠ ⟸ −٢٥٦٠٠/س² = −٤ ⟸ س² = ٦٤٠٠ ⟸ س = ٨٠

**مساعدة**

مساحة الحديقة ٣٢٠٠

س × ص = ٣٢٠٠

ص = ٣٢٠٠/س

بلا نوحد الرموز

∴ ص = ٣٢٠٠/٨٠ = ٤٠

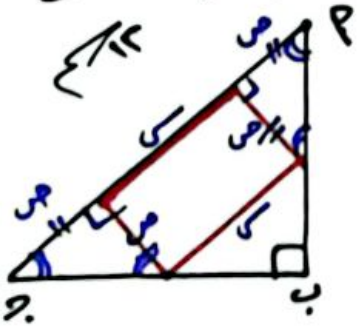
أ. معتصم ريحان

م' − − − ٨٠ + + +

المطلوب مساحة الأرض = (س + ٨) × (ص + ٤) = (٨٨) × ٤٤ = ٣٨٧٢ متر مربع

---

س 2018 / أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ومتساوي الساقين ، طول أ جـ = ١٢ سم ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث ينطبق أحد أضلاعه على الوتر أ جـ ، ويقع الرأسان الآخران على ضلعي القائمة .




نريد علاقتان

**أساسية**

مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = س × ص

م = (١٢ − ٢ص) × ص

م = ١٢ص − ٢ص²

م' = ١٢ − ٤ص = ٠ ⟸ ص = ٣

ومنها س = ١٢ − ٢ × ٣ = ٦

**مساعدة**

طول الوتر (أ جـ) = ١٢ سم

∴ ص + س + ص = ١٢ سم

٢ص + س = ١٢ سم

س = ١٢ − ٢ص

بلا نوحد الرموز

أ. معتصم ريحان

خطوة الفحص ضروري

م' + + + ٣ − − −

المطلوب مساحة المستطيل = س × ص = ٦ × ٣ = ١٨ سم²

أ. معتصم ريحان / تابعين على الفيس واليوتيوب /

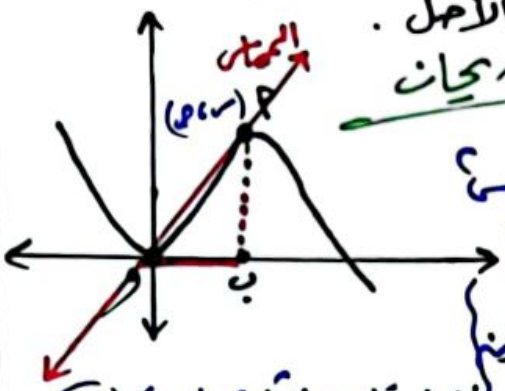
ص١



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س ٢٠١٩ تتحرك النقطة (س، ص) على منحنى الاقتران ق(س) بحيث ميل المماس عندها في أي لحظة يساوي ١٢س − ٣س² ، س > صفر
جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب و حيث (و) نقطة الأصل .

أ. معتصم ريحان




نفرض قاعدة المثلث (ب و) (س)

نفرض ارتفاع المثلث (ب أ) (ص)

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين مميزة
توجيهي علمي 2022
تابعني على الفيس واليوتيوب

نريد علاقتان

**علاقة أساسية**

أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب و

مساحة المثلث = ½ × (القاعدة) × الإرتفاع

مساحة المثلث = ½ × س × ص

م = ½ × س × (١٢س² − ٣س³)

م = ٦س³ − ٣/٢ س⁴

م′ = ١٨س² − ٦س³ = ٠

س² (١٨ − ٦س) = ٠

س = ٠ مرفوض ، س = ٣

**مساعدة**

ميل المماس = ١٢س − ٣س²

∴ ق′(س) = ١٢س − ٣س²

ميل المماس عن طريق النقطتين (٠، ٠) ، (س، ص)

م = (ص − ٠)/(س − ٠) = ص/س

نساوي الميلان ببعضهما

١٢س − ٣س² = ص/س

بلا نروح نوحد الرموز

١٢س² − ٣س³ = ص

⇐ ومنها ص = ١٢(٣)² − ٣(٣)³ = ٢٧

∴ عند س = ٣ قيمة عظمى محلية

م′ + + + ٣ − − −

المطلوب ⇐ مساحة المستطيل = ٦(٣)³ − ٣/٢ (٣)⁴ = ٤٠٫٥

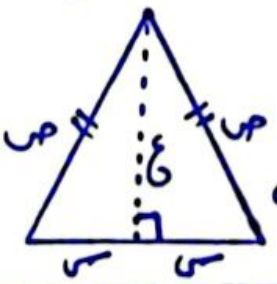
أ. معتصم ريحان 00972598709519

---

س ٢٠١٩ دور ثاني ثني سلك طوله ١٢ سم ليكون مثلث متساوي الساقين جد أطوال أضلاع المثلث والتي تجعل مساحته أكبر ما يمكن

سلك طوله ١٢ سم

أ. معتصم ريحان




نريد علاقتان

**أساسية**

مساحة المثلث أكبر ما يمكن

م = ½ × القاعدة × الارتفاع

م = ½ × ٢س × √(ص² − س²)

م = س × √((٦ − س)² − س²)

م = س × √(٣٦ − ١٢س + س² − س²)

م = س × √(٣٦ − ١٢س)

م′ = س × (−١٢)/(٢√(٣٦ − ١٢س)) + √(٣٦ − ١٢س) × (١) = صفر

⇐ −٦س + ٣٦ − ١٢س = صفر ⇐ −١٨س = −٣٦ ⇐ س = ٢ ∴ ص = ٤

المطلوب ⇐ أبعاد المستطيل ٤ ، ٤ ، ٤

**مساعدة**

محيط المثلث = ١٢ سم

∴ ٢س + ٢ص = ١٢

∴ ٢ص = ١٢ − ٢

∴ ص = ٦ − س

بلا نوحد الرموز

من فيثاغورس

ع² = ص² − س²

ع = √(ص² − س²)

اشتقينا على قاعدة الضرب

م′ + + + ٢ − − −

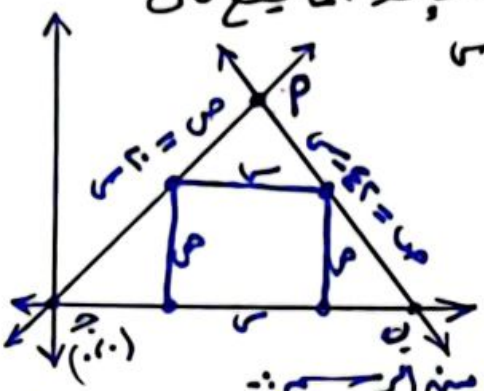
ص²



حه ضوئيا بـ CamScanner

س٢٥) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه في الربع الأول بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات، أما الرأسان الآخران، فإحداهما يقع على المستقيم ص = ٢٠ س، والآخر على المستقيم ص = ٤٢ - س

نريد علاقتان أ. معتصم ريحان




أساسية

مساحة أكبر مستطيل

م = س × ص

أ. معتصم ريحان

م = $\frac{٤٢(٤٠ - ص)}{٤٠}$ × ص

م = $\left(\frac{١٦٨٠ - ٤٢ص}{٤٠}\right)$ × ص

م = $\frac{١}{٤٠}$ × (١٦٨٠ ص - ٤٢ ص²)

مَ = $\frac{١}{٤٠}$ × (١٦٨٠ - ٨٤ ص) = صفر

مَ = ١٦٨٠ - ٨٤ ص = ٠

ص = $\frac{١٦٨٠}{٨٤}$ = $\boxed{٢٠}$ عظمى

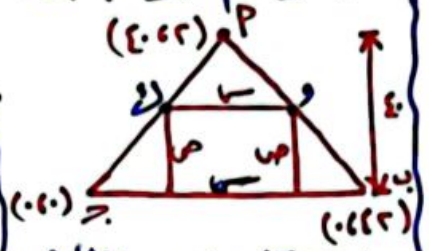
* عوض لإيجاد س

س = $\frac{٤٢(٤٠ - ٢٠)}{٤٠}$

∴ $\boxed{س = ٢١}$

مساعدة

من الرسم طول ب جـ = ٤٢




من الشكل ارتفاع المثلث أ و ك يساوي (٤٠ - ص)

المثلث الصغير $\boxed{أ و ك}$

يشابه المثلث الكبير $\boxed{أ ب جـ}$

لأن فيهما ∠ أ مشتركة

وفيهما ∠ أ و ك = ∠ أ ب جـ

وفيهما ∠ أ ك و = ∠ أ جـ ب

ينتج من التشابه

$\frac{س}{٤٢}$ = $\frac{٤٠ - ص}{٤٠}$

ارتفاع المثلث الصغير

ارتفاع المثلث الكبير

$\boxed{س = \frac{٤٢(٤٠ - ص)}{٤٠}}$

يلا نروح نوحد الرموز

⇐ من الرسم :-

* النقطة ب احداثياتها (٤٢، ٠)
* النقطة جـ احداثياتها (٠، ٠)
* لإيجاد احداثيات النقطة أ نساوي معادلتي المستقيمين

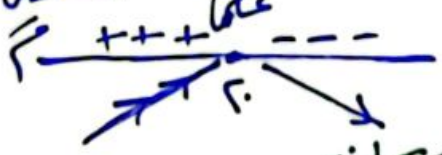
٤٢ - س = ٢٠ س

$\frac{٤٢}{٢١}$ = س ⇐ $\boxed{س = ٢}$

∴ احداثيات أ هي (٢، ٤٠)

أ. معتصم ريحان

خطوة الفحص




أ. معتصم ريحان

* المطلوب ⇐ مساحة أكبر مستطيل م = س × ص = ٢١ × ٢٠ = ٤٢٠ وحدة مربعة

* في هذا السؤال العلاقة المساعدة هي التي كانت الأصعب في الحصول عليها وعلى رأي المثل جبناك يا عبد المعين تعين لقيناك بدك معين. وهذه الأسئلة التي تكون أصعب في الامتحان ودائماً ركز كيف تحصل على المعادلة المساعدة.

أ. معتصم ريحان

مصمص خاصة أونلاين مميزة

تابعني على الفيس واليوتيوب

00972598709519

أحضر ميديو الحصة كمان مرة حتفهم السؤال جيداً

ص 3



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

ق ق س دور ثاني

أوجد مساحة أكبر شبة منحرف متساوي الساقين يمكن رسمه داخل منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{16 - س^2}$ بحيث أن رؤوسه أصفار الاقتران، والرأسين الآخرين يقعان على منحنى الاقتران ق(س) فوق محور السينات

ارسم علاقتين برموز موحدة واشتقه وصفر

نريد علاقتان

مساعدة

مساحة أكبر شبة منحرف

م = $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين المتوازيتين) × الإرتفاع

م = $\frac{1}{2}$ (٨ + ٢س) × ص

م = (٤ + س) × $\sqrt{16 - س^2}$

مَ = (٤ + س) × $\frac{-2س}{2\sqrt{16 - س^2}}$ + $\sqrt{16 - س^2}$ × (١)

مَ = $\frac{-4س - س^2}{\sqrt{16 - س^2}}$ + $\sqrt{16 - س^2}$ = صفر

مَ = −٤س − س² + ١٦ − س² = صفر

مَ = −٢س² − ٤س + ١٦ = صفر

مَ = س² + ٢س − ٨ = ٠

⇐ (س + ٤)(س − ٢) = ٠

س = −٤ مرفوضة

س = ٢

مَ: + + + ٢ − − −

عظمى عند س = ٢

كيف بدنا نرسم منحنى

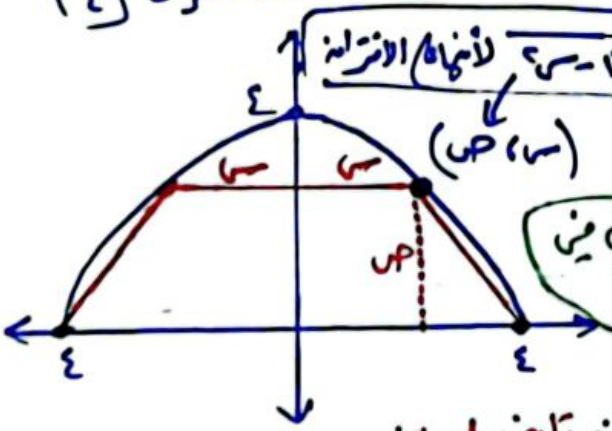
ص = $\sqrt{16 - س^2}$

أولاً ربع الطرفين

ص² = ١٦ − س²

ص² + س² = ١٦

هذه معادلة دائرة مركزها (٠،٠) ونصف قطرها (٤)




$\sqrt{16 - س^2}$ لأنها على الاقتران (س، ص)

ضربنا الطرفين في $\sqrt{16 - س^2}$

أ. معتصم ريحان تابعني على الفيس والبوتيوب

* المطلوب ⇐ مساحة أكبر شبة منحرف

م = (٤ + س) × $\sqrt{16 - س^2}$

م = (٤ + ٢) × $\sqrt{16 - ٢^2}$

م = ٦ × $\sqrt{12}$ #

* فكرة الدرس وخطوات حله:

أرسم علاقتين برموز موحدة باشتقه وصفر ثم جد المطلوب وماتنسى خطوة الفحص (ص ٦)


أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس والبوتيوب
حصص خاصة أونلاين زووم
00972598709519



أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين
00972598709519

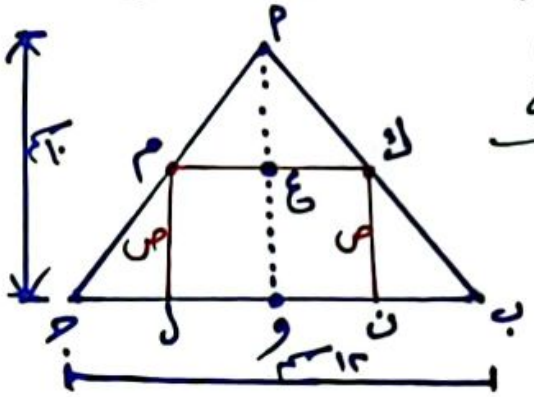



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س 2021 / جد مساحة أكبر مستطيل يمكن وضعه داخل مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ١٠ سم بحيث ينطبق أحد أضلاعه على قاعدة المثلث ويقع الرأسان الآخران على ساقي المثلث.

الحل

نريد علاقتان — أ. معتصم ريحان




أسئلة

مساحة أكبر مستطيل

م = الطول × العرض

م = س × ص

م = (١٢ − ١٢ص/١٠) × ص

م = ١٢ص − ١٢ص²/١٠

مَ = ١٢ − ١٢ص/٥ = صفر

⇐ ١٢ص/٥ = ١٢

⇐ ص = ٥

مساعدة

ب ج = ١٢ سم

أ و = ١٠ سم

نفرض طول المستطيل = س

عرض المستطيل = ص

اذا كان أ و = ١٠ فإن ع أ = ١٠ − ص

يتشابه Δ أ ك م الصغير مع Δ أ ب ج الكبير

ومن التشابه ينتج س/١٢ = (١٠ − ص)/١٠ ← إرتفاع الصغير / إرتفاع الكبير

⇐ س = ١٢(١٠ − ص)/١٠

يلا نوحد الرموز ⇐ س = ١٢ − ١٢ص/١٠

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين
تابعني على الفيس واليوتيوب
00972598709519

مَ عظمى عند ٥

+ + + ٥ − − −

المطلوب

س = ١٢ − ١٢ × ٥/١٠ = ٦ #

مساحة المستطيل = س × ص = ٦ × ٥ = ٣٠ سم² #

---

س 2021 دور ثاني / أوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم طول راسمه √١٢ سم

نريد علاقتان — أ. معتصم ريحان

أسئلة

حجم أكبر مخروط

حجم المخروط = ١/٣ (مساحة القاعدة) × الارتفاع

حجم المخروط = ١/٣ × π نق² × ع

ح = ١/٣ × π نق² × √(١٢ − نق²)

مساعدة

حسب فيثاغورس

ع² = (√١٢)² − نق²

ع = √(١٢ − نق²)

يلا نروح نوحد الرموز

حَ = ١/٣ (π نق² × (−٢ نق)/(٢√(١٢ − نق²)) + √(١٢ − نق²) × (٢π نق)) = صفر ← نضرب الطرفين في √(١٢ − نق²)

⇐ −π نق³ + (١٢ − نق²) × ٢π نق = صفر

−π نق³ + ٢٤π نق − ٢π نق³ = صفر

يتبع في الصفحة القادمة

ص 5



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

## تابع حل 2021 دور ثاني

$-\pi\,\text{نق}^3 + 24\pi\,\text{نق} - 2\pi\,\text{نق}^3 = \text{صفر}$

$-3\pi\,\text{نق}^3 + 24\pi\,\text{نق} = \text{صفر}$

$-3\pi\,\text{نق}(\text{نق}^2 - 8) = \text{صفر}$

اما $-3\pi\,\text{نق} = \text{صفر}$ أو $\text{نق}^2 - 8 = 0$ (السالب مرفوض)

$\text{نق} = \text{صفر}$ $\Leftarrow \text{نق} = \sqrt{8}$

(مرفوض)

**ملاحظة:** العلاقة الأساسية في السؤال نعرفها من كلمة أكبر أو أصغر أو أقل أو أكثر ما يمكن. وهي التي نشتقها بعد توحيد الرموز.

أ. معتصم ريحان
00972598709519
حصص خاصة أونلاين مميزة

**المطلوب** حجم المخروط $= \frac{1}{3} \times \pi (\sqrt{8})^2 \times \sqrt{12 - 8}$

حجم المخروط $= \frac{8}{3}\pi \times 2 = \boxed{\frac{16\pi}{3}}$ #.

أ. معتصم ريحان

---

**2020 تجريبي غزة**

دائرة طول قطرها أب يساوي ٤ سم بدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من ب باتجاه أ جد قياس الزاوية التي تجعل مساحة المثلث أ ب جـ أكبر ما يمكن

نريد علاقتان

**أساسية**

مساحة المثلث أ ب جـ أكبر ما يمكن

نفرض طول الضلع أ جـ ← $\boxed{\text{س}}$

نفرض طول الضلع ب جـ ← $\boxed{\text{ص}}$

**مساعدة**

القطر أب = ٤ سم

الإرتفاع هو

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4$ ⇐ حسب فيثاغورس

$\text{ص}^2 = 4 - \text{س}^2$ ⇐ $\text{ص} = \sqrt{4 - \text{س}^2}$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ (حاصل ضرب أي ضلعين) $\times$ جيب الزاوية المحصورة بينهما

$\text{م} = \frac{1}{2} \times (\text{س}) \times (\text{ص}) \times \text{جا}(90)$

يلا نوضح نوحد الرموز

$\text{م} = \frac{1}{2} \times \text{س} \times \sqrt{16 - \text{س}^2}$

نضرب الطرفين في $\sqrt{16 - \text{س}^2}$

$\text{م}' = \frac{1}{2}\left(\text{س} \times \frac{-2\text{س}}{2\sqrt{16 - \text{س}^2}} + \sqrt{16 - \text{س}^2} \times (1)\right) = \text{صفر}$

$\text{م}' = -\text{س}^2 + (16 - \text{س}^2) = \text{صفر}$ ∴ قياس الزاوية التي تجعل مساحة المثلث أ ب جـ أكبر ما يمكن هي $\boxed{\frac{\pi}{4}}$ #.

$-2\text{س}^2 = -16$

$\boxed{\text{س} = \sqrt{8}}$ (السالب مرفوض)

∴ $\text{جا}\,\text{هـ} = \frac{\text{س}}{\text{أب}}$ ⇐ $\text{جا}\,\text{هـ} = \frac{\sqrt{8}}{4}$

$\text{م}'$: $+ + +$ ، $- - -$ ، $\sqrt{8}$

عظمى مطلقة عند $\text{س} = \sqrt{8}$

∴ $\text{هـ} = \frac{\pi}{4}$ = shift + sin

ص 6

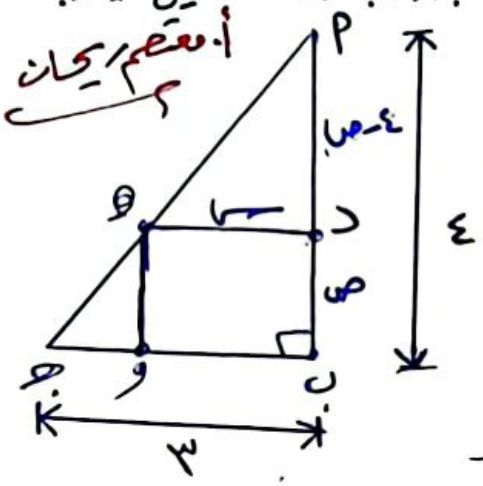


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

تجريبي

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٤ ، ب جـ = ٣ ، د نقطة على أ ب ، هـ نقطة على أ جـ ، و نقطة على ب جـ جد أبعاد المستطيل هـ و ب د التي يكون عندها مساحة المستطيل أكبر ما يمكن .

أ. معتصم ريحان




أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان

مساعدة

أساسية

مساحة المستطيل أكبر ما يمكن

م = س × ص

م = (٣ - ٣/٤ ص) × ص

م = ٣ص - ٣/٤ ص²

م' = ٣ - ٦/٤ ص = صفر

٦/٤ ص = ٣

ص = ٢ #

* من الشكل المجاور

أ ب = ٤ ∴ أ د = ٤ - ص

ب د = ص

ب جـ = ٣

* من الشكل Δ أ ب جـ الكبير يشابه Δ أ د هـ الصغير

وينتج من التشابه س/٣ = (٤ - ص)/٤

ومنها س = (١٢ - ٣ص)/٤

∴ س = ٣ - ٣/٤ ص

يلا نوحد الرموز

∴ س = ٣ - ٣/٤ × ٢ = ٣/٢ #

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونه لاين مميزة

تابعني على الفيس واليوتيوب

م' + + + - - -

٢

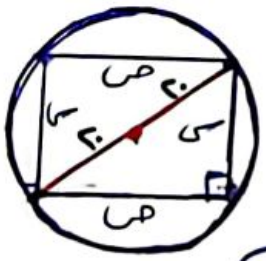
المطلوب أبعاد المستطيل ص = ٢ ، س = ٣/٢ #

أ. معتصم ريحان 00972598709519

خارجي

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٢٠ سم

نريد علاقتان




مساعدة .

حسب فيثاغورس

(القطر)² = س² + ص²

(٤٠)² = س² + ص²

ص = √(١٦٠٠ - س²)

أساسية

مساحة أكبر مستطيل

م = س × ص

م = س × √(١٦٠٠ - س²)

يلا نوحد الرموز

م' = س × (-٢س)/(٢√(١٦٠٠ - س²)) + √(١٦٠٠ - س²) × (١) = صفر

م' = - س² + ١٦٠٠ - س² = صفر

-٢س² = -١٦٠٠

س² = ٨٠٠

س = √٨٠٠ #

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

ص = √(١٦٠٠ - ٨٠٠)

∴ ص = √٨٠٠

أرجع عوض لإيجاد ص

المطلوب

م = س × ص

م = √٨٠٠ × √٨٠٠ = ٨٠٠ سم²

ص 7

الفحص

م' + + + - - - -

√٨٠٠

أ. معتصم ريحان

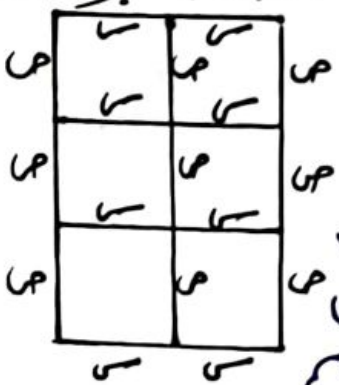


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

## (*) مسألة خارجية على درس تطبيقات عملية على القيم القصوى

أ. مقصم ريحان

خارجي/ صاحب مزرعة أغنام لديه ٣٦٠ متر من السلك الشبك يريد عمل حظائر متطابقة الشكل ومتساوية المساحة أوجد أكبر مساحة للحظائر يمكن عملها. نريد علاقتان




مساعدة

من الشكل نستنتج

أن ٩ص + ٨س = ٣٦٠

٨س = ٣٦٠ - ٩ص

$س = \frac{٣٦٠ - ٩ص}{٨}$

يلا نوحد الرموز

الحل+

أكبر مساحة لـ الستة حظائر

مساحة الحظيرة = س × ص

مساحة الحظائر الستة = ٦ × س × ص

$م = ٦ \times ص \times \left(\frac{٣٦٠ - ٩ص}{٨}\right)$

$م = \frac{٢١٦٠ ص - ٥٤ ص^{٢}}{٨}$

$م = ٢٧٠ ص - \frac{٥٤}{٨} ص^{٢} \Leftarrow م' = ٢٧٠ - \frac{١٠٨}{٨} ص = صفر$

$\Leftarrow ص = ٢٧٠ \times \frac{٨}{١٠٨} = ٢٠$

خطوة الفحص

+++ (٢٠) ---

عند ص = ٢٠ يوجد عندها عظمى مطلقة

نعوض لإيجاد س $= \frac{٣٦٠ - ٩ \times ٢٠}{٨} = \frac{١٨٠}{٨} = \frac{٤٥}{٢}$

المطلوب مساحة الحظائر الستة = ٦ × س × ص

$= ٦ \times \frac{٤٥}{٢} \times ٢٠ =$ (٢٧٠٠ م$^{٢}$) #

أ. مقصم ريحان
تابعين على الفيس والبوتيوب

(*) تابعين على صفحتي الرسمية وقناتي على اليوتيوب باسم (مقصم ريحان رياضيات توجيهي)

(*) للتسجيل معي في الدروس الخصوصية المميزة أونلاين وسنتر وأسئلة وامتحانات.

(*) شرح مميز، سيجعلك تحب الرياضيات

أ. مقصم ريحان 00972598709519

أ. مقصم ريحان
حصص خاصة أونلاين
مميزة
00972598709519

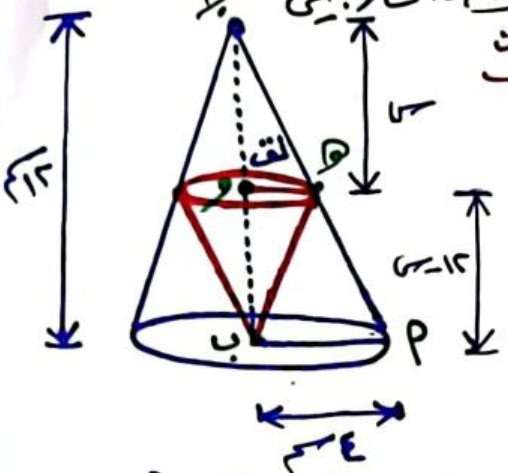


CamScanner

أ. معتصم ريحان

تجريبي الوسطى 2020

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤ سم وارتفاعه ١٢ سم حيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي




الحل

نريد فلاقتان أ. معتصم ريحان مساعدة

لسنة

حجم أكبر مخروط دائري قائم (المخروط الداخلي)

ارتفاع المخروط الداخلي الصغير

$م = \frac{1}{3}$ (مساحة القاعدة) × الارتفاع

$م = \frac{1}{3}(\pi نق^2) \times (12-س)$

وزع

$م = \frac{1}{3}\pi نق^2 \times (12 - 3نق)$

$م = 4\pi نق^2 - \pi نق^3$

$م' = 8\pi نق - 3\pi نق^2 = ه$

$\pi نق(8 - 3نق) = ه$

إما $\pi نق = 0$ أو $8 - 3نق = ه$

$نق = ه$ أو $نق = \frac{8}{3}$ مرفوض

نعوض الآن لنجد س

$\therefore س = 3نق$

$\therefore س = 3 \times \frac{8}{3} = 8$ #

(*) لاحظ من الشكل المثلث الكبير P ب ج يشابه المثلث الصغير م و ج

وهذا التشابه ينتج أن

$\frac{س}{12} = \frac{نق}{4}$

ارتفاع المثلث الصغير ← س

ارتفاع المثلث الكبير ← 12

نصف قطر المخروط الصغير ← نق

نصف قطر المخروط الكبير ← 4

ومنها $س = \frac{12نق}{4}$

$\therefore س = 3نق$

ملاحظة: نوحد الرموز ونفوض مكانة سينة.

أ. معتصم ريحان

م' + + + + − − − −

$\frac{8}{3}$

يكون عظمى مطلقة عند $نق = \frac{8}{3}$

المطلوب ← حجم المخروط الداخلي الصغير

$= \frac{1}{3} \times \pi نق^2 \times ع$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times (\frac{8}{3})^2 \times (12-8)$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{64}{9} \times 4 = \frac{256\pi}{27}$ #

أ. معتصم ريحان

00972598709519

تابعني على الفيس والتويتر

صح

أ. معتصم ريحان



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

س خارجي: أوجد أقصر مسافة بين النقطة (٠، ٦) والمنحنى $س^٢ - ص^٢ = ١٦$

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين مميزة

نريد علاقتان

**أساسية**

أقصر مسافة بين النقطة والمنحنى

$ف = \sqrt{(ص_٢ - ص_١)^٢ + (س_٢ - س_١)^٢}$

نفرض النقطة التي على المنحنى (س، ص)

∴ النقطتين هما (٠، ٦)، (س، ص)

$ف = \sqrt{(ص - ٦)^٢ + (س - ٠)^٢}$

$ف = \sqrt{ص^٢ - ١٢ص + ٣٦ + س^٢}$

$ف = \sqrt{ص^٢ - ١٢ص + ٣٦ + ١٦ + ص^٢}$

$ف = \sqrt{٢ص^٢ - ١٢ص + ٥٢}$ الآن نشتق ونصفر

$ف' = \frac{٤ص - ١٢}{٢\sqrt{٢ص^٢ - ١٢ص + ٥٢}}$ = صفر ومنها $٤ص - ١٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{ص = ٣}$

خطوة الفحص $ف'$: $- - - \; ٣ \; + + +$

عند ص = ٣ قيمة صغرى مطلقة.

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

المطلوب أقصر مسافة ∴

∴ $ف = \sqrt{٢ص^٢ - ١٢ص + ٥٢}$

$ف = \sqrt{٢(٣)^٢ - ١٢(٣) + ٥٢} = \boxed{\sqrt{٣٤}}$ #

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين مميزة
00972598709519

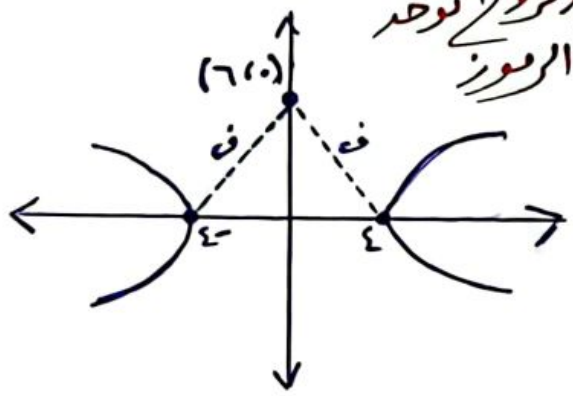
**مساعدة**

نعطي معادلة المنحنى

$س^٢ - ص^٢ = ١٦$

ومنها $\boxed{س^٢ = ١٦ + ص^٢}$

يلا نروح نوحد الرموز




(*) الرسم فقط علشان يتم توضيح السؤال فقط.
أما الرسم مش واجب "إلزامي وعليه علامات"، فقط علشان تعرف تحل.

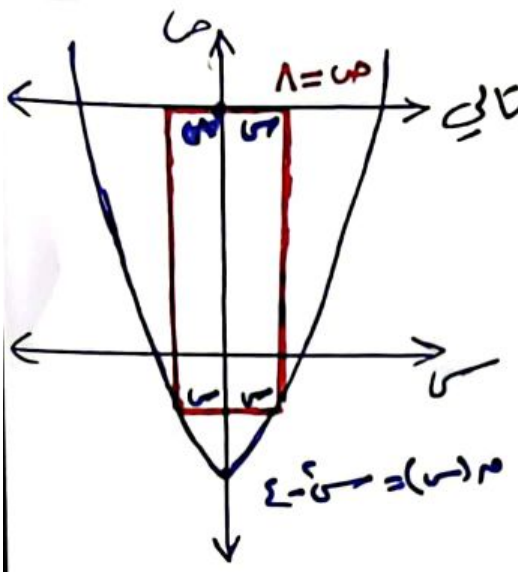
(*) فكرة الدرس وخطوات الحل ⇐ ارسم علاقتان برموز موحدة واشتق وصفر ثم جد المطلوب، وماتنسى خطوة الفحص

(*) يمكنك الفحص باختبار المشتقة الأولى أو الثانية أنت حر.



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي / جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل من الشكل التالي




نريد علاقتان

المساحة

مساحة أكبر مستطيل

م = الطول × العرض

م = (٨ + -ص) × ٢س

م = ١٦س - ٢س ص

م = ١٦س - ٢س (٤ - س٢)

م = ١٦س - ٢س + ٨س

م = -٢س + ٢٤س

م = -٦س٢ + ٢٤ = صفر

⇐ س٢ = ٤

∴ س = ٢

مساعدة

نعلم أن الشكلان

م(س) = ٤ - س٢

∴ ص = ٤ - س٢ ← بدلا نوجد الرمز

أ. مقصم ريحان

م

+++ | --- | +++

٢

أرجع عوض لايجاد المطلوب

م = -٢س٣ + ٢٤س

م = -٢(٢)٣ + ٢٤(٢)

م = -١٦ + ٤٨

م = ٣٢ وحدة ٢ #

أ. مقصم ريحان

خارجي / اوجد حجم أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها ٣√٢ سم

نريد علاقتان

المساعدة

المطلوب

حجم أكبر اسطوانة دائرية قائمة

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = ط نق٢ × ع

ح = ط نق٢ × ٢ × ع

ح = ط نق٢ × ٢ × √(٣٢ - نق٢)

ح = ٢(ط نق٢ × -٢نق / ٢√(٣٢ - نق٢) + √(٣٢ - نق٢) × ٢ط نق)

ح = -ط نق٣ / √(٣٢ - نق٢) + ٢ط نق √(٣٢ - نق٢) = صفر

بضرب الطرفين في √(٣٢ - نق٢) ← اشتقينا ومساويناها بصفر

-ط نق٣ + ٢ط نق (٣٢ - نق٢) = صفر

-ط نق٣ + ٦٤ط نق - ٢ط نق٣ = صفر

-٣ط نق٣ + ٦٤ط نق = صفر

-٣ط نق (نق٢ - ٢) = صفر

-٣ط نق = صفر ⇐ نق = صفر ← مرفوض

أو نق٢ - ٢ = صفر

نق٢ = ٢

نق = √٢

ح ← +++ | --- | +++

٢

المطلوب ح = ط × (√٢)٢ × (١)٢ = ٤ط سم٣ #

أ. مقصم ريحان

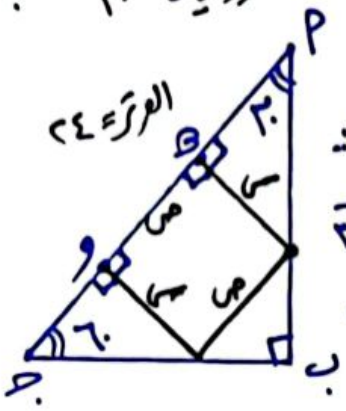


CamScanner

خارجي مهم

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث قائم وتره ٢٤ واحدى زواياه ٣٠°.

نريد علاقتان




**أساسية**

مساحة أكبر مستطيل

م = س × ص

م = س × (√٣ س + س/√٣ − ٢٤)

م = √٣ س² + ١/√٣ س² − ٢٤ س

م' = ٢√٣ س + ٢/√٣ س − ٢٤ = صفر

(٢√٣/١ + ٢/√٣) س = ٢٤

(٦ + ٢)/√٣ س = ٢٤

س = ٢٤ × √٣/٨ ⟸ س = ٣√٣

**مساعدة**

(*) من الشكل نلاحظ كل من الآتي:

ظا ٣٠ = س/أهـ ⟸ أهـ = س/ظا ٣٠

ظا ٦٠ = س/وجـ ⟸ وجـ = س/ظا ٦٠

الوتر = أهـ + هـ و + وجـ

٢٤ = س/ظا ٣٠ + ص + س/ظا ٦٠

٢٤ = س/(١/√٣) + ص + س/√٣

٢٤ = √٣ س + ص + س/√٣

ص = √٣ س + س/√٣ − ٢٤

أ. معتصم ريحاني

تابعني على الفيس واليوتيوب

حصص خاصة أونلاين.

خطوة الفحص

م' +++ ٣√٣ ---

ارجع عوض لايجاد ص

ص = √٣ × ٣√٣ + ٣√٣/√٣ − ٢٤

ص = ٩ + ٣ − ٢٤

ص = −١٢ نتكلم عن طول

∴ ص = ١٢

المطلوب مساحة المستطيل = س × ص

= ٣√٣ × ١٢

= ٣٦√٣ #

أ. معتصم ريحاني

00972598709519

ص ٥



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

**جميل خارجي** يُراد صنع صندوق على هيئة متوازي مستطيلات مفتوح من أعلى وذلك بقطع أربعة مربعات صغيرة متطابقة من زوايا صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ دسم، ثم ثنيت الحواف إلى أعلى، ما طول ضلع كل من هذه المربعات إذا كانت سعة الصندوق أكبر ما يمكن ؟؟ أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان

**أساسية**

سعة الصندوق أكبر ما يمكن

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الإرتفاع

**مساعدة**

طول الصفيحة = ١٢

عرض الصفيحة = ١٢

بعد قطع القطع الصغير

الطول = ١٢ - ٢س

العرض = ١٢ - ٢س

عوض

ح = (١٢ - ٢س) × (١٢ - ٢س) × س

ح = (١٢ - ٢س)$^{٢}$ × س

ح = (١٤٤ - ٤٨س + ٤س$^{٢}$) × س

ح = ١٤٤س - ٤٨س$^{٢}$ + ٤س$^{٣}$ ⟸ حَ = ١٤٤ - ٩٦س + ١٢س$^{٢}$ = صفر

⟸ س$^{٢}$ - ٨س + ١٢ = ٠ ⟸ (س - ٢)(س - ٦) = ٠ ⟸ إما س = ٢ أو س = ٦

عند س = ٢ يوجد قصوى عظمى مطلقة.

∴ طول ضلع المربع لتكون السعة أكبر ما يمكن هي عند س = ٢

+ + + ٢ - - - ٦ + +

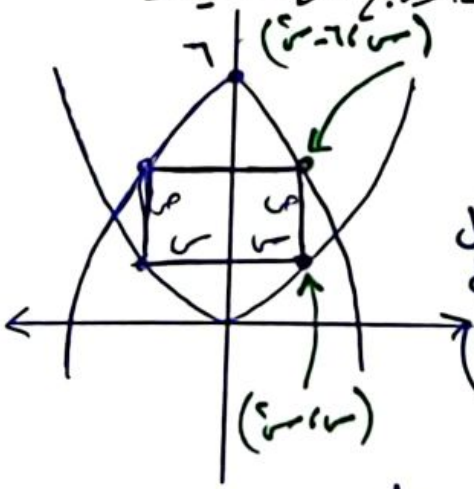
لو طلب الحجم لمتوازي المستطيلات = (١٢ - ٢ × ٢)$^{٢}$ × ٢ = ٦٤ × ٢ = ١٢٨ دسم$^{٣}$

أ. معتصم ريحان

00972598709519

---

**رابع خارجي** ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث رؤوسه الأربع على منحنيات ق(س) = س$^{٢}$ ، هـ(س) = ٦ - س$^{٢}$




أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان

**أساسية**

مساحة أكبر مستطيل

م = ٢س × ص

م = ٢س × (٦ - س$^{٢}$ - س$^{٢}$)

م = ١٢س - ٤س$^{٣}$

مَ = ١٢ - ١٢س$^{٢}$ = صفر

س$^{٢}$ = ١

س = ١

**مساعدة**

٢س: طول المستطيل

ص: عرض المستطيل

عرض المستطيل

ص = (٦ - س$^{٢}$) - (س$^{٢}$)

المطلوب: مساحة المستطيل = ٢س × ص

= ٢ × ١ × ٤

= ٨ وحدة

مَ + + + ١ - - عند س = ١ عظمى مطلقة.

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين

00972598709519

ص 6



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي / قطاع دائري محيطه ٢٠ م ، جد نصف قطر دائرته لتكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين

الحل

نريد علاقتان

أساسية

مساحة القطاع أكبر ما يمكن

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ × نصف القطر × طول القوس

م = $\frac{1}{2}$ × نق × ل

م = $\frac{1}{2}$ × نق × (٢٠ − ٢نق)

م = ١٠نق − نق$^2$ ⟸ م' = ١٠ − ٢نق = صفر ⟸ $\boxed{\text{نق} = ٥}$

مساعدة ⟸ محيط القطاع

٢٠ = ل + ٢نق

⟸ ل = ٢٠ − ٢نق

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين

م' + + + ٥ − − −

عند نق = ٥ يوجد قيمة عظمى مطلقة

المطلوب للمساحة = $\frac{1}{2}$ × ٥ × ١٠ = $\boxed{٢٥}$

أ. معتصم ريحان
00972598709519
تابعين لي الفيس واليوتيوب

## قوانين القطاع الدائري :-

(1) مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ × نصف القطر × طول القوس

محيط القطاع = ٢نق + ل

(2) مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ × نق$^2$ × هـ ← قياس الزاوية المركزية أو زاوية القطاع بالراديان

نصف قطر الدائرة

(3) مساحة القطاع = ٢٢ نق$^2$ × $\frac{\text{هـ}}{٣٦٠}$ ← زاوية القطاع

خارجي / متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مربع فإذا كان مجموع أطوال أبعاده الثلاثة ١٢٠ سم فأوجد هذه الأبعاد عندما تكون مجموع مساحات أوجهه الكلية أكبر ما يمكن

أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان

أساسية

المساحة الكلية = مساحة القاعدتين + مساحة الأوجه الجانبية

م = ٢س$^2$ + ٤س ص

م = ٢س$^2$ + ٤س (١٢٠ − ٢س)

م = ٢س$^2$ + ٤٨٠س − ٨س$^2$

م = −٦س$^2$ + ٤٨٠س

م' = −١٢س + ٤٨٠ = صفر

$\boxed{\text{س} = ٤٠}$

مساعدة

القاعدة مربعة

مساحتها = س$^2$

مساحة القاعدتين = ٢س$^2$

مساحة الجوانب = ٤س ص

٢س + ص = ١٢٠ ← مجموع أطوال الثلاثة

$\boxed{\text{ص} = ١٢٠ - ٢\text{س}}$

يلا نوحد الرموز

المطلوب أطوال المتوازي المستطيلات

س س ص

٤٠ ٤٠ ٤٠

أ. معتصم ريحان

م' + + ٤٠ − − −

عظمى مطلقة عند س = ٤٠

ص 7

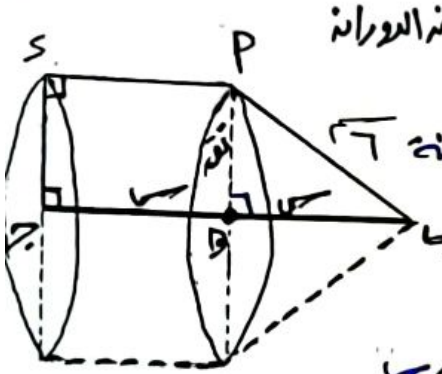


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

توجيهي علمي 2022
أ. معتصم ريحان
00972598709519

## ⑯ تابع حل أسئلة خارجية مرجعة على درس التطبيقات العملية على القيم القصوى ⑯

**خارجي** أ ب ج د شبه منحرف طول ب ج ضعف طول أ د، $m\angle P = m\angle دج = m\angle دجب = 90°$، طول أ ب = ٦ سم كما في الشكل المجاور. تم تدوير الشكل حول الضلع ب ج، جد أكبر حجم للجسم الناتج عن الدوران




نريد دقيقتان

**مساعدة**

إرتفاع الاسطوانة ٦ − س

إرتفاع المخروط = س

حسب فيثاغورس

$نق^2 + س^2 = (٦)^2$

$نق^2 = ٣٦ - س^2$

يلا نوحد الرموز

**الحل**

حجم الجسم أكبر ما يمكن

الجسم الناتج = اسطوانة + مخروط

حجم الجسم $= \pi نق^2 \times س + \frac{1}{3}\pi نق^2 \times س$

$ح = \pi س (٣٦ - س^2) + \frac{\pi س}{3}(٣٦ - س^2)$

$ح = ١٠٨\pi س - \pi س^3 + ١٢\pi س - \frac{\pi س^3}{3}$

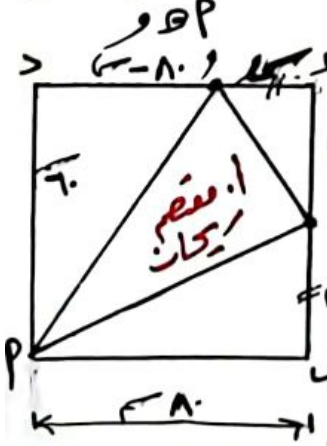
$ح = ١٢٠\pi س - \frac{4}{3}\pi س^3$

$ح' = ١٢٠\pi - ٤\pi س^2 = 0 \Leftarrow ٤\pi(٣٠ - س^2) = 0 \Leftarrow س^2 = ٣٠$

$\therefore س = \sqrt{٣٠}$ عندما $س = \sqrt{٣٠}$ يتغير $ح'$ من + إلى − فتكون عظمى مطلقة

**المطلوب** $ح = ١٢٠\pi(\sqrt{٣٠}) - \frac{4}{3}\pi(\sqrt{٣٠})^3 = ٢٠٠\pi - ٨٠\pi = ١٢٠\pi$

**خارجي** أراد أحد الأشخاص تصميم رايته على شكل مستطيل صفراء اللون وبداخلها مثلث أحمر اللون بحيث ب ج = ج د = س، كما في الشكل المجاور، جد أقل مساحة ممكنة للمثلث




نريد دقيقتان

**مساعدة**

**الحل**

أقل مساحة ممكنة للمثلث P ج د

م = (مساحة المستطيل − مجموع مساحة المثلثات البقية)

$م = ٨٠ \times ٦٠ - \left(\frac{1}{2} \times ٨٠ \times س + \frac{1}{2} \times س \times (٦٠ - س) + \frac{1}{2} \times ٦٠ \times (٨٠ - س)\right)$

$م = ٤٨٠٠ - (٤٠س + ٣٠س - \frac{1}{2}س^2 + ٢٤٠٠ - ٣٠س)$

$م = ٤٨٠٠ - ٤٠س - ٣٠س + \frac{1}{2}س^2 - ٢٤٠٠ + ٣٠س$

$م = \frac{1}{2}س^2 - ٤٠س + ٢٤٠٠$

**المطلوب** $م = \frac{1}{2}(٤٠)^2 - ٤٠(٤٠) + ٢٤٠٠$

$م = ٨٠٠ - ١٦٠٠ + ٢٤٠٠$

$م = ١٦٠٠ سم^2$

$م' = س - ٤٠ = 0$

$س = ٤٠$

إشارة م': − | 0 | +

م تتناقص ثم تتزايد، عند س = ٤٠ قيمة صغرى مطلقة



Camscanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي / يُراد عمل خزان معدني مقفل على هيئة متوازي مستطيلات سعته ٤٥ م٣ بحيث تكون كل من قاعدتيه العليا والسفلى مربعة الشكل ، فإذا كانت تكاليف المتر المربع الواحد من القاعدة السفلى ٤ دنانير ومن القاعدة العليا ٦ دنانير لكل متر مربع ومن الجوانب ٣ دنانير لكل مربع أوجد أبعاد هذا الخزان حتى تكون تكاليفه أقل ما يمكن ، وما هي تكاليفه عندئذٍ ؟؟

أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان

طول الخزان = س
عرض الخزان = س
ارتفاع الخزان = ص

**مساعدة**

حجم الخزان = س × س × ص

٤٥ = س٢ ص

$\boxed{\frac{٤٥}{س^٢} = ص}$ يلا نوحد الرموز

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أون لاين مميزة

**أساسية**

تكاليف الخزان أقل ما يمكن

٤ جوانب

ت = ٤ × س٢ + ٦ × س٢ + ٣ (٤ س ص)

ت = ١٠ س٢ + ٣ (٤ س × $\frac{٤٥}{س^٢}$)

ت = ١٠ س٢ + $\frac{٥٤٠}{س}$

ت' = ٢٠ س + $\frac{-٥٤٠}{س^٢}$ = صفر

٢٠ س٣ = ٥٤٠ ⇐ س٣ = ٢٧

⇐ $\boxed{س = ٣}$

ت' ---- ٣ +++

عند س = ٣ قيمة صغرى مطلقة.

المطلوب ⇐ أبعاد الخزان

س = ٣ ، ص = ٥

ت = ١٠ (٣)٢ + $\frac{٥٤٠}{٣}$ = ٩٠ + ١٨٠ = ٢٧٠ دينار

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس والبوتيوب.

خارجي / قطاع دائري محيطه ٢٠ سم ، جد نصف قطر دائرته لتكون مساحته أكبر ما يمكن

قطاع دائري

الحل / نريد علاقتان

**مساعدة**

محيط القطاع = ٢٠ سم

(*) محيط القطاع = ٢ نق + ل

٢٠ = ٢ نق + ل

$\boxed{٢٠ - ٢ نق = ل}$ يلا نوحد الرموز

ل = ٢٠ − ٢ × ٥ = $\boxed{١٠}$

**أساسية**

مساحة القطاع أكبر ما يمكن

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ × نق × ل

م = $\frac{١}{٢}$ × نق × (٢٠ − ٢ نق)

م = ١٠ نق − نق٢

م' = ١٠ − ٢ نق = صفر

$\boxed{نق = ٥}$

+++ ---

عند نق = ٥ يوجد قيمة عظمى مطلقة

المطلوب المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٠

= $\boxed{٢٥}$ #

أ. معتصم ريحان / حصص خاصة أون لاين مميزة

00972598709519

تابعني على الفيس والبوتيوب

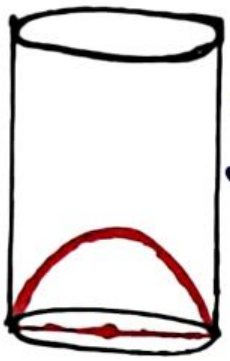
ص2



حة ضوئيا بـ CamScanner

**س خارجي** قطعة خشب على شكل اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٠٠ π سم²
حُفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساوٍ لطول قطر قاعدة الإسطوانة
جد طول قطر قاعدة الإسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة أكبر ما يمكن.

نريد علاقتان



**مساعدة**

المساحة الجانبية للأسطوانة = ٤٠٠ π

محيط القاعدة × الارتفاع = ٤٠٠ π

٢ نق π ع = ٤٠٠ π

ع = ٤٠٠ / ٢ نق

$\boxed{ع = \frac{٢٠٠}{نق}}$

يلا نوحد الرموز

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين مميزة

**أساسية**

حجم الجزء المتبقي للأسطوانة أكبر ما يمكن

الحجم المتبقي = حجم الاسطوانة − ½ حجم الكرة

ح = π نق² ع − ½ × ٤/٣ × π نق³

ح = π نق² − ٢/٣ × π نق³

ح = ٢٠٠ π نق − ٢/٣ π نق³

حَ = ٢٠٠ π − ٢ π نق² = صفر

٢ π (١٠٠ − نق²) = صفر

$\boxed{نق = ١٠}$

حَ + + − −
١٠

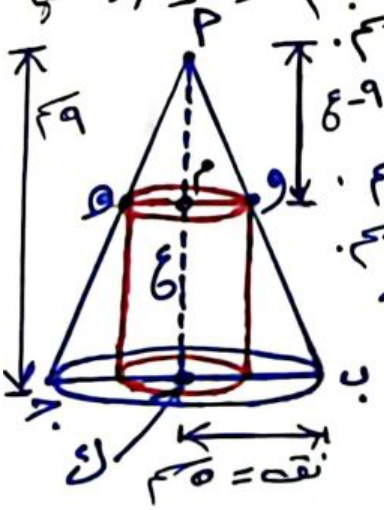
عظمى عند نق = ١٠ مطلقة

∴ المطلوب طول القطر = ٢٠

أ. معتصم ريحان 00972598709519

---

**س خارجي** جد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم والتي يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم نصف قطره ٥ سم وارتفاعه ٩ سم.




نريد علاقتان

**الحل**

**مساعدة**

ارتفاع المخروط = ٩ سم.
نق للمخروط = ٥ سم.
من الشكل يتشابه المثلث أ ب ك الكبير مع المثلث أ و م الصغير وينتج من التشابه أن:

$\frac{نق}{٥} = \frac{٩ - ع}{٩}$

المثلث الصغير ← نق ، ٥ ← قاعدة المثلث الكبير

ارتفاع المثلث الصغير ← ٩ − ع
ارتفاع المثلث الكبير ← ٩

٩ − ع = ٩ نق / ٥

$\boxed{ع = ٩ - \frac{٩ نق}{٥}}$

**أساسية**

الأسطوانة ذات الأكبر حجم

حجم الأسطوانة = π نق² ع

ح = π نق² × (٩ − ٩ نق / ٥)

ح = ٩ π نق² − ٩ π / ٥ نق³

حَ = ١٨ π نق − ٢٧ π / ٥ نق² = صفر

π نق (١٨ − ٢٧/٥ نق) = صفر

نق = ١٨ × ٥/٢٧

$\boxed{نق = \frac{١٠}{٣}}$

حَ + + + − − − −
١٠/٣

عند ١٠/٣ قيمة عظمى مطلقة

المطلوب ع = ٩ − ٩ × ١٠/٣ / ٥ = ٣ (ص³)



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي / دائرتان لهما نفس المركز م ونصف قطر الصغرى = ٩ سم ، ونصف قطر الكبرى = ١٥ سم فإذا أخذ نصف قطر الصغرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره ٥ سم/ث بينما أخذ نصف قطر الكبرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره ٤ سم/ث فأوجد أكبر مساحة ممكنة بين الدائرتين بحيث لا يتعدى نصف قطر الصغرى نصف قطر الكبرى .

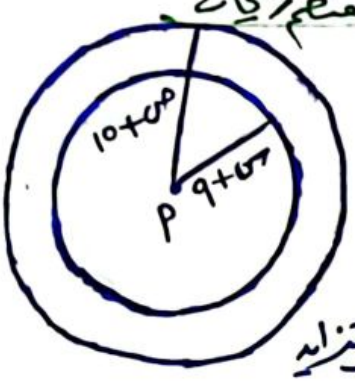
أ. معتصم ريحان

نريد معادلتان

مساعدة

(الصغرى) نق = ٩ سم

(الكبرى) نق = ١٥ سم




أ. معتصم ريحان

بالتعليق

أكبر مساحة ممكنة بين الدائرتين

المساحة المحصورة بين الدائرتين = مساحة الدائرة الكبرى − مساحة الدائرة الصغرى

$م = \pi(١٥+ص)^{٢} - \pi(٩+س)^{٢}$

$م = \pi(١٥+٤ن)^{٢} - \pi(٩+٥ن)^{٢}$

$م = ٢\pi(١٥+٤ن)\times٤ - ٢\pi(٩+٥ن)\times٥ = ف$

$م = ٨\pi(١٥+٤ن) - ١٠\pi(٩+٥ن) = ف$

$م = ٢٢\pi ن + ١٢٠\pi - ٥٠\pi ن - ٩٠\pi = ف$

$م = -١٨\pi ن + ٣٠\pi = ف$

$\pi(-١٨ن + ٣٠) = ف$

$ن = \frac{٣٠}{١٨} = \frac{٥}{٣}$ #

م: +++ | $\frac{٥}{٣}$ | ---

عند $\frac{٥}{٣}$ يحقق عظمى مطلقة

(*) نصف قطر الصغرى يتزايد

$٩ + س$

(*) نصف قطر الكبرى يتزايد $١٥ + ص$

$\frac{دس}{دن} = ٥$ سم/ث ← تغير الصغرى بالنسبة للزمن

$\frac{دص}{دن} = ٤$ سم/ث ← تغير الكبرى بالنسبة للزمن.

$\therefore س = ٥ن$

$\therefore ص = ٤ن$

أ. معتصم ريحان

المسافة = السرعة × الزمن

المطلوب ⇐ $م = \pi(١٥+٤\times\frac{٥}{٣})^{٢} - \pi(٩+٥\times\frac{٥}{٣})^{٢}$

$م = ٣٠٠,٤٤\pi - ٤٦٩,٤٤\pi$

$م = ١٦٩\pi$

أ. معتصم ريحان / تابعني على الفيس واليوتيوب.

(*) لاحظ أيضاً أنه :.

نصف قطر الصغرى ⇐ $س + ٩ = ٥\times\frac{٥}{٣} + ٩ = \frac{٥٢}{٣}$

نصف قطر الكبرى ⇐ $ص + ١٥ = ٤\times\frac{٥}{٣} + ١٥ = \frac{٦٥}{٣}$

شرط السؤال ⇐ نصف قطر الصغرى < نصف قطر الكبرى


أ. معتصم ريحان
مرحبا خاصة أو نة لا ينسه ميزة
00972598709519


تابعني على الفيس واليوتيوب

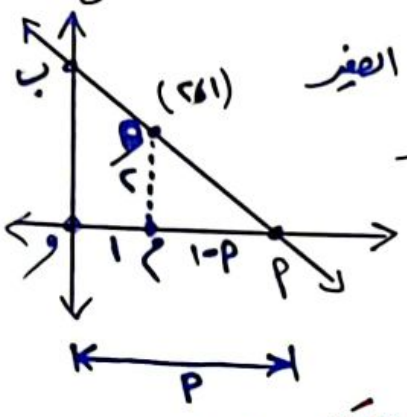


ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خارجي / مستقيم يمر بالنقطة الثابتة (١، ٢) ويقطع محور السينات والصادات في النقطتين أ، ب أوجد أصغر مساحة ممكنة للمثلث و أ ب الواقع في الربع الأول «حيث و نقطة الأصل»

أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان




أساسية

أصغر مساحة للمثلث و أ ب

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الإرتفاع

$م = \frac{1}{2} \times أ \times ب$

$م = \frac{1}{2} \times أ \times \frac{2أ}{أ-1}$

$م = \frac{أ^2}{أ-1}$

$م' = \frac{(أ-1) \times 2أ - أ^2 \times (1)}{(أ-1)^2} = صفر$

$م' = \frac{2أ^2 - 2أ - أ^2}{(أ-1)^2} = \frac{أ^2 - 2أ}{(أ-1)^2} = صفر$ ∴ البسط = صفر

$أ^2 - 2أ = 0 \Leftarrow \boxed{أ = 2}$

مساعدة

يتشابه المثلث أ م هـ الصغير مع المثلث أ و ب الكبير وينتج من التشابهة

$\frac{2}{ب} = \frac{أ-1}{أ}$

$\boxed{ب = \frac{2أ}{أ-1}}$

يلا نوحد الرموز

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

00972598709519

م' ---- +++ ، ٢ ، عند ٢ قيمة صغرى مطلقة

نعوض لإيجاد $ب = \frac{2 \times 2}{2-1} = \boxed{4}$

المطلوب مساحة المثلث و أ ب $= \frac{أ^2}{أ-1} = \frac{2^2}{2-1} = \boxed{4}$ وحدات مربعة

أ. معتصم ريحان.

---

خارجي / جد أقل كمية من الصفيح اللازمة لصناعة علبة على شكل إسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين سعتها ١٦ π سم³

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أون لاين

نريد علاقتين

أساسية

أقل كمية من الصفيح لصناعة العلبة

كمية الصفيح = المساحة الكلية للأسطوانة = ٢π نق² + ٢ نق π ع

القاعدتين ، الجانبية

$ك = 2\pi نق^2 + 2 نق \pi \times \left(\frac{16}{نق^2}\right)$

$ك = 2\pi نق^2 + \frac{32\pi}{نق}$

$ك' = 4\pi نق + \frac{-32\pi}{(نق)^2} = صفر$

$4\pi نق^3 - 32\pi = صفر$

$4\pi (نق^3 - 8) = صفر$

$\boxed{نق = 2}$

ك' ---- +++ ، ٢ ، عند نق = ٢ قيمة صغرى مطلقة

مساعدة

حجم الاسطوانة = π نق² × ع

$16\pi = \pi نق^2 ع$

$\boxed{ع = \frac{16}{نق^2}}$

يلا نروح نوحد الرموز.

أ. معتصم ريحان

المطلوب كمية الصفيح

$ك = 2\pi (2)^2 + \frac{32\pi}{2}$

$ك = 8\pi + 16\pi = \boxed{24\pi}$ سم²

أ. معتصم ريحان

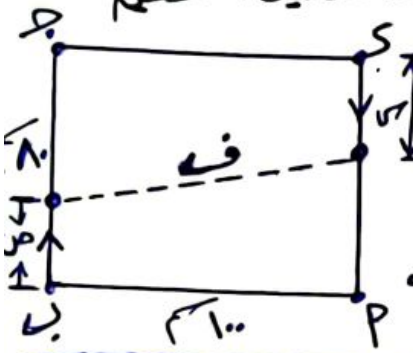
00972598709519

حل



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي جميل / مستطيل أ ب جـ د فيه أ ب = ١٠٠ سم ، ب جـ = ٨٠ سم ، فإذا تحركت نقطة من د باتجاه أ بسرعة منتظمة مقدارها ٥ سم/ث وتحركت نقطة أخرى من ب باتجاه جـ بسرعة منتظمة مقدارها ٣ سم/ث فمتى تكون المسافة بين النقطتين أقل ما يمكنه وما مقدارها عندئذ ؟؟ أ. معصم ريحان




نريد علامتان

الحل

مساعدة

مُعطى س = ٥ سم/ث ⟸ س = ٥ ن

مُعطى ص = ٣ سم/ث ⟸ ص = ٣ ن

المسافة = السرعة × الزمن

المسافة بين النقطتين أقل ما يمكنه

ف = √(ص − ص)² + (س − س)²

ف² = (١٠)² + (٨٠ − (٥ن + ٣ن))²

ف² = (١٠٠) + (٨٠ − ٨ن)²

أ. معصم ريحان

نشتقه بالنسبة للزمن .

٢ ف ف' = ٢ (٨٠ − ٨ن) × −٨

نضع ف' = صفر

صفر = −١٦ (٨٠ − ٨ن)

صفر = (٨٠ − ٨ن) ⟸ ن = ١٠

عندن = ١٠ تتحقق شروط طلقة

(*) المطلوب ⟸ المسافة

ف² = (١٠)² + (٨٠ − ٨ن)²

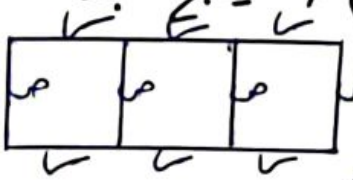
ف² = (١٠)² + (٨٠ − ١٠×٨)²

ف² = ١٠٠

ف = ١٠٠

(*) والجواب فلحقر لأنه أقل مسافة بين الضلع أ د والضلع ب جـ عندما يكون المستقيم أفقي وليس له شكل وتر ويكون عندها موازي أ ب . أ. معصم ريحان

خارجي جميل / لدى رجل حقل مستطيل يُريد احاطته بسياج تم تقسيمه إلى ثلاثة أقسام متطابقة بسياجين يوازيان أحد أضلاعه ، فإذا كان لديه ١٠٠٠ م من السياج فجد أكبر مساحة يمكنه احاطتها بالسياج . أ. معصم ريحان




نريد علامتان

الحل

أكبر مساحة يمكنه احاطتها بسياج

مساحة القطع = ٣ × (س ص)

م = ٣ ص × (١٠٠٠/٦ − ٤ص/٦)

م = ٥٠٠ ص − ٢ ص²

مساعدة

طول السياج = ١٠٠٠ متر

٦س + ٤ص = ١٠٠٠

٦س = ١٠٠٠ − ٤ص

س = ١٠٠٠/٦ − ٤ص/٦

أ. معصم ريحان

م' = ٥٠٠ − ٤ص = صفر

ص = ١٢٥

(*) المطلوب ⟸ المساحة = ٥٠٠ ص − ٢ ص²

= ٥٠٠ × ١٢٥ − ٢ (١٢٥)²

= ٦٢٥٠٠ − ٣١٢٥٠

= ٣١٢٥٠ م²

أ. معصم ريحان

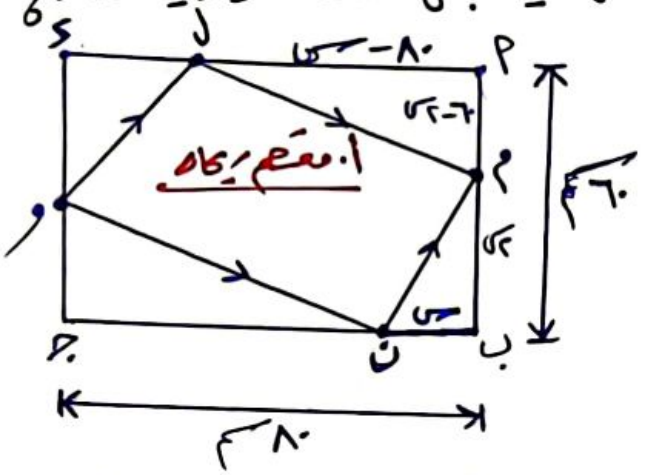
حصص خاصة أدنة لابنة

عند ص = ١٢٥ تتحقق شروط طلقة



CamScanner الماسحة ضوئيا بـ

خارجي / ا ب ج د مستطيل فيه ا ب = ٦٠ سم ، ب ج = ٨٠ سم
م ن و ل متوازي أضلاع كما في الشكل، ما قيمة س التي تجعل مساحة متوازي الأضلاع أكبر ما يمكن علماً بأن ٢ ب = ٢ ب ن




نريد علاقات
مساعدة
أ. معتصم ريحاوي
نحسب
مساحة متوازي الأضلاع أكبر ما يمكن

مساحة متوازي الأضلاع = مساحة المستطيل - (مجموع مساحات المثلثات المتبقية)

م = ٤٨٠٠ - (٢س² - ٢٢٠س + ٤٨٠٠)

م = ٤٨٠٠ - ٢س² + ٢٢٠س - ٤٨٠٠

م = -٢س² + ٢٢٠س

م' = -٤س + ٢٢٠ = صفر

س = ٢٢٠ / ٤ = ٥٥ سم

أ. معتصم ريحاوي
م متصلة وقابلة للاشتقاء على ح
م' + عند ٥٥ - عند ٥٥

المطلوب عندما س = ٥٥ سم #

أ. معتصم ريحاوي

① مساحة المثلث م ا ل = مساحة و ج ن
② مساحة المثلث م ب ن = مساحة ل د و

③ مساحة Δ م ا ل = ½ × (٦٠ - ٢س) × (٨٠ - س)
= ½ × (٤٨٠٠ - ٦٠س - ١٦٠س + ٢س²)

∴ مساحة Δ م ا ل + مساحة Δ و ج ن
= ٤٨٠٠ - ٦٠س - ١٦٠س + ٢س²
= ٢س² - ٢٢٠س + ٤٨٠٠

④ مساحة Δ م ب ن = ½ × س × ٢س
= س × س = س²

∴ مساحة Δ م ب ن + مساحة Δ ل د و
= ٢س² - ٢٢٠س + ٤٨٠٠

خارجي / أحب أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين يمكن صنعها من صفيحة معدنية مساحتها ٣٦٠٠ سم²

أ. معتصم ريحاوي
المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + القاعدتين
٣٦٠٠ = ٢ π نق ع + ٢ π نق²
ع = (٣٦٠٠ - ٢ π نق²) / ٢ π نق

نريد علاقة
أكبر حجم للأسطوانة
حجم الأسطوانة = π نق² × ع
ح = π نق² × (٣٠٠ - نق²) / نق
ح = π (٣٠٠ نق - نق³)
ح' = π (٣٠٠ - ٣ نق²) = صفر

نق = ١٠

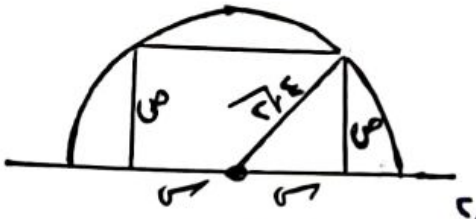
عظمى
+++ | ---
١٠

أ. معتصم ريحاوي
ع = (٣٠٠ - نق²) / نق

المطلوب ح = π (٣٠٠ × ١٠ - ١٠³) = ٢٠٠٠ π سم³


CamScanner بـ صوتيا

**س خارجي** جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة ، نصف قطرها $٤\sqrt{٢}$ بحيث ينطبق أحد أضلاعه على قطر الدائرة .




**الحل**

نريد علاقتان

**أساسية**

جد بعدي أكبر مستطيل

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$م = ٢س \times ص$

$م = ٢س \times \sqrt{٣٢ - س^٢}$

**مساعدة**

حسب فيثاغورس

$س^٢ + ص^٢ = (٤\sqrt{٢})^٢$

$ص^٢ = ٣٢ - س^٢$

$\boxed{ص = \sqrt{٣٢ - س^٢}}$ بلا نوحد الرموز

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين

00972598709519

$م' = ٢س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٣٢ - س^٢}} + \sqrt{٣٢ - س^٢} \times ٢ = صفر$ ← ضربنا الطرفين في $\sqrt{٣٢ - س^٢}$

$\Leftarrow -٢س^٢ + (٣٢ - س^٢) \times ٢ = صفر \Leftarrow -٢س^٢ - ٢س^٢ + ٦٤ = ٠$

$\Leftarrow -٤س^٢ = -٦٤ \Leftarrow س^٢ = ١٦ \Leftarrow \boxed{س = ٤}$

+++ ٤ ---

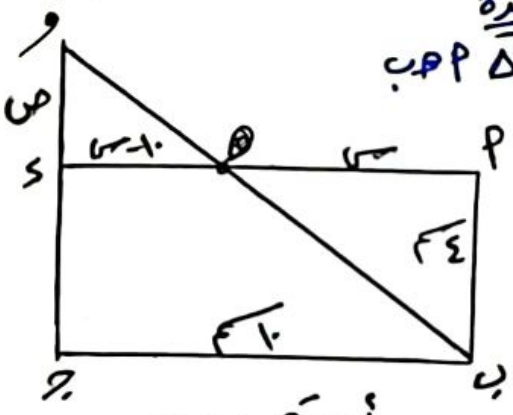
قيمة عظمى مطلقة عند س = ٤

$\therefore ص = \sqrt{٣٢ - ٤^٢} = ٤$ أبعاد المستطيل ٤ ، ٤

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان 00972598709519

**س خارجي** أ ب جـ د مستطيل كما في الشكل حيث أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، مُدَّ الضلع جـ د على استقامته إلى و ، وُصِّل ب و فقطع أ د في هـ ، أ هـ = س ، د و = ص ، جد قيمتي س ، ص ليكون مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، أ هـ ب أصغر ما يمكن




أ. معتصم ريحان

نريد علاقتان

**أساسية**

مجموع مساحتي المثلثين أصغر ما يمكن

المثلث الكبير — المثلث الصغير

$م = \frac{١}{٢} \times س \times ٤ + \frac{١}{٢} \times (١٠ - س) \times ص$

$م = ٢س + \frac{١}{٢} \times (١٠ - س) \times (\frac{٤٠}{س} - ٤)$

$م = ٢س + (٥ - \frac{س}{٢}) \times (\frac{٤٠}{س} - ٤)$

$م = ٢س + \frac{٢٠٠}{س} - ٢٠ - ٢٠ + ٢س$

$م = ٤س + \frac{٢٠٠}{س} - ٤٠$

$م' = ٤ - \frac{٢٠٠}{س^٢} = صفر$

$\frac{٢٠٠}{س^٢} = ٤ \Leftarrow س^٢ = ٥٠$

$\Leftarrow \boxed{س = ٥\sqrt{٢}}$

**مساعدة**

Δ د هـ و يشابه Δ أ هـ ب

إذاً من التشابه ينتج أن

$\frac{١٠ - س}{س} = \frac{ص}{٤}$

$ص = \frac{٤٠ - ٤س}{س}$

$\boxed{ص = \frac{٤٠}{س} - ٤}$

بلا نوحد الرموز

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

الآن نعوض لإيجاد ص

$ص = \frac{٤٠}{٥\sqrt{٢}} - ٤$

$\boxed{ص = ١٫٦٥}$

قيمة صغرى مطلقة عند $٥\sqrt{٢}$

م' --- +++ $٥\sqrt{٢}$

ص8



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

حصة رقم 45

توجيهي علمي 2022

أ. معتصم ريحان

00972598709519

# مراجعة كاملة للوحدة الثانية وأسئلة تفوق على الوحدة

خارجي / قيمة / قيم جـ التي تحددها نظرية رول للاقتران

ق(س) = لو$_{هـ}$ (س + $\frac{1}{س}$) في الفترة [$\frac{1}{4}$ ، ٤] هي :

(أ) ١ (ب) ± ١ الحل ق'(جـ) = صفر ⟸ نتيجة رول

(جـ) ٢ (د) ٣ ق'(س) = $\frac{1 + \frac{-1}{س^2}}{س + \frac{1}{س}}$

∴ ق'(جـ) = $\frac{1 + \frac{-1}{جـ^2}}{جـ + \frac{1}{جـ}}$ = صفر ⟸ البسط = صفر ⟸ ١ + $\frac{-1}{جـ^2}$ = ٠

⟸ $\frac{1}{جـ^2}$ = ١ ⟸ جـ$^2$ = ١ ⟸ جـ = ± ١

السالب مرفوض لأنه لا ينتمي للفترة [$\frac{1}{4}$ ، ٤] # .

أ. معتصم ريحان

شرح على كيف كيف (ك)

تدريس أونلاين بشكل مميز

---

خارجي / كثير حدود من الدرجة الثالثة له نقطة حرجة واحدة فقط عند س = و

أثبت أن الإنعطاف له يحدث عند س = و

الحل ق(س) = أ س$^3$ + ب س$^2$ + جـ س + د ⟸ الصورة العامة لكثير الحدود من الدرجة الثالثة

ق'(س) = ٣ أ س$^2$ + ٢ ب س + جـ

ق''(س) = ٦ أ س + ٢ ب = صفر

∴ س = $\frac{-2ب}{6أ}$

بما أنه للاقتران نقطة حرجة عند س = و

∴ ق''(و) = صفر

∴ س = و = $\frac{-2ب}{6أ}$

نفس إشارة معامل س

عكس إشارة معامل س

إشارة ق''(س)

سلوك ق(س)

− − − ٠ + + +

∩ $\frac{-2ب}{6أ}$ ∪

∴ عند س = و = $\frac{-2ب}{6أ}$ نقطة إنعطاف لأن الاقتران يغير من اتجاه تقعره عندها.

أ. معتصم ريحان

تدريس أونلاين على الزوم

(ص١)



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س/ خارجي إذا كانت $ق(س) = \frac{1}{\text{جاس}}$ ، $س \in [0 ، \pi]$ في أي الفترات التالية يكون ق(س) متزايد ∴

(أ) $[0 ، \frac{\pi}{2}]$ (ب) $[0 ، \frac{\pi}{3}]$ (جـ) $[\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{4}]$ (د) $[\frac{\pi}{2} ، \pi]$

الحل $ق'(س) = \frac{-1 \times \text{جاس} \times \text{جتاس}}{(\text{جاس})^2} = \text{صفر}$ (نساوي البسط بصفر)

∴ $-\text{جتاس} \times \text{جاس} = \text{صفر} \Leftarrow \text{جتاس} = \text{صفر}$

$س = \frac{\pi}{2} \in ]0 ، \pi[$ مقبولة

$س = \frac{3\pi}{2} \notin ]0 ، \pi[$ مرفوضة

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| اشارة ق'(س) | $- - -$ | | $+ + +$ | |
| سلوك ق(س) | صفر ↘ | $\frac{\pi}{2}$ | ↗ | $\pi$ |

∴ ق(س) متزايد $[\frac{\pi}{2} ، \pi]$

أ. معتصم ريحان
00972598709519
حصص خاصة أونه لاين مميزة على الزوم.

س/ كثير حدود من الدرجة الثانية أثبت أن الوتر الواصل بين النقطتين $(س_1 ، ق(س_1))$ ، $(س_2 ، ق(س_2))$ يوازي المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند $\frac{س_1 + س_2}{2}$

الحل $ق(س) = أ س^2 + ب س + جـ$ متصل ح وقابل للاشتقاق

$ق'(س) = 2أ س + ب$ ∴ يوجد $جـ \in ]س_1 ، س_2[$ بحيث

$ق'(جـ) = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

$\Leftarrow 2أ س ب = \frac{أ س_2^2 + ب س_2 + جـ - (أ س_1^2 + ب س_1 + جـ)}{س_2 - س_1}$

$\Leftarrow 2أ س + ب = \frac{أ س_2^2 + ب س_2 + \cancel{جـ} - أ س_1^2 - ب س_1 - \cancel{جـ}}{س_2 - س_1}$

$\Leftarrow 2أ س + ب = \frac{أ (س_2^2 - س_1^2)}{س_2 - س_1} + \frac{ب \cancel{(س_2 - س_1)}}{\cancel{س_2 - س_1}}$

فكينا فرق المربعين

$\Leftarrow 2أ س + ب = \frac{أ \cancel{(س_2 - س_1)} (س_2 + س_1)}{\cancel{س_2 - س_1}} + ب$

$\Leftarrow 2\cancel{أ} س + \cancel{ب} = \cancel{أ} (س_2 + س_1) + \cancel{ب}$

$\Leftarrow 2س = س_2 + س_1 \Longleftarrow س = \frac{س_2 + س_1}{2}$ #.

أ. معتصم ريحان

ص 2



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

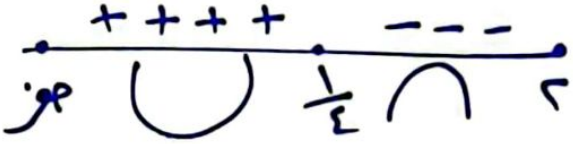
س/ إذا كانت ق(س) = قَ(س) = جا ٣س + جتا ٣س ، س ∈ ]٠، ٢[ عين مجالات التقعر للأعلى وللأسفل.

الحل: قً(س) = ٣ جتا ٣س − ٣ جا ٣س = صفر

⇐ ~~٣~~ جتا ٣س = ~~٣~~ جا ٣س

∴ ٣س = ٤٥°

∴ س = $\frac{٤٥}{١٨٠}$ = $\boxed{\frac{١}{٤}}$



ق(س) مقعر للأعلى ]صفر ، $\frac{١}{٤}$[

ق(س) مقعر للأسفل ]$\frac{١}{٤}$ ، ٢[

عند س = $\frac{١}{٤}$ يوجد نقطة انعطاف

($\frac{١}{٤}$ ، ق($\frac{١}{٤}$)) نقطة انعطاف

+ + + + | − − −

صفر ∪ $\frac{١}{٤}$ ∩ ٢

أ. معتصم ريحان 00972598709519

---

س/ ق(س) = { |−٦ + س² − س| ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ب + أس ، ١ ≤ س < ٢ ؛ جـ ، س = ٢ }

يحقق المتوسطة على مجاله فجد الثوابت أ ، ب ، جـ ثم جد جـ التي تعينها النظرية.

أ. معتصم ريحان

أولاً نعيد تعريف المطلق س² − س − ٦ = ٠ ⇐ (س − ٣)(س + ٢) = ٠ ⇐ س = ٣ ، س = −٢

∴ ق(س) = { −س² + س + ٦ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ب + أس ، ١ ≤ س < ٢ ؛ جـ ، س = ٢ }

+ + | − − | + +

−٢ ، ٣

الفترة المطلوبة ٠ ≤ س < ١

بما أن ق(س) يحقق شروط المتوسطة إذاً متصل وقابل للاشتقاق على الفترة المعطاة.

إذاً ق(س) متصل عند س = ١

−(١)² + (١) + ٦ = ب + أ(١)

$\boxed{٦ = ب + أ}$ ——— (١)

ق(س) متصل عند س = ٢

إذاً $\boxed{ب + ٢أ = جـ}$ ——— (٢)

* الآن سنجد قَ(س)

قَ(س) = { −٢س + ١ ، ٠ < س < ١ ؛ أ ، ١ < س < ٢ }

قَ(١)⁺ = قَ(١)⁻

إذاً −٢(١) + ١ = أ

$\boxed{−١ = أ}$ # أرجع عوض في (١) و (٢)

∴ ب − ١ = ٦ ⇐ $\boxed{ب = ٧}$ #

∴ ٧ + ٢ × −١ = جـ ⇐ $\boxed{جـ = ٥}$ #

∴ ق(س) = { −س² + س + ٦ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ٧ − س ، ١ ≤ س < ٢ ؛ ٥ ، س = ٢ }

أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

ص 3

الآن سنجد قيمة جـ التي تمدها النظرية

قَ(جـ) = $\frac{ق(٢) − ق(صفر)}{٢ − صفر}$

* في الفترة ٠ < جـ < ١

−٢جـ + ١ = $\frac{ق(١) − ق(٠)}{١ − ٠}$

−٢جـ + ١ = $\frac{٦ − ٦}{١}$

−٢جـ + ١ = ٠

$\boxed{جـ = \frac{١}{٢}}$ ∈ ]٠ ، ١[

في الفترة ١ < جـ < ٢

قَ(جـ) ≠ صفر

لأن قَ(جـ) = −١

∴ قيمة جـ هي كل الفترة ]١ ، ٢[



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س/ الشكل التالي ق(س) مجموعة قيم س التي تكون عندها نقطة إنعطاف

أ {٠} ب {٠، ٤} ج {٣} د ∅

الحل

اشارة ق(س) - - - - - -

سلوك ق(س) ∩ ٣ ∩

عند س = ٣ لا يوجد نقطة إنعطاف

لأن الاقتران لم يغير من اتجاه تقعره

أ. معتصم ريحان

شرح ع كيف كيفك

تدريس أونلاين بشكل مميز

---

س/ اذا كان ق(س) = س + $\frac{٢٥}{س}$ ، س ∈ [-٨، ٨] - {٠} فجد:

[1] الاحداث السيني للنقاط الحرجة [2] جد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق [3] القيم القصوى وحدد نوعها.

الحل ق'(س) = ١ - $\frac{٢٥}{س^٢}$ = ٠ ⟸ س² = ٢٥ ⟸ س = ±٥

اشارة ق'(س) + + + - - - + + +

سلوك ق(س) -٨ ↗ -٥ ↘ ٥ ↗ ٨

قيم س التي عندها نقط حرجة = {-٨، -٥، ٥، ٨}.

أ. معتصم ريحان

00972598709519

ق(س) متزايد [-٨، -٥]، [٥، ٨]

ق(س) متناقص [-٥، ٥]

للاقتران ق(س) قيمة قصوى عظمى محلية عند س = -٥ وقيمتها ق(-٥) = -١٠

للاقتران ق(س) قيمة قصوى صغرى محلية عند س = ٥ وقيمتها ق(٥) = ١٠

---

س/ وعاء اسطواني غطائه نصف كرة مساحة سطحه ٨٠π ، جد أكبر حجم ممكن للوعاء.

نريد علاقتان

أ. معتصم ريحان

أساسية

أكبر حجم للوعاء

حجم الوعاء = حجم الاسطوانة - $\frac{١}{٢}$ حجم الكرة

ح = π نق² × ع - $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ × π نق³

ح = π نق² × $\frac{٤٠}{نق}$ - $\frac{٢}{٣}$ × π نق³

ح = ٤٠π نق - $\frac{٢}{٣}$ π نق³

ح' = ٤٠π - ٢π نق² = صفر

٢π (٢٠ - نق²) = صفر

نق² = ٢٠

نق = √٢٠

مساعدة

مساحة سطح = ٢π نق × ع

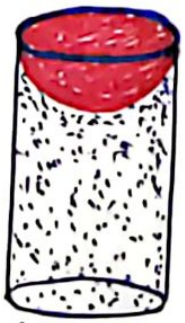
الوعاء

٨٠π = ٢π نق × ع

٤٠ = نق ع

$\frac{٤٠}{نق}$ = ع

يلا نوحد الرموز



المطلوب الحجم = ٤٠π × √٢٠ - $\frac{٢}{٣}$ π (√٢٠)³

= ٨٠√٥ π - $\frac{٢}{٣}$ × π × ٢٠√٢٠

= ٨٠√٥ π - $\frac{٢}{٣}$ × π × ٤٠√٥

= $\frac{١٦٠}{٣}$ √٥ π

أ. معتصم ريحان

ح' + + + - - -

√٢٠ ↗ ↘

قيمة عظمى مطلقة

إجابة



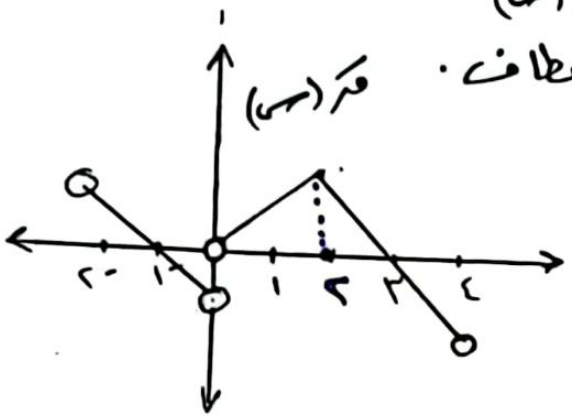
CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

أ. معتصم ريحان
00972598709519

س/ الشكل التالي ق(س) على [-٢، ٤] بالاعتماد عليه أجب عن:

① قيم س الحرجة للاقتران ق ② التزايد والتناقص لـ ق(س)

③ التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س) ونقطة الانعطاف.



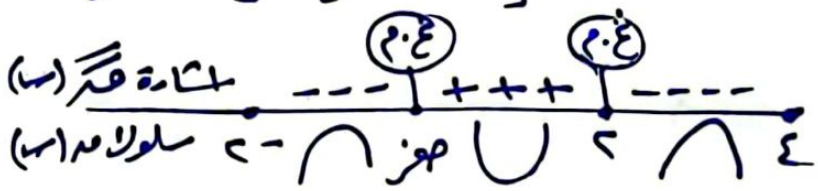

الحل

① قيم س الحرجة = {٤، ٣، حفر، -١، -٢}

② ق(س) متزايد [-٢، -١]، [حفر، ٣].

ق(س) متناقص [-١، حفر]، [٣، ٤].

③




ق(س) مقعر للأعلى ]حفر، ٢[

ق(س) مقعر للأسفل ]-٢، حفر[، ]٢، ٤[

عند (حفر، ق(٠))
وعند (٢، ق(٢))
نقط انعطاف لأنه الاقتران يغير من اتجاه تقعره عندها.

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين

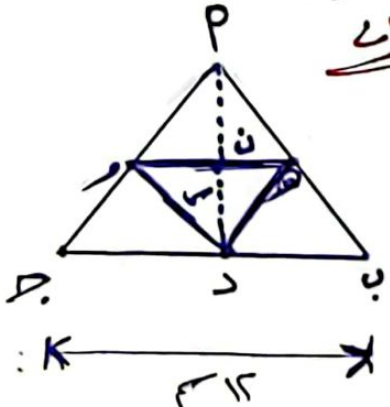
أ. معتصم ريحان

---

س/ أ ب جـ مثلث طول قاعدته ب جـ يساوي ١٢ سم، وطول ارتفاعه النازل من الرأس أ يساوي ١٦ سم فرضت نقطة د على ب جـ، ثم رسم مستقيم ب جـ، ثم رسم مستقيم يوازي ب جـ ويقطع أ ب، أ جـ في نقطتين هـ، و، أحسب طول العمود النازل من و على هـ لتكون مساحة المثلث هـ د و أكبر ما يمكن

أ. معتصم ريحان

نريد علاقات



مساعدة

يتشابه المثلثان أ هـ و مع المثلث أ ب جـ

وينتج $\frac{هـ و}{١٢} = \frac{١٦ - س}{١٦}$

$هـ و = \frac{١٩٢}{١٦} - \frac{١٢ س}{١٦}$

$\boxed{هـ و = ١٢ - \frac{٣ س}{٤}}$

$هـ و = ١٢ - \frac{٣ \times ٨}{٤} = \boxed{٦}$

أساسية

مساحة المثلث أكبر ما يمكن

م = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

م = $\frac{١}{٢}$ × هـ و × س

م = $\frac{١}{٢}$ × (١٢ - $\frac{٣}{٤}$ س) × س

م = ٦ س - $\frac{٣}{٨}$ س$^٢$

م' = ٦ - $\frac{٣}{٤}$ س = حفر

س = ٦ × $\frac{٤}{٣}$

$\boxed{س = ٨}$

م' +++ ٨ ---

عظمى مطلقة عند س = ٨

* لو طلب مساحة المثلث

م = ٦(٨) - $\frac{٣}{٨}$(٨)$^٢$

$\boxed{م = ٢٤ سم^٢}$

* المطلوب طول الضلع و هـ

أ. معتصم ريحان

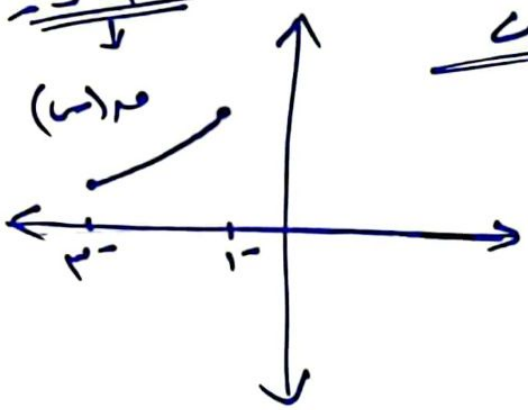
ص5



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س/ إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود ومتزايد على [-٣ ، -١] ويقع في الربع الثاني وكان ق(س) × هـ(س) = س ، جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى هـ(س)

رسم تقريبي




أ. معتصم ريحان

الحل/ $هـ(س) = \frac{س}{ق(س)}$

$هـ'(س) = \frac{ق(س) \times (١) - س \times ق'(س)}{(ق(س))^٢}$

$هـ'(س) = \frac{(+) - (-) \times (+)}{(+)}$

$هـ'(س) = (+) > صفر$

∴ هـ(س) تتزايد في [-٣ ، -١]

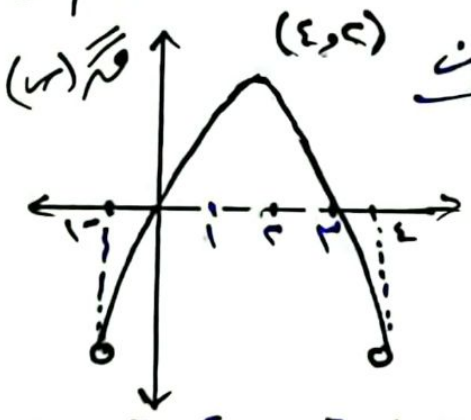
أ. معتصم ريحان

* ق(س) موجب لأنه فوق محور السينات
* ق'(س) موجب لأنه متزايد ق(س)
* قيم س سالبة في الفترة [-٣ ، -١]
* تربيع ق(س) موجب

---

س/ ق(س) اقتران معرف على الفترة [-١ ، ٤] ومنحنى مشتقته الثانية ق''(س) يمثل الشكل المجاور ، إذا علمت أن ق'(٢) = ق'(-١/٢) = صفر

أ. معتصم ريحان

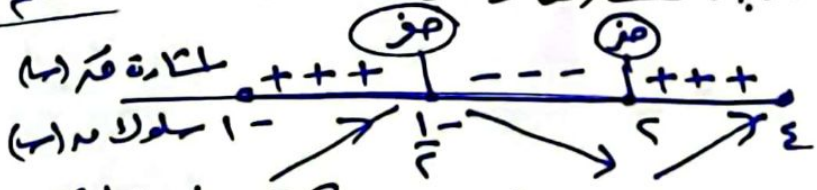



اعتمد هذا الشكل في الإجابة عن الأسئلة التالية :-

① مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى للاقتران ق(س)

② عين مجالات التقعر للأعلى لمنحنى الاقتران ق(س)

③ أوجد نقط/نقاط الانعطاف . أ. معتصم ريحان




⇐ ق(س) تتزايد [-١ ، -١/٢] ، [٢ ، ٤]

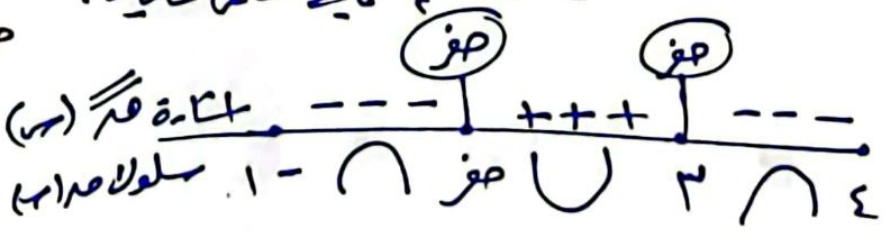
⇐ ق(س) تتناقص [-١/٢ ، ٢]

عند س = ٢ قيمة صغرى محلية .

عند س = -١/٢ قيمة عظمى محلية .

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أون لاين




⇐ ق(س) مقعر للأعلى ]صفر ، ٣[

⇐ ق(س) مقعر للأسفل ]-١ ، صفر[ ، ]٣ ، ٤[

$\boxed{\begin{array}{l} ق''(٢) > صفر \quad صغرى \quad \text{حسب اختبار} \\ ق''(-\frac{١}{٢}) < صفر \quad عظمى \quad \text{المشتقة الثانية} \end{array}}$

عند (صفر ، ق(٠)) نقطة إنعطاف .

(٣ ، ق(٣)) نقطة انعطاف

يتغير عندها سلوك الاقتران

* من اختبار المشتقة الثانية عرفنا الإشارة فوق خط الأعداد للمشتقة الأولى



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س/ أثبت أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = $\frac{\text{أس} + \text{ب}}{\text{جس} + \text{د}}$ قيمة قصوى علماً بأن ق(س) ≠ ٠ ،

أد − ب جـ ≠ ٠ ، ق(س) معرف على ح

أ. معتصم ريحان
شرح على كيف
كيف د

الحل/ بما أن ق(س) ≠ صفر اذاً البسط أس + ب ≠ صفر

يريد القيم القصوى، يلا نشتقه ونساوي بصفر

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{جس} + \text{د}) \times \text{أ} - (\text{أس} + \text{ب}) \times \text{جـ}}{(\text{جس} + \text{د})^2}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{أجس}} + \text{أد} - \cancel{\text{أجس}} - \text{ب جـ}}{(\text{جس} + \text{د})^2} = \frac{\text{أد} - \text{ب جـ}}{(\text{جس} + \text{د})^2}$$

المشتقة الأولى لا تساوي صفر لأنه ما بقدر أساوي البسط بصفر لأنه في السؤال قال أن أد − ب جـ ≠ صفر

الآن سنجد أين المشتقة تكون غير موجودة وسنساوي المقام بصفر

∴ $(\text{جس} + \text{د})^2$ = صفر

جس + د = صفر

$\boxed{\text{س} = \frac{-\text{د}}{\text{جـ}}}$ مرفوض لأنه لا ينتمي لمجال الاقتران ق(س) ∴ لا يوجد للاقتران ق(س) قيم قصوى .

أ. معتصم ريحان
تابعين على الفيس واليوتيوب

---

س/ ق، ك كثيراً حدود موجبان دائماً ولكل منهما قيمة صغرى محلية عند س = أ حيث ق″(أ) ≠ ٠ ، ك″(أ) ≠ ٠ أثبت أن للاقتران (ق × ك) قيمة صغرى محلية عند س = أ

الحل/ معطى ق(س) ⊕ بما أنه قال قيمة صغرى محلية عند س = أ

ك(س) ⊕ ∴ ق′(أ) = صفر وأيضاً ق″(أ) > صفر

∴ ق″(أ) ⊕ حسب اختبار المشتقة الثانية

وكذلك ك′(أ) = صفر وأيضاً ك″(أ) > صفر

∴ ك″(أ) ⊕ حسب اختبار المشتقة الثانية

أ. معتصم ريحان

المطلوب

(ق × ك)′ = ق × ك′ + ك × ق′

أ. معتصم ريحان
تدريس أونلاين بشكل مميز

(ق × ك)′(أ) = ق(أ) × ك′(أ) + ك(أ) × ق′(أ)

(ق × ك)″(أ) = ق(أ) × ك″(أ) + ك′(أ) × ق′(أ) + ك(أ) × ق″(أ) + ق′(أ) × ك′(أ)

(ق × ك)″(أ) = ⊕ × ⊕ + صفر × صفر + ⊕ × ⊕ + صفر × صفر

(ق × ك)″(أ) = ⊕ + ⊕ = ⊕ > صفر #

حسب اختبار المشتقة الثانية اذاً يوجد قيمة صغرى محلية عند س = أ للاقتران (ق × ك) ص7



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س/ ق(س) معرف [أ، ب]، وتزايد ويقع في الربع الرابع، ق(س) ≠ صفر ع(س) = $\frac{هـ^{س}}{ق(س)}$
فإنه ع(س) يكون:

أ) متزايد [أ، ب]  ب) ثابت [أ، ب]  جـ) متناقص [أ، ب]  د) لا يمكن التحديد

أ. معتصم ريحان

الحل/ $ع'(س) = \frac{ق(س) \times هـ^{س} - هـ^{س} \times ق'(س)}{(ق(س))^2}$

$ع'(س) = \frac{(- \times +) - (+ \times +)}{+}$

$ع'(س) = \frac{- - +}{+} = \frac{-}{+}$

∴ $ع'(س) = - < صفر$ ∴ ع(س) متناقص

* ق(س) تحت محور السينات اذاً سالب
* ق(س) متزايد في [أ، ب] اذاً ق'(س) > صفر (+)
* الاقتران الأسي الطبيعي دائماً موجب

---

س/ عدد القيم القصوى للاقتران ق(س) = $\frac{أس + ب}{جـس + د}$ علماً بأن أد − ب جـ ≠ صفر، س ≠ $\frac{-د}{جـ}$
ق(س) ≠ صفر

أ) ١  ب) ٢  جـ) ٣  د) صفر

الحل/ بما أن ق(س) ≠ صفر إذاً البسط أس + ب ≠ صفر
يريد السؤال عدد القيم القصوى يلا نشتق ونساوي بصفر

$ق'(س) = \frac{(جـس + د) \times أ - (أس + ب) \times جـ}{(جـس + د)^2}$

$ق'(س) = \frac{\cancel{أجـس} + أد - \cancel{أجـس} - ب جـ}{(جـس + د)^2} = صفر$

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أون لاين مميزة
00972598709519

$ق'(س) = \frac{أد - ب جـ}{(جـس + د)^2} = صفر$

تابعني على جروبات الواتس والتليجرام ضروري

المشتقة الأولى تساوي صفر عندما البسط
أد − ب جـ = صفر
ولكن في السؤال اشترط أن أد − ب جـ ≠ صفر
اذاً لا يوجد قيم تجعل المشتقة تساوي صفر
أ. معتصم ريحان حصص خاصة أون لاين.

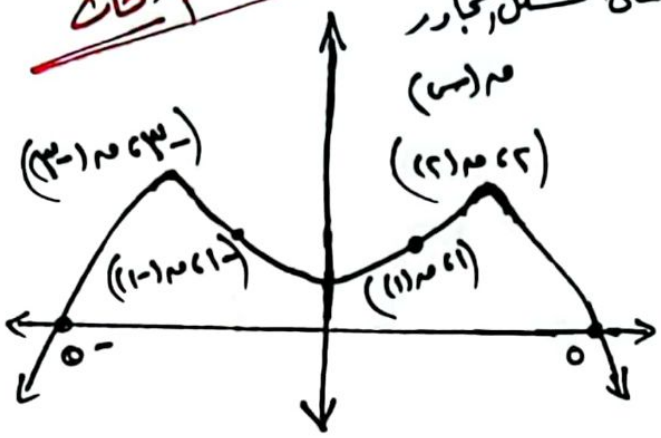
الآن سنبحث عن القيم التي تجعل ق'(س) غير معوجودة وهي عندما المقام يساوي صفر
جـس + د = ٠
∴ س = $\frac{-د}{جـ}$
وأيضاً في السؤال اشترط أن س ≠ $\frac{-د}{جـ}$
اذاً لا يوجد قيم قصوى للاقتران ق(س)

ص8


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

أ. معتصم ريحان

س/ منحنى ق(س) من الدرجة الرابعة بالاعتماد على الشكل المجاور



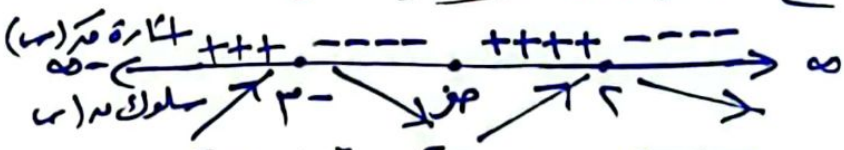

جد) ① مجالات التزايد والتناقص

② القيم القصوى للإقتران ق(س)

③ مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)

④ نقطة/نقاط الإنعطاف للإقتران ق(س)

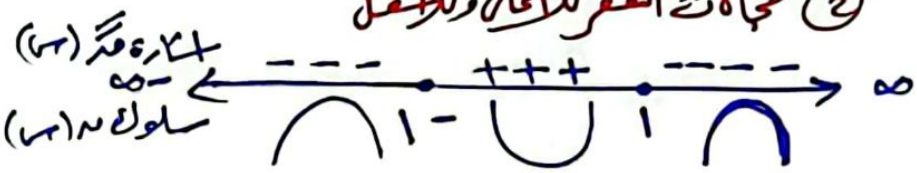
الحل/ ① مجالات التزايد والتناقص




ق(س) متزايد ]-∞، -٣] ، [صفر، ٢]

ق(س) متناقص [-٣، صفر] ، [٢، ∞[

② مجالات التقعر للأعلى وللأسفل




ق(س) مقعر للأسفل في ]-∞، -١[ ، ]١، ∞[

ق(س) مقعر للأعلى ]-١، ١[

③ نقط الإنعطاف

عند (١، ق(١)) ، (-١، ق(-١))

نقط انعطاف لتحقق الشروط الثلاثة

ق''(-١) = صفر ، ق''(١) = صفر

الاقتران متصل عند ١ ، -١

الاقتران يغير من سلوكه عند ١ ، -١


أ. معتصم ريحان

تابعني على الفيس واليوتيوب

حصص خاصة أونلاين مميزة

00972598709519


---

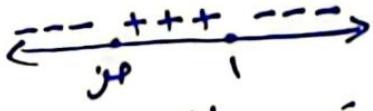
س/ إذا كان ق(س) = لو$_{هـ}$ (س - س$^2$) جد قيم س الحرجة ومجالات تزايد وتناقص الإقتران

الحل/ أولاً نجد مجال الاقتران ق(س) وهو عندما س - س$^2$ > صفر

س - س$^2$ = ٠

س(١ - س) = ٠

س = ٠ أو س = ١




إذاً مجال ق(س) صفر < س < ١

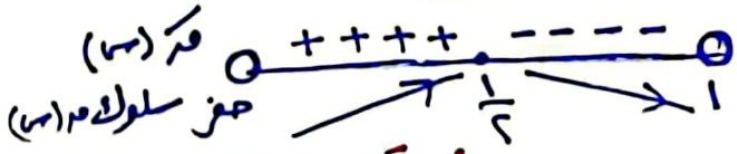
ق'(س) = $\frac{١ - ٢س}{س - س^2}$ = صفر

البسط = صفر ∴ ١ - ٢س = صفر

⇐ س = $\frac{١}{٢}$ نقطة حرجة

عند س = $\frac{١}{٢}$ يوجد قيمة قصوى عظمى

وقيمتها ق($\frac{١}{٢}$) = لو$_{هـ}$ ($\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٤}$) = لو$_{هـ}$ $\frac{١}{٤}$




ق(س) متزايد في ]صفر، $\frac{١}{٢}$]

ق(س) متناقص في [$\frac{١}{٢}$، ١[


أ. معتصم ريحان

00972598709519

حصص خاصة أونلاين





حه ضوئيا بـ CamScanner

س/ تحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ن$^{٤}$ − ١٢ن$^{٣}$ + ٨ن$^{٢}$ − ٦ بالاعتماد على ذلك أقل تسارع ممكن للجسم هو

أ) ٣ ب) −٣ ج) ٩٢ د) −٩٢

الحل/ المطلوب أقل تسارع ممكن يعني لازم نحصل على التسارع ثم نشتقه ونساويه بصفر

فعطى ف = ن$^{٤}$ − ١٢ن$^{٣}$ + ٨ن$^{٢}$ − ٦

ع = ٤ن$^{٣}$ − ٣٦ن$^{٢}$ + ١٦ن

ت = ١٢ن$^{٢}$ − ٧٢ن + ١٦

ت' = ٢٤ن − ٧٢ = صفر

٢٤ن = ٧٢ ∴ عند ن = ٣ يوجد أقل تسارع ممكن

∴ ت(٣) = ١٢(٣)$^{٢}$ − ٧٢(٣) + ١٦

= ١٠٨ − ٢١٦ + ١٦ = −٩٢

ن = ٣

قيمة صغرى عند ٣

− − − ٣ + + +

المطلوب القيمة وليس الزمن الذي يكون عنده أقل تسارع

أ. معتصم ريحان
00972598709519
حصص خاصة أونلاين مميزة

---

س/ اذا كان ق(س) = س$^{٢}$ + $\frac{أ}{س}$ ، أ ≠ ٠ . أثبت أنه لا توجد عظمى للاقتران مهما تكن أ

الحل/ ق'(س) = ٢س − $\frac{أ}{س^{٢}}$ = صفر

⇐ ٢س$^{٣}$ − أ = صفر ⇐ س$^{٣}$ = $\frac{أ}{٢}$ ⇐ س = $\sqrt[٣]{\frac{أ}{٢}}$

* نشتق كمان مرة

ق''(س) = ٢ + $\frac{أ \times ٢س}{س^{٤}}$

صفر المشتقة الأولى

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب .

ق''($\sqrt[٣]{\frac{أ}{٢}}$) = ٢ + $\frac{٢أ}{(\sqrt[٣]{\frac{أ}{٢}})^{٣}}$ = ٢ + ٢أ × $\frac{٢}{أ}$ = ٦ > صفر

∴ ق($\sqrt[٣]{\frac{أ}{٢}}$) قيمة صغرى محلية حسب اختبار المشتقة الثانية .

اذاً لا يوجد قيم عظمى للاقتران ق(س)

ق'(س) إشارة

− − − $\sqrt[٣]{\frac{أ}{٢}}$ + + +

سلوك ق(س)

ص ١٥



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س/ إذا كانت قيمة جـ التي تعينها نظرية القيمة المتوسطة للاقتران

ق(س) = (لو$_{هـ}$ س)$^{٢}$ − لو$_{هـ}$ س في [١، ب] تساوي $\sqrt{هـ}$ فما قيمة ب ؟؟

أ. معتصم ريحان
00972598709519

الحل/ ق'(س) = ٢ (لو$_{هـ}$ س) × $\frac{١}{س}$ − $\frac{١}{س}$

ق'(جـ) = $\frac{ق(ب) - ق(١)}{ب - ١}$

نتيجة نظرية القيمة المتوسطة

ق'(جـ) = متوسط التغير

٢ لو$_{هـ}$ جـ × $\frac{١}{جـ}$ − $\frac{١}{جـ}$ = $\frac{(لو_{هـ} ب)^{٢} - لو_{هـ} ب - صفر}{ب - ١}$

$\frac{٢ لو_{هـ} \sqrt{هـ}}{\sqrt{هـ}}$ − $\frac{١}{\sqrt{هـ}}$ = $\frac{(لو_{هـ} ب)^{٢} - لو_{هـ} ب}{ب - ١}$

$\frac{١}{\sqrt{هـ}}$ (٢ لو$_{هـ}$ هـ$^{\frac{١}{٢}}$ − ١) = $\frac{(لو_{هـ} ب)^{٢} - لو_{هـ} ب}{ب - ١}$

$\frac{١}{\sqrt{هـ}}$ × صفر = $\frac{(لو_{هـ} ب)^{٢} - لو_{هـ} ب}{ب - ١}$

قيمة جـ التي تحددها النظرية تساوي $\sqrt{هـ}$ معطى من السؤال

* نكمل هنا :- نفرض لو$_{هـ}$ ب = أ

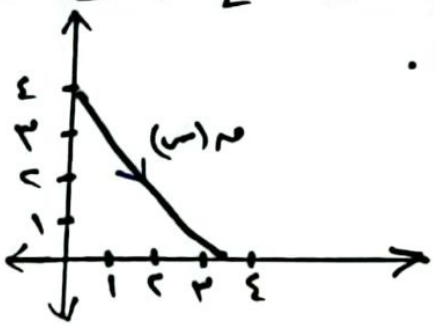
∴ صفر = أ$^{٢}$ − أ

∴ أ = ٠ أو أ = ١

∴ لو$_{هـ}$ ب = صفر أو لو$_{هـ}$ ب = ١

ب = ١ × مرفوضة ⇐ ب = هـ ✓

س/ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على [٠، ٤] أثبت أن الاقتران ك(س) = $\frac{ق(-س)}{(٢ - ٢س)}$ متزايد في [−٤، صفر].




الحل/ ك'(س) = $\frac{(٢ - ٢س) \times -ق'(-س) - ق(-س) \times (-٢)}{(٢ - ٢س)^{٢}}$

ك'(س) = $\frac{موجب \times سالب \times سالب - موجب \times سالب}{موجب}$

ك'(س) = $\frac{موجب - سالب}{موجب}$

ك'(س) = $\frac{موجب + موجب}{موجب}$ > صفر

∴ ك(س) متزايد في [−٤، صفر]

صفر

+ + + | − − −

١

٢ − ٢س = ٠
س = ١

∴ ٢ − ٢س > صفر عندما س ∈ [−٤، ٠]

أ. معتصم ريحان
دروس خاصة أونلاين على الزووم
00972598709519

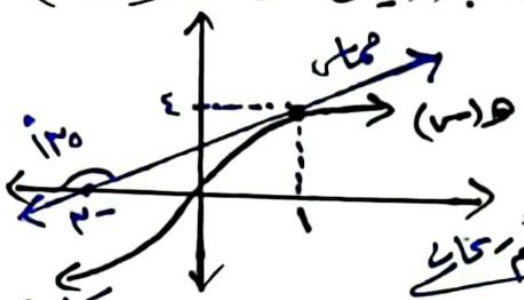
أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

ص ١١



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س/ اذا كانت $م(س) = ٢س^{٢} + ٢س$ وكانت الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $هـ(س)$




فأوجد $\frac{د}{دس}\left(م \circ \left(\frac{س}{هـ(س)}\right)\right)$ عندما $س = ١$

الحل $م'(س) = ٤س + ٢$

من الشكل $هـ'(١) = ظا ٤٥$

$\therefore هـ'(١) = ١$

المطلوب $(م \circ ل)'(١)$ فرضنا $ل = \frac{س}{هـ(س)}$

$(م \circ ل)'(١) = م'(ل(١)) \times ل'(١)$

$(م \circ ل)'(١) = م'\left(\frac{١}{٤}\right) \times \frac{٣}{١٦}$

$(م \circ ل)'(١) = \left(٤\left(\frac{١}{٤}\right) + ٢\right) \times \frac{٣}{١٦}$

$(م \circ ل)'(١) = ٣ \times \frac{٣}{١٦}$

$(م \circ ل)'(١) = \frac{٩}{١٦}$

$ل(١) = \frac{١}{٤}$

(*) $ل'(س) = \frac{هـ(س) \times ١ - س \times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

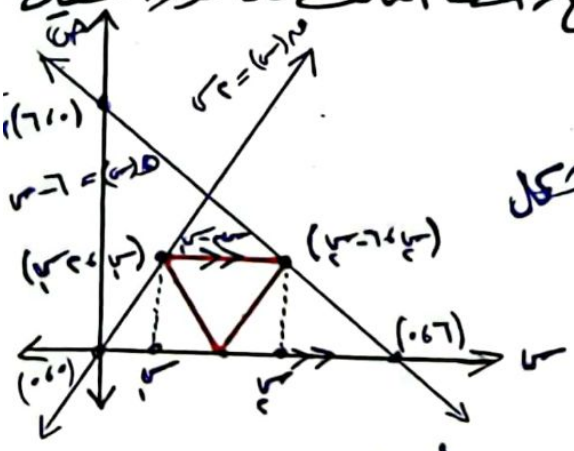
$ل'(١) = \frac{هـ(١) - هـ'(١)}{(هـ(١))^{٢}}$

$\Leftarrow ل'(١) = \frac{٤ - ١}{(٤)^{٢}} = \frac{٣}{١٦}$

أ. معتصم رمضان
حصص خاصة أونلاين ميزة
تابعين على الفيس واليوتيوب
00972598709519

---

س/ ما مساحة أكبر مثلث يمكن رسمه في الربع الأول بحيث يقع رأسان منه على المستقيمين $م(س) = ٢س$ ، $هـ(س) = ٦ - س$ في حين يقع رأسه الثالث على محور السينات علماً بأن قاعدة المثلث توازي محور السينات.




نريد علاقتان

المساحة = أكبر مثلث

$م = \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$م = \frac{١}{٢} \times (س_{٢} - س_{١}) \times (٢س_{١})$

$م = ((٦ - ٢س_{١}) - س_{١}) \times س_{١}$

$م = (٦ - ٣س_{١}) \times س_{١}$

$م = (٦س_{١} - ٣س_{١}^{٢})$

$م' = ٦ - ٦س_{١} = ٠$

$س_{١} = ١$

عظمى مطلقة عند $س_{١} = ١$

(*) ارتفاع المثلث من الشكل

يساوي $٦ - س_{٢}$

ويساوي $٢س_{١}$

$\therefore ٦ - س_{٢} = ٢س_{١}$

$٦ - ٢س_{١} = س_{٢}$

$٦ - ٢س_{١} = س_{٢}$

نعوض لإيجاد $س_{٢}$

$س_{٢} = ٦ - ٢ \times ١ = ٤$

المطلوب المساحة $= \frac{١}{٢} \times (س_{٢} - س_{١}) \times (٢س_{١})$

$= \frac{١}{٢} \times (٤ - ١) \times (٢ \times ١)$

$= ٣$ وحدات مربعة

حل

أ. معتصم رمضان
حصص خاصة أونلاين ميزة
تابعين على الفيس واليوتيوب
00972598709519



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

س/ اذا كان ق(س) = ٢ جاس − ٢س ، س ∈ ]−π/٢ ، π/٢[ أوجد

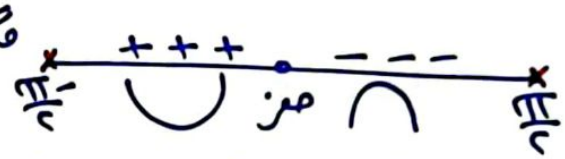
① فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س) ② نقط الانعطاف الأفقي إن وجدت لمنحنى ق(س)

الحل/ ق(س) متصل على ]−π/٢ ، π/٢[ كثير حدود ومثلثي مطروحين.

ق′(س) = ٢ جتاس − ٢

ق″(س) = −٢ جاس = صفر

∴ س = صفر ∈ ]−π/٢ ، π/٢[




أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين مميزة
تابعني على الفيس واليوتيوب
00972598709519


ق″(س) + + + − − −

−π/٢ ∪ صفر ∩ π/٢

ق(س) مقعر للأعلى ]−π/٢ ، صفر[

ق(س) مقعر للأسفل ]صفر ، π/٢[

(٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ٠) نقطة انعطاف أفقي لأنه

ق(س) متصل عند س = صفر

ق″(صفر) = صفر

ق′(صفر) = صفر

الاقتران يغير من سلوكه عند الصفر.

---

س/ اذا كان ق(س) = { أس² + ب س + ك ، ٠ ≤ س < ٢ ؛ جتا(πس) + ١ ، ٢ ≤ س ≤ ٣ } يحقق شروط نظرية رول على [٠ ، ٣]

أ. معتصم ريحان

أوجد قيم الثوابت أ ، ب ، ك ثم أوجد قيم جـ التي تحددها النظرية.

الحل/ ق(٠) = ق(٣) ← الشرط الثالث لرول

أ(٠)² + ب(٠) + ك = جتا(π×٣) + ١

⇓

ك = −١ + ١

∴ ك = صفر #

أ. معتصم ريحان

نهـا ق(س) = نهـا ق(س)
س ← ٢⁻ ، س ← ٢⁺

أ(٢)² + ب(٢) + ك = جتا(٢π) + ١

٤أ + ٢ب + ك = ١ + ١

٤أ + ٢ب + صفر = ٢

٢أ + ب = ١ —— ①

لاحظ جتا ٣π = جتا(٣π − ٢π) = جتا π

أ. معتصم ريحان

ق′(٢)⁺ = ق′(٢)⁻

−π جا(πس) = ٢أ(٢) + ب

−π جا(٢π) = ٤أ + ب

صفر = ٤أ + ب —— ②

نحل معادلة ① مع ② بالحذف

٢أ + ب = ١

٤أ + ب = صفر

−٢أ = ١ ⇐ أ = −١/٢

أطرح

عوض لايجاد ب

٢ × −١/٢ + ب = ١

ب = ٢ #

الآن عوض لايجاد ب

---

ق′(س) = { ٢أس + ب ، ٠ < س < ٢ ؛ −π جا(πس) ، ٢ ≤ س < ٣ } غ.م ، س = ٠ ، ٣ ← الأطراف

الفترة الأولى

ق′(جـ) = صفر في ]٠ ، ٢[ ∴ −جـ + ٢ = ٠ ⇐ جـ = ٢ ∉ ]٠ ، ٢[

الفترة الثانية

ق′(جـ) = صفر في ]٢ ، ٣[ ∴ −π جا(جـπ) = صفر

∴ جا(جـπ) = صفر

∴ (πجـ) = صفر ، π ، ٢π ، ٣π ، ....

وبالقسمة على π

∴ جـ = ٢ ∈ [٢ ، ٣[

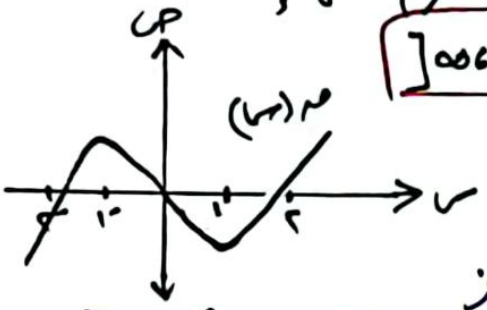
∴ جـ = ٠ ، ١ ، ٣ ∉ [٢ ، ٣[

ص 13



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س/ الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) الذي له نقطة إنعطاف عندما س = صفر
ما الفترة التي يكون عندها ق(س) ، قَ(س) ، قً(س) لهم نفس الإشارة ؟؟




(أ) ]٠، ١[ (ب) ]-∞، -٢[ (ج) ]-٢، -١[ (د) ]٢، ∞[

أ. معتصم ريحان

الحل/ في الفترة ]٢، ∞[

* الاقتران فوق محور السينات ∴ ق(س) > صفر
* الاقتران يتزايد كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين ∴ قَ(س) > صفر
* اتجاه تقعر الاقتران ق(س) للأعلى في الفترة ]٠، ∞[ ∴ قً(س) > صفر في الفترة ]٢، ∞[

أ. معتصم ريحان

∴ الجواب الصحيح هو الفرع (د) ]٢، ∞[

تدريس أونلاين بشكل مميز

أ. معتصم ريحان 00972598709519

---

س/ إذا كان الإقتران ق(س) معرفا على [٣، ٨] بحيث ق(س١) > ق(س٢) لكل س٢ > س١
وكان الاقتران ق(س) معرف على [-٣، ٢] بحيث ق(س١) > ق(س٢) لكل س١ > س٢
فإنّ جميع العبارات الآتية صحيحة ماعدا ؟؟

أ. معتصم ريحان

(أ) قَ(٤) < قَ(-٢) (ب) $\frac{ق(٥) - ق(٧)}{قَ(٠)}$ > صفر (ج) قَ(٦) > قَ(-١) (د) $\frac{ق(٧) - ق(٥)}{قَ(-١)}$ < صفر

الحل/ الخيار (أ) صحيح ⟸ قَ(٤) < قَ(-٢) لأن قَ(٤) سالبة ، قَ(-٢) موجبة .

الخيار (ب) صحيح ⟸ $\frac{ق(٥) - ق(٧)}{قَ(٠)}$ > صفر لأن ق متناقص في [٣، ٨]
ق(٧) < ق(٥) ∴ ق(٥) - ق(٧) > صفر

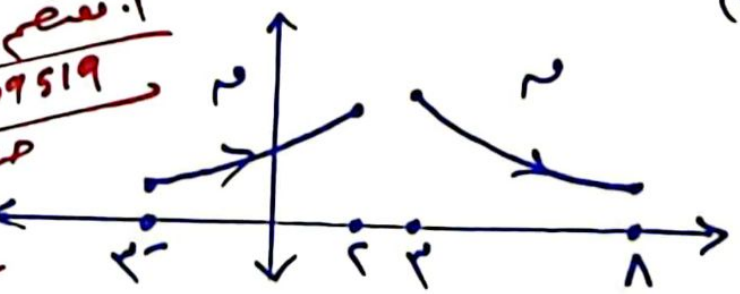
كذلك قَ > صفر في ]-٣، ٢[ ∴ قَ(٠) > صفر

الخيار (ج) غلط ⟸ قَ(٦) > قَ(-١) لأن قَ(٦) < ٠ بسبب التناقص
قَ(-١) > ٠ بسبب التزايد

أ. معتصم ريحان

الخيار (د) صحيح ⟸ $\frac{ق(٧) - ق(٥)}{قَ(-١)}$ < صفر لأنه البسط سالب والمقام موجب اذاً المحصلة سالبة

أ. معتصم ريحان
00972598709519
حصص خاصة
أونلاين مميزة




* رسم تقريبي توضيحي للشكل

لاحظ :- مش شكله الرسمة تحت أو فوق محور السينات الرسم للفهم فقط

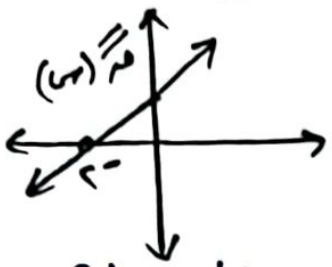
* اذا كان ق يتزايد اذاً قَ موجبة
* اذا كان ق يتناقص اذاً قَ سالبة .

ص ١٤



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

س/ الشكل المجاور يمثل منحنى ق″(س) للاقتران ق(س)، إذا علمت أنّ ق′(−٥) = ق′(١) = صفر، فما الفترة التي يكون فيها منحنى ق(س) متناقصاً؟




أ) [−٥، ١] ب) ]−∞، −٥] ج) [١، ∞[ د) ح − ]−٥، ١[

الحل

اشارة ق″(س) − − − ٠ + + +

سلوك ق(س) ∩ −٢ ∪

حسب اختبار المشتقة الثانية

ق″(١) > صفر عند س = ١ صغرى محلية

ق″(−٥) < صفر عند س = −٥ عظمى محلية

اشارة ق′(س) صفر صفر

سلوك ق(س) −٥ ١

أ. معتصم ريحان

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أون لاين / تابعين على الفيس واليوتيوب

س/ أي من الإقترانات الآتية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [−٢، ٢]

أ) ق(س) = [س + ٢]

ب) ق(س) = $\sqrt{س^2 + ٢س + ١}$

ج) ق(س) = |س² + ٢س + ١|

د) ق(س) = $(٢س - ١)^{\frac{١}{٣}}$

أ. معتصم ريحان 00972598709519

الحل ق(س) = [س + ٢] غير متصل عند س = −١، ٠، ١

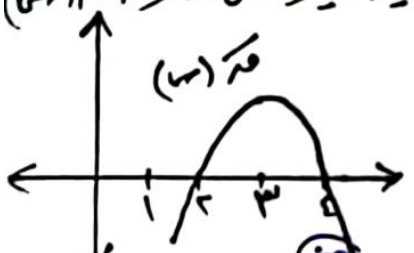
ق(س) = $\sqrt{س^2 + ٢س + ١}$ = $\sqrt{(س+١)^2}$ = |س + ١| غير قابل للإشتقاق عند س = −١

ق(س) = |س² + ٢س + ١| = |(س + ١)²| = (س + ١)² كثير حدود يحقق شروط المتوسطة على [−٢، ٢]

ق(س) = $(٢س - ١)^{\frac{١}{٣}}$ ⟸ ق′(س) = $\frac{١}{٣}(٢س - ١)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٢$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{(٢س - ١)^2}}$ غير قابل للاشتقاق عند س = $\frac{١}{٢}$

أ. معتصم ريحان / تابعين على الفيس واليوتيوب

س/ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق′(س)، أي من الرسوم الآتية يعد تمثيلاً لمنحنى الاقتران ق(س)




الحل

ق′(س) − − − صفر + + + صفر − − −

٢ ٤

ق″(س) + + + صفر − − −

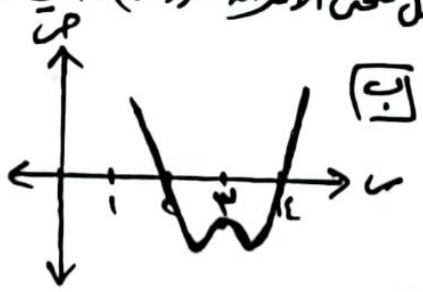
٣

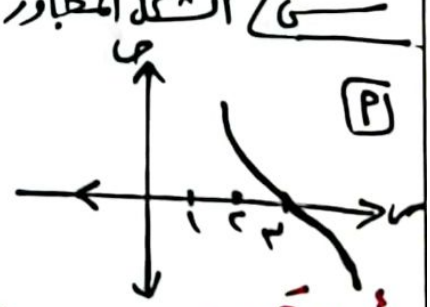
الجواب فرع د

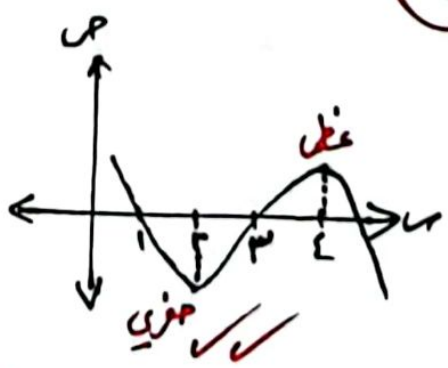
أ. معتصم ريحان

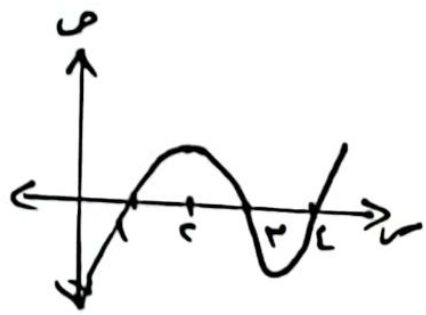
حصص خاصة أون لاين ميمزة 00972598709519

أ) ب) ج) د)




ص 15



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي / اذا كان $م(س) = \frac{1}{2}س^2 + 2جاس$ $\quad س \in [0, \pi]$

أوجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقط الإنطواف لـ $م(س)$.

الحل ⇐ الاقترانية $م(س)$ متصل على $[0, \pi]$ لأنه مجموع اقترانيتين متصلتين.

⇐ $م'(س) = س + 2جتاس$

⇐ $م''(س) = 1 - 2جاس = صفر \Leftarrow جاس = \frac{1}{2}$

$س = \frac{\pi}{6}$ ، $س = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

⇐ $م''(س)$ غير موجودة عند أطراف الفترة $(س = 0)$ ، $(س = \pi)$

⇐ إشارة $م''(س)$ : $+++$ | $----$ | $+++$

سلوك $م(س)$ : $\cap$ | $\cup$ | $\cap$

⇐ الاقترانية $م(س)$ مقعر للأعلى في $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi]$ ومقعر للأسفل في $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

⇐ نقاط الإنطواف $= (\frac{\pi}{6}, م(\frac{\pi}{6})) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + 1)$

$(\frac{5\pi}{6}, م(\frac{5\pi}{6})) = (\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{2\sqrt{2}} + 1)$

أ. معتصم ريحان
مدرسة أونروا الثانوية
شرح كيفي كيس

مثال / اذا كان $م(س) = (س - ا)(س - ب)(س - جـ)$ وكانت النقطة $(د، م(د))$ نقطة إنطواف للاقترانية $م(س)$ أثبت أن $د = \frac{1}{3}(ا + ب + جـ)$

أ. معتصم ريحان

الحل ⇐ $م(س)$ متصل على $ح$ لأنه كثير حدود.

⇐ $م'(س) = (س - ا) \times [(س - ب)(س - جـ)] + [(س - ب)(س - جـ)] \times 1$

⇐ $م'(س) = (س - ا) \times [(س - ب) \times 1 + (س - جـ) \times 1] + (س - ب)(س - جـ)$

⇐ $م'(س) = (س - ا)(س - ب) + (س - ا)(س - جـ) + (س - ب)(س - جـ)$

⇐ $م''(س) = (س - ا) \times 1 + (س - ب) \times 1 + (س - ا) \times 1 + (س - جـ) \times 1 + (س - ب) \times 1 + (س - جـ) \times 1$

⇐ $م''(س) = س - ا + س - ب + س - ا + س - جـ + س - ب + س - جـ$

⇐ $م''(س) = 6س - 2ا - 2ب - 2جـ = 6س - 2(ا + ب + جـ)$

بما أن $(د، م(د))$ نقطة إنطواف $\therefore م''(د) = صفر$

⇐ $6د - 2(ا + ب + جـ) = صفر$

$2(ا + ب + جـ) = 6د$

$د = \frac{1}{3}(ا + ب + جـ)$ #

أ. معتصم ريحان
مدرسة أونروا الثانوية
للبنين خاصة
00972598709519



تم تحويله صوتيا بـ CamScanner

خارجي / الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) إذا كان الاقتران

$ل(س) = \frac{|س^2 - ٤|}{ق(س)}$ فجد ل(١)  أ. معتصم ريحان

الحل $ل'(س) = \frac{ق'(س) \times (|س^2-٤|)' - (|س^2-٤|) \times ق''(س)}{(ق'(س))^2}$

$ل'(١) = \frac{ق'(١) \times (-٢) - (٣) \times ق''(١)}{(ق'(١))^2}$

$ل'(١) = \frac{٣ \times -٢ - ٣ \times (-\sqrt{٣})}{(٣)^2}$

$ل'(١) = \frac{-٦ + ٣\sqrt{٣}}{٩}$

انتهى

أ. معتصم ريحان

* هامش مهم

عوض داخل اقتران القيمة المطلقة بـ واحد

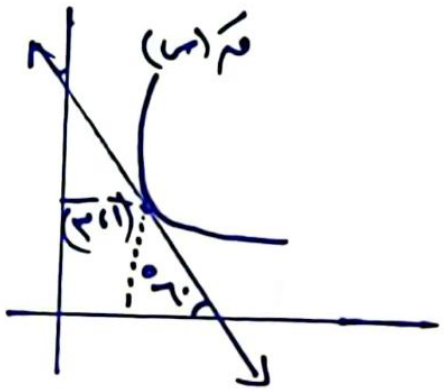
$(١)^2 - ٤ = -٣$

بما أن الجواب سالب نأخذ القاعدة السالبة

$\therefore -س^2 + ٤$

عوض بواحد بعد الاشتقاق بيطلع -٢

عوض بواحد مباشرة بيطلع ٣




* $ق''(١) = ظا ١٢٠ = -\sqrt{٣}$

* $ق'(١) = ٣$

تابعني على الفيس واليوتيوب

خارجي / اذا كان ق(س) = |س - ١| + ٣ ، س ∈ [-٢، ٢]

فما هي أكبر قيمة للاقتران ق(س).

(أ) -٢  (ب) ٦  (ج) ٢  (د) ٤

الحل ق'(س) غير موجودة عند س = -٢ ، س = ٢

نعيد تعريف المطلق  س - ١ = ٠ ⟸ س = ١

- - - + + +

-٢  ١  ٢

(-س)  (س-١)

$|س-١| = \begin{cases} ١-س ، & -٢ \le س < ١ \\ س-١ ، & ١ \le س \le ٢ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} ١-س+٣ ، & -٢ \le س < ١ \\ س-١+٣ ، & ١ \le س \le ٢ \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} -س+٤ ، & -٢ \le س < ١ \\ س+٢ ، & ١ \le س \le ٢ \end{cases}$

ق(-٢) = - -٢ + ٤ = (٦) أكبر قيمة للاقتران

ق(١) = ١ + ٢ = ٣

ق(٢) = ٢ + ٢ = ٤

أ. معتصم ريحان

# 00972598709519

ص 17



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

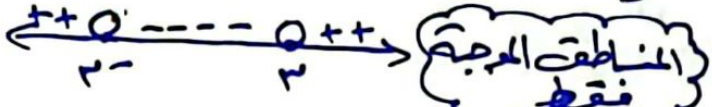
خارجي / اذا كان ق(س) = $\frac{س - ٣}{\sqrt{س^٢ - ٩}}$ فجد :

أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

(أ) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) . (ب) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) إن وجدت

الحل أولاً نجد مجال ق(س) $س^٢ - ٩ > صفر$ $س^٢ - ٩ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣$

(*) ∴ مجال ق(س) هو ح − [−٣ ، ٣] (المناطق الموجبة فقط)



الاقتران ق(س) متصل على مجاله .

(*) $ق'(س) = \frac{\sqrt{س^٢ - ٩} \times (١) - (س - ٣) \times \frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{س^٢ - ٩}}}{(\sqrt{س^٢ - ٩})^٢} = صفر$

أ. معتصم ريحان

(*) نضرب الطرفين في $\sqrt{س^٢ - ٩}$

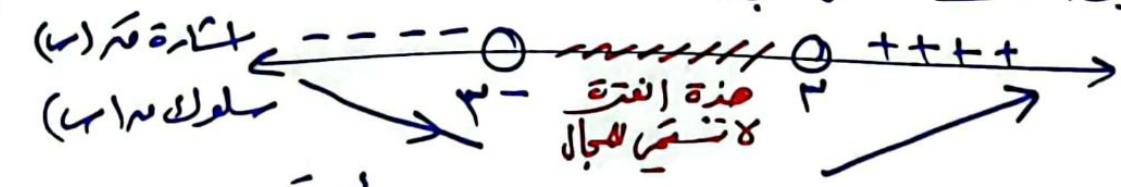
⇐ نضع البسط يساوي صفر $\sqrt{س^٢ - ٩} - \frac{(س^٢ - ٣س)}{\sqrt{س^٢ - ٩}} = صفر$

⇐ $\cancel{س^٢} - ٩ - \cancel{س^٢} + ٣س = ٠ \Leftarrow ٣س - ٩ = ٠ \Leftarrow س = \frac{٩}{٣} = ٣ \notin$ للمجال

⇐ لا يوجد قيم لسين تجعل المشتقة تساوي صفر

⇐ لكن المشتقة غير موجودة عند أطراف الفترة ٣ ، −٣ وهم أطراف المجال

(*) وأطراف الفترة لا تنتمي للمجال .



(*) اشارة ق'(س) − − − − ○ ////////// ○ + + + +
سلوك ق(س) ↘ −٣ هذه الفترة لا تنتمي للمجال ٣ ↗

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين مميزة
00972598709519

(*) ∴ ق(س) متزايد ]٣ ، ∞[

∴ ق(س) متناقص ]−∞ ، −٣[

(*) ⇐ ولا يوجد للاقتران نقاط حرجة .

⇐ ولا يوجد للاقتران قيم قصوى محلية .

خارجي / اذا كان ق(س) = جتا٢س − ٣س ، س ∈ [٠ ، π] ما الفترة التي يكون الاقتران فيها ق(س) متناقصاً

(أ) [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] (ب) [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] (ج) [$\frac{\pi}{٤}$ ، π] (د) [٠ ، π]

الحل ق'(س) = −٢جا٢س − ٣

جا٢س = $\frac{-٣}{٢}$ لا يوجد قيم لسين

دائماً سالب لأن الجيب في الربع الأول والثاني موجب وتم ضربه في سالب .

∴

اشارة ق'(س) − − − − − − − −
سلوك ق(س) صفر ↘ π

∴ ق(س) متناقص في [٠ ، π]

أ. معتصم ريحان / شرح على كيفك

ص 18



CamScanner

خارجي / اذا كان ق(س) = جتا$^{٢}$س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] فإن للاقتران ق(س) نقطة حرجة عندما س تساوي

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\boxed{\frac{\pi}{٤}}$ (ج) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

الحل / ق(س) = ٢ (جتاس) × −جاس = −جا٢س ← استخدمنا متطابقة جيب ضعف الزاوية

السؤال طلب النقاط الحرجة للاقتران ق(س)

اذاً نشتق الاقتران ق(س) كمان مرة ونساويه صفر

ق″(س) = −٢جتا٢س = صفر ⟸ جتا٢س = صفر ∴ ٢س = $\frac{\pi}{٢}$ مقبولة ، ٢س = $\frac{٣\pi}{٢}$ مرفوضة لأنها لا تنتمي للفترة

∴ س = $\frac{\pi}{٤}$ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

هذه هي النقطة الحرجة للاقتران ق(س)

أ. معتصم ريحان

---

خارجي / اذا كان ق(س) = (س$^{٢}$−١)$^{٣}$ (س−١)$^{٤}$ ما الفترة التي يكون فيها الاقتران ق(س) متناقصاً

(أ) [٢ ، ∞[ (ب) ]−∞ ، −١] (ج) [−١ ، ٢] (د) [−١ ، ١]

الحل / ق(س) = ٠ ∴ (س$^{٢}$−١)$^{٣}$ = ٠ أو (س−١)$^{٤}$ = ٠

س$^{٢}$−١ = ٠ ، س = ١

س$^{٢}$ = ١

س = ±١

ق(س) متناقص في [−١ ، ١]

أ. معتصم ريحان

ق(س) سلوك ق(س): ++ ، −١ ، − − − ، ١ ، ++

---

خارجي / اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة معرف على ]أ ، ب[ ما أكبر عدد من النقاط الحرجة للاقتران ق(س)

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

أ. معتصم ريحان

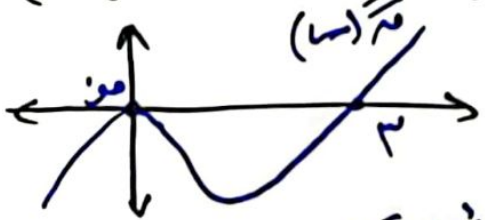
شرح كيف كيف؟

الحل / ق(س) من الدرجة الثالثة ولما نشتقه يصبح من الدرجة الثانية اذاً ق(س) له أكثر حاجة نقطتين حرجات ، وفي كمان طرف فترة عند ب اذاً يصبح أكبر عدد للنقاط الحرجة (٣) فقط.

أ. معتصم ريحان

---

خارجي / إليك منحنى الاقتران ق″(س) للاقتران ق(س) المتصل فإن نقاط الانعطاف لمنحنى ق(س)




(أ) {٢} (ب) {٣} (ج) {٢ ، ٣} (د) {٠ ، ٣}

الحل

اشارة ق″(س) سلوك ق(س): − − − ، صفر ، − − − ، ٣ ، + + +

∩ ∩ ∪

∴ (٣ ، ق(٣)) نقطة انعطاف وهي عند س = {٣}

أ. معتصم ريحان

حصص خاصة أونلاين

ص ١٩



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي / اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود معرف على [-١، ٢] وله ٣ نقاط حرجة في هذه الفترة، قَ(١) = صفر ، قً(س) < صفر في الفترة ]-١، ٢[

فأي العبارات التالية صحيحة دائماً :- أ. معتصم ريحان

(أ) ق(١) قيمة صغرى محلية (ب) ق(س) متزايد على [١، ٢]

(جـ) ق(س) متزايد على [-١، ١] (د) (-١، ق(-١)) نقطة إنعطاف

الحل: ∵ قَ(١) = صفر ∴ عند س = ١ نقطة حرجة.

واطراف الفترة [-١، ٢] ايضاً نقاط حرجة

وبما أنه قً(س) < صفر ∴ قً(١) < صفر ∴ ق(١) قيمة عظمى محلية حسب اختبار المشتقة الثانية

أ. معتصم ريحان
00972598709519
شرح على كيف كيفك

+ + + +    - - - -

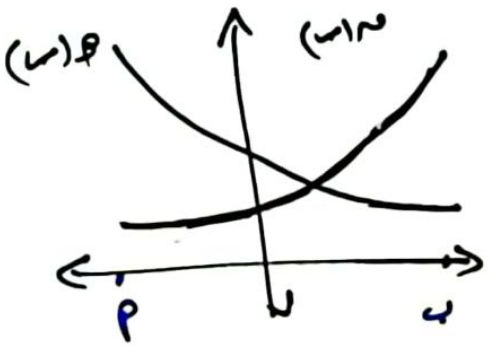
-١    ١    ٢

∴ ق(س) متزايد على [-١، ١] #

أ. معتصم ريحان

---

خارجي / الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س)، والاقتران هـ(س) المعرفين على الفترة [أ، ب] بين أن الاقتران م(س) = $\frac{\text{قَ(س)}}{\text{هـ(س)}}$ متزايد في الفترة [أ، ب]




الحل: ق(س) > صفر في [أ، ب] لأنه فوق محور السينات.

هـ(س) > صفر في [أ، ب] لأنه فوق محور السينات.

قَ(س) > صفر لأنه ق(س) متزايد في [أ، ب]

هـَ(س) < صفر لأنه هـ(س) متناقص في [أ، ب]

قً(س) > صفر لأنه ق(س) مقعر لأعلى في ]أ، ب[

هـً(س) > صفر لأنه هـ(س) مقعر لأعلى في ]أ، ب[

م(س) = $\frac{\text{قَ(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ⟸ مَ(س) = $\frac{\text{هـ(س)} \times \text{قً(س)} - \text{قَ(س)} \times \text{هـَ(س)}}{(\text{هـ(س)})^2}$

∴ مَ(س) = $\frac{(+) \times (+) - (+) \times (-)}{(+)}$

مَ(س) = $\frac{(+) + (+)}{(+)}$ = (+)

∴ مَ(س) > صفر ∴ م(س) متزايد في [أ، ب]

#

أ. معتصم ريحان
حصص خاصة أونلاين على الزوم
تابعين على العنيس والبوتيوب

ص 20

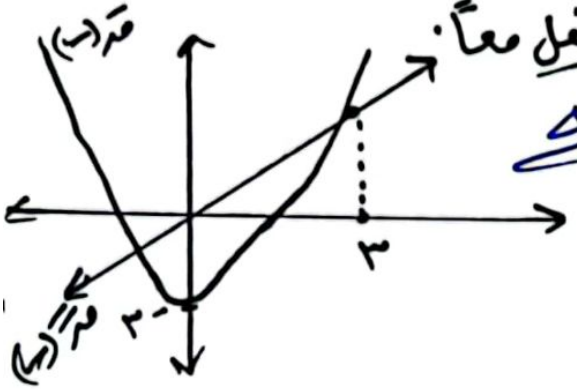


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

**خمس/** معتمداً على رسمة ق'(س) ، ق''(س) أوجد قاعدة الاقتران

ق(س) = أ س$^{٣}$ + ب س + جـ الذي يمر بالنقطة (٠ ، ٢) ثم أوجد الفترة

التي يكون فيها الاقتران ق(س) متزايد ومقعر للأسفل معاً.




**الحل/** نستنتج من الرسم

أ. معتصم ريحان

ق'(٠) = -٣ ، ق'(٣) = ق''(٣)

مُعطى أنه ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

ق(٠) = أ(٠)$^{٣}$ + ب(٠) + جـ

$\boxed{٢ = جـ}$ #.

⊛ ⟸ ق'(س) = ٣أ س$^{٢}$ + ب ⟸ ق''(س) = ٦أ س

ق'(٠) = ٣أ(٠)$^{٢}$ + ب

$\boxed{-٣ = ب}$ #

⊛ ق'(٣) = ق''(٣)

٢٧أ - ٣ = ١٨أ

⟸ ٩أ = ٣ ⟸ أ = $\frac{١}{٣}$ #.

∴ ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ - ٣س + ٢

∴ ق'(س) = س$^{٢}$ - ٣ = ٠ ⟸ س = ±$\sqrt{٣}$

ق'(س) + + + - - - - - + + +

$-\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$

∴ ق(س) متزايد في [$\sqrt{٣}$ ، ∞[ ، ]-∞ ، -$\sqrt{٣}$]

ق''(س) = ٢س = ٠ ⟸ س = ٠

ق''(س) - - - - - + + +

سلوك ق(س) ∩ صفر ∪ ∞

∴ ق(س) مقعر للأسفل في ]-∞ ، صفر[

∴ ق(س) متزايد ومقعر للأسفل في الفترة ]-∞ ، -$\sqrt{٣}$[

المشتركة

أ. معتصم ريحان


أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب
00972598709519
حصص خاصة أونلاين مميزة


ص 21



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

**جميل / مميز** معتمداً على منحنى ق(س) المعرف على الفترة [٠، ٦] ، فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً :-

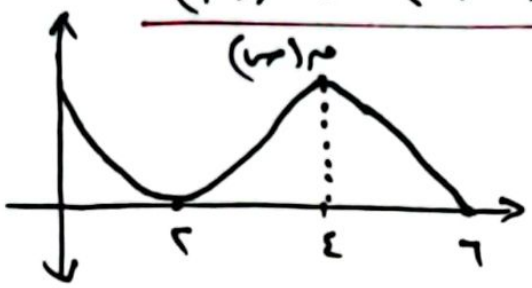
أ. معتصم ريحان

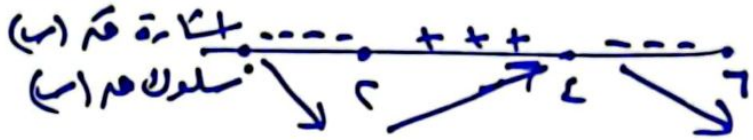
أ) ق′(٣) < ق′(٤) < ق′(٥)

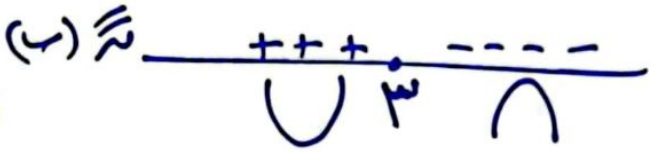
ب) ق″(١) < ق(٢) < ق″(٥)

ج) ق(٢) < ق′(٤) < ق(٥)

د) ق″(٥) < ق′(٢) < ق′(٣)




ق′(٤) = صفر

ق′(٢) = صفر

ق(٢) = صفر

أ. معتصم ريحان

**خارجي** اذا كان ق(س) = ١ + هـ²(س) ، وكان هـ(س) كثير حدود له قيمة صغرى محلية عند (١ ، -٥) ، أثبت أن للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند (س = ١)

الحل: هـ(١) = -٥ ، هـ′(١) = صفر ، هـ″(١) > صفر

من اختبار المشتقة الثانية

ق(س) = ١ + هـ²(س)

ق′(س) = ٢ هـ(س) × هـ′(س)

ق″(س) = ٢ ( هـ(س) × هـ″(س) + هـ′(س) × هـ′(س) )

ق″(١) = ٢ ( هـ(١) × هـ″(١) + هـ′(١) × هـ′(١) )

ق″(١) = ٢ ( -٥ × + + صفر × صفر )

ق″(١) = سالب < صفر

∴ ق(١) قيمة عظمى محلية حسب اختبار المشتقة الثانية

أ. معتصم ريحان

00972 598709519

حصص خاصة أون لاين مميزة

* ملاحظة: بما أن للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية عند س = ١ إذاً هـ″(١) > صفر حسب إختبار المشتقة الثانية

ص 22



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي / اذا كانت هـ(س) معرف ف [٠ ، ٣] وكانت هـ(١) = -٢ ، هـ(١) = صفر ، هـ(١) = ٣

حاول تحل

أ) -٣ ب) -٢

ج) صفر د) ١

---

خارجي / اذا كانت هـ(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة معرف ف [أ ، ب] فإن عدد نقاط الإنعطاف

حاول تحل

أ) نقطة ب) نقطتين

ج) نقطتان على الأكثر د) نقطتان على الأقل

---

خارجي / اذا كان لمنحنى هـ(س) = جا س + أ س^٢ نقطة إنعطاف عندما س = π/٢ فإن قيمة أ

حاول تحل

أ) صفر ب) ١/٤

ج) ١/٢ د) ١

---

خارجي / إذا كانت هـ(س) > هـ(س_١) لكل س > س_١ فإن هـ(س)

حاول تحل

أ) تزايدية ب) متناقصة

ج) مقعرة لأسفل د) مقعرة لأعلى



ممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

## * أسئلة حاول أن تحلها بنفسك *

أ. معتصم ريحان

**تطبيقات**

س/ دائرة نصف قطرها ١٠ سم، أوجد مساحة أكبر شبه منحرف مرسوم داخلها بحيث الرأسان ب، جـ على نهايتي قطر في الدائرة والرأسان أ، د على محيط الدائرة.

**قيم قصوى وتقعر وانعطاف**

س/ اذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ − ٩س + ٥ ، س ∈ [−٢، ٥]

أوجد (أ) فترات التزايد والتناقص (ب) القيم القصوى المحلية والمطلقة

(جـ) التقعرات ونقط الإنعطاف.

**نقط حرجة**

س/ مجموع الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة للاقتران ق(س) = $\sqrt{س^{٢} - ١٦س}$ تساوي

(أ) {٠، ١٦} (ب) {٠، ٨، ١٦} (جـ) {٠، ٨} (د) {٨، ١٦}

س/ أحد الإقترانات الآتية متصل وغير مشتق عند س = صفر

(أ) [س] (ب) |س| (جـ) س|س| (د) $\frac{س}{٢}$

س/ اذا كان ق(س) كثير حدود بحيث ق(١) = صفر ، ق″(١) × ق″(٢) < صفر وكانت ق″(٢) > صفر فإنّ النقطة (١، ق(١)) تكون لإقتران ق(س)

(أ) صغرى محلية (ب) عظمى محلية (جـ) إنعطاف (د) غير ذلك.

س/ اذا كان ق(س) = لو$_{هـ}$ جاس ، س ∈ [$\frac{\pi}{٤}$، π[ فإنّ ق(س) متناقص في الفترة

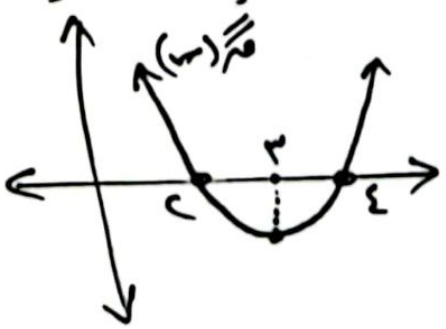
(أ) [$\frac{\pi}{٢}$، π[ (ب) [$\frac{\pi}{٤}$، π[ (جـ) [$\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٢}$] (د) [$\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٣}$]

س/ إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، حيث س ∈ [٠، ٢π] ، عين فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية لمنحنى ق(س)

س/ الشكل المجاور يمثل منحنى ق″(س) فإن نقطة إنعطاف الاقتران ق′(س) عندما س تساوي

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) غير ذلك




فخ

ص 24



CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

خارجي / اذا كانت م(س) = س + $\frac{ب}{س}$ تحقق شروط نظرية رول في الفترة [١، ٥] فإن قيمة ب تساوي :-

أ ٤ ب ٥ ج ١ د ٦

أ. معتصم ريحان

خارجي / مجموعة قيم جـ التي تعينها نظرية القيم المتوسطة على الفترة م(س) = [$\frac{س^٢}{٢}$ + ٢] في الفترة [١، ٢] هي :-

أ [١، ٢] ب ]١، ٢] ج ]١، ٢[ د {١}

خارجي / اذا كانت م(س) = $س^{\frac{٣}{٢}}$ فإن قيمة س الناتجة من تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران م(س) في الفترة [٠، ٨] هي

أ $\frac{٢٧}{٦٤}$ ب $\frac{٦٤}{٢٧}$ ج $\frac{٢٧}{٨}$ د $\frac{٨}{٧}$

أ. معتصم ريحان

خارجي / جميع الاقترانات التالية لا تحقق شروط رول على أي فترة [أ، ب] عدا واحدة هي

أ م(س) = ٢س - ٥ ب م(س) = $س^٤$ ج م(س) = ظاس د $\frac{١}{س}$

خارجي / لا يمكن تطبيق نظرية رول على الاقتران م(س) = $(س-٢)^{\frac{٣}{٥}}$ على الفترة [١، ٣] لأن

أ م(١) ≠ م(٣) ب للعددين م(١)، م(٣) الإشارة نفسها

ج م(س) غير متصل عند س = ٢ د م(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

خارجي / اذا كانت م(س) = $\begin{cases} [\frac{س}{٢}+١] & ، ٢ \leq س < ٣ \\ ٢س - ٤ & ، ٣ \leq س \leq ٥ \end{cases}$ بين أن م(س) لا تحقق شروط القيمة المتوسطة في [٢، ٥]

ثم اكتب أطول فترة جزئية مغلقة في الفترة [٢، ٥] يتحقق فيها م(س) شروط نظرية القيمة المتوسطة ثم عين قيم جـ .

أ. معتصم ريحان 0097259870959

خارجي / اذا كانت الاقتران م(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٤س + ٥ & ، س \leq ١ \\ \frac{١٠}{س} & ، س > ١ \end{cases}$

فأبحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران م(س) في الفترة [-٤، ٢] وهل يوجد جـ ∈ ]-٤، ٢[ بحيث م'(جـ) = صفر

تابعني على الفيس والبوتيوب وجروبات الواتس والتليجرام

أ. معتصم ريحان

خارجي / بين أن م(س) = ٢جاس - جتا٢س تحقق شروط رول في [٠، ٢π] ثم جد قيمة / قيم جـ التي تحددها النظرية .

25

خارجي / ليكن ق(س) = (س − ١) جاس ، س ∈ [٠، ١] باستخدام نظرية رول
أثبت وجود جـ ∈ ]٠، ١[ ، ظاجـ = ١ − جـ

خارجي / اذا كان ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∈ [أ، ب] ، س ≠ صفر فأثبت باستخدام
نظرية القيمة المتوسطة أ² < أب < ب²
أ. معتصم ريحان

خارجي / باستخدام نظرية القيمة المتوسطة أثبت أنّ |جاب − جاأ| ≤ |ب − أ|
∀ أ، ب ∈ ح
أ. معتصم ريحان

خارجي / اذا كان ق(س) = س جتاس ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$] استخدم نظرية رول لإثبات
أنّ القيمة التي تعينها النظرية هي عندما جـ = ظتاجـ
أ. معتصم ريحان

خارجي / اذا كان ق(س) = $\frac{أ}{س}$ + س ، أ ≠ صفر ، س ∈ [س١، س٢] ، صفر < س١ < س٢
أثبت وجود جـ ∈ ]س١، س٢[ بحيث جـ² = س١ س٢

خارجي / اذا كان هـ(س) ، ق(س) اقترانين كثيري حدود موجبين متقاطعين
عند النقطتين (س١، ص١) ، (س٢، ص٢) ، أثبت أنه يوجد على الأقل جـ ∈ ]س١، س٢[
بحيث أنّ $\frac{ق(جـ)}{هـ(جـ)} = \frac{قَ(س)}{هـَ(س)}$ ، هـَ(س) ≠ صفر
أ. معتصم ريحان
تابعني على الفيس واليوتيوب

خارجي / باستخدام نظرية رول بين أنه لأي اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة فما فوق
إذا قطع منحناه محور السينات في ثلاث نقاط فإنّ منحنى قً(س) يقطع محور السينات
في نقطة واحدة على الأقل.
أ. معتصم ريحان

خارجي / جد قيمة جـ التي تعينها نظرية القيم المتوسطة للاقتران ق(س) = |س² − ٥س − ٦|
في الفترة ]١، ٥[
أ. معتصم ريحان 00972598709519

خارجي / اذا كان ق(س) = { ٣ ، س = صفر
−س² + ٣س + جـ ، صفر < س < ١
أس + ب ، ١ ≤ س ≤ ٢ }
جد الثوابت أ، ب، جـ
التي تجعل الاقتران ق(س)
يحقق شروط المتوسطة
على [٠، ٢]
أ. معتصم ريحان
دروس خاصة أونلاين شرح على كيف كيفك
00972598709519

26 صفر


CamScanner ممسوحة ضوئيا بـ

| | | |
|---|---|---|
| دولة فلسطين | | التاريخ : ٢٠٢١/١٢/١٩ |
| وزارة التربية والتعليم | | الصف : ١٢ -علمى |
| مديرية التربية والتعليم – نابلس | | المبحث : الرياضيات |
| المدرسه :الملك طلال الثانويه | الجلسه الاولى | |

١): **اذا كان** $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٥ & ص \end{bmatrix}$ منفردة وكان $|أ - م_٢| = -٢$ فان المقدار $ص^٢ + س^٢ =$

أ) ٢٢ ب) ٣٣ جـ) -١١ د) ٤٤

**اذا كانت** $س = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$، $|س| = ١$ **فان** $س^{-١} + س =$ **الكخن ٢٠٢١ -kh-2021**

أ) و ب) $(د - أ) م_٢$ جـ) $(د + أ) م_٢$ د) $(د \times أ) م_٢$

**اذا كانت** $س = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $س^{٢٠٠} =$

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٢٠٠٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ١٠٠٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٥^{٢٠٠} \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٢٠٠^{٥} \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٤) **أ،ب مصفوفتان من الرتبه الثالثه بحيث** $أ_{ص ع} = ٢ص - ع$ ، $ب_{ص ع} = ع - ص$ **فان أ+ب=**

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١- \\ ٠ & ١- & ٢- \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ٠ & ١ & ٢- \\ ٤ & ٣- & ٠ \end{bmatrix}$

**أ مصفوفه من الرتبه** $م \times ن$ **وعند تبديل الصفوف بالاعمدة اصبحت من الرتبه** $(٢م - ١) \times (ن - ١)$ **فان**

**م+ن =** أ) **٢** ب) **٤** جـ) **٥** د) **٦**

٨) س،ص غير منفردتين مربعتين من الرتبه ن×ن بحيث $|٢س ص^{-١}| = ١٦$ ، $|س| = ٣$ ، $|س| = ١٢$

فان قيمه ن هى أ) ٣ ب) ٦ جـ) ٥ د)٣٢

٩) **أ،ب،جـ ثلاث مصفوفات احدى التاليه صائبه:**

أ) اذا كان $|أ| = |أ^{-١}|$ **فان** $|أ| = \pm ١$

ب) $|٢أ| = ٢^{٤} |أ|$

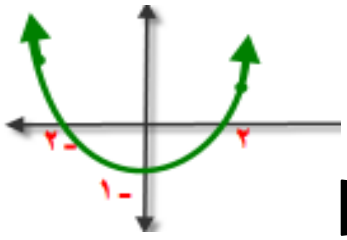
جـ) **اذا كان** $أ \cdot ب = أ \cdot جـ$ ، $|أ| \neq ٠$ فان **ب =جـ**

د) **الاجابه جـ+ب**

٢) الشكل التالى ق ′(س) كثير الحدود المعرف على ح نقطه الانعطاف ومجال تناقص ق ′(س) على الترتيب

أ) (٢، ق(٢)) ، ]-∞، ٢[ ب) (-٢، ق(-٢)) ، ]-٢، ٠[

جـ) (-١، ق(-١)) ]-∞، -٢[ د) (٠، ق(٠)) ، ]-٢، ∞-[




الكخن ٢٠٢١ = kh2021

٣) ق(س) = [٢س - ٤] ، س ∈ [٠، ٢] فان جميع قيم س التى يكون لها حرجه هى

أ) ٠ ب) {٠، ١، ٢} جـ) [٠، ٢] د) ]٠، ٢[

٥) معادله المماس للعلاقه س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ عند النقطه (٠، ١) هى أ) ص=١ ب) س=-١ جـ) س=١ د) ص=-١

٧) إذا كان متوسط تغير الاقتران ه(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٥ وكان ه(١) × ه(٣) = ١٢،

هـ(س) = $\frac{١}{ق(س)}$ فإنَّ متوسط تغير الاقتران هـ (س) في الفترة نفسها هو

الكخن ٢٠٢١ = kh2021

أ) $\frac{٥}{١٢}$ = ب) $\frac{٥}{١٢}$ - = ج) $\frac{١}{٥}$ - = د) $\frac{١}{٥}$ =

١١) ق(س) معرف [أ ، ب]، ومتزايد ويقع فى الربع الرابع ، ق(س) ≠ ٠ : ع(س) = $\frac{هـ^{س}}{ق(س)}$ فان ع(س)

أ) يكون متزايد على [أ ، ب] ب) ثابت على [أ ، ب]

جـ) متناقص على [أ ، ب] د) لايمكن التحديد

١٢) عدد القيم القصوى للاقتران:ه(س) = $\frac{أ س^{٣} + ب}{ج س + ء}$ علمان بان أ ء - ب ج ≠ ٠ ، س ≠ - $\frac{ء}{ج}$ ه(س) ≠ ٠؟

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٠

الكخن ٢٠٢١- kh-2021

١٣) ق(س) كثير حدود زاويه ميل المماس لمنحى ق′(س) عند اى نقطه عليه على ]٢،٥[ هى زاويه منفرجه احدى التاليه صائبه أ) ق متناقص على [٢،٥] ب)ق متزايد على [٢،٥]

جـ) ق مقعر للاعلى على ]٢،٥[ د ) ق مقعر للاسفل ]٢،٥[

١٤ $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٣}(٤\text{س}+٣\text{هـ})-\text{جتا}^{٣}\left(\frac{\pi}{٢}-٤\text{س}\right)}{٦\text{هـ}} =$ **الكخن ٢٠٢١=H2021**

أ) $\frac{٣}{٤}$جا٤س جا٨س ب) $\frac{٣}{٤}$جا٤س جا٨س جـ) $-\frac{٣}{٤}$جتا٤س جا٨س د) $-\frac{٣}{٤}$جتا٤س جتا٨س

١٥) .إذا كان ق(س) معرفاً على [− ١ ، ١] ، قً(س) موجودة في ]− ١ ، ١[ ويوجد عند س = ٠ نقطة انعطاف ، فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً:

أ. منحنى ق مقعر للأسفل على [− ١، ١] وللأعلى على [٠، ١] ب. ق له نقطة حرجة في ]− ١، ١[

جـ. قَ له نقطة حرجة في ]− ١ ، ١[ د. قً له نقطة حرجة في ]− ١ ، ١[

١٦) ص = ١ − ٥س مماسا للاقتران ق(س) عند(٢، −٩)فان $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٣\text{هـ}+٢)-\text{ق}(٢)}{١٥\text{هـ}} =$

أ)−١٥ ب)١ جـ)−٥ د)−١

١٧)اذا كانت $\text{ص} = \frac{١}{\text{أ}}\left(\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{أس}} + \text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{أس}}\right)$ فان ص″= **الكخن ٢٠٢١=H2021**

أ) $\frac{\text{ص}}{\text{أ}}$ ب)− أ ص جـ) $\frac{\text{ص}}{\text{س أ}^{٢}}$ د) $\frac{\text{ص}}{\text{أ}^{٢}}$

١٩)تحرك جسم فى خط مستقيم حسب العلاقه ف(ن) = ن$^{٤}$−١٢ن$^{٣}$+٨ن$^{٢}$−٦ بالاعتماد على ذلك اجب عن السؤالين التاليين ٣) اقل تسارع ممكن للجسم هو : أ) ٣ ب)−٣ جـ) ٩٢ د)−٩٢

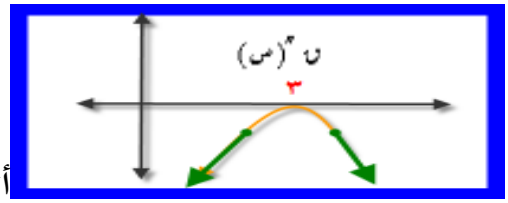
١٣) مجموعه قيم ن التى يكون عندها التسارع متناقص **الكخن ٢٠٢١ -kh-2021**

أ) ]−∞،−٣] ب) ]٣،+∞] جـ) ]٠،+٣[ د) ]−∞،٣]

٢٠) إذا كان ق(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ (س − ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ ∈ ح ، فإنَّ مجموعة الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة هي:

أ.{ ١، ٢ ، ٠ } ب. {− ١ ، − ٢} جـ) {١} د. {− ١، ،−٢، ٠ ، $\sqrt{٣}$})

٢٢)الشكل التالى ا ق "(س) مجموعه قيم س التى تكون عندها نقطه انعطاف




أ) {٠} ب) {٤،٠} جـ) {٣} د) ∅

٢٣)اذا كان ا × ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$ ، ا × جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$ ، |ا| ≠ ٠ فان ب+جـ= الكخن ٢٠٢١=H2021

أ) ا ب) م جـ) ا$^{-١}$ د)و

٢٤)اذا كانت أ غير منفردة ومربعه وكان ا$^{٢}$ + ا س = ا فان س=

أ) − ا ب) ا$^{-١}$ جـ) م$_{٢}$ د) م$_{٢}$ − ا

السؤال الثانى : ٢٠ علامه

أ) ق(س) = س + $\frac{٢٥}{س}$ :س ∈ [−٨،٨] − {٠} جد ١) الاحداث السينى للنقاط الحرجه ٦علامات

٢) جد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق ٣) القيم القصوى وحدد نوعها ٨علامات

ب) اذا كانت ا = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ حل المعادله ا$^{-١}$ (س$^{-١}$ × ب)$^{-١}$ = م$_{٢}$ + ب

جـ) جد نقطه على منحنى العلاقه ٣ص$^{٢}$ + ٢س$^{٢}$ = ٣٠ التى يكون المماس موازى للمستقيم

٥ = ٢ص + ٢س ٦علامات

السؤال الثالث :

أ) حل المعادله المصفوفيه ٣س + $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٧ & ٢- \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} ١٠ & ٦- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$ = س $\begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ٣- & ١٦ \end{bmatrix}$ ٨علامات

ب) اذا كان جاص = $\frac{٢}{قتاس٨}$ اثبت ان (ص ′)$^{٢}$ = ٣قا$^{٢}$ص + ١ ؟ الكخن ٢٠٢١- kh-2021 ٦ علامات

حـ) من قمه برج يرتفع ٤٨ قدم قذف جسم رأسيا الى الاعلى حسب العلاقه ف(ن) = −٦ ١ن$^{٢}$ + ٣٢ن وفى اللحظه نفسها قذف جسم ثانى من سطح الارض للاعلى حسب ف(ن) = −٦ ١ن$^{٢}$ + ع$_{٠}$ن جد ع$_{٠}$ للجسم الثانى عندما يتساوى اقصى ارتفاع للجسمين عن سطح الارض؟ ٦علامات

السؤال الرابع :أ) $ن(س) = \text{جتا}(\frac{\pi}{٤}س)$ ، $هـ(س) = ٢\sqrt{س} + ١$ ، $(ن \circ هـ)'(١) = \sqrt{٢}$ جد الثابت أ ٨علامات

ب ) عند حل نظام باستحدام كريمر وجد ان $|أ_س \times أ_ص| = ٣٢$ ، $س = ٢$ ، $ص = ٤$ ، $|أ| < ٠$

جد $|أ|$ ٦ علامات

جـ) $ق(س) = ن'(س) = \text{جا}\pi س + \text{جتا}\pi س \in [٠،٢]$ عين مجالات التقعر للاعلى للاسفل؟ ٦علامات

---

الخامس:أ) $ن(س) = \begin{cases} |-٦ + س^{٢} - س| & ، ٠ \leq س < ١ \\ ب + أس & ، ١ \leq س < ٢ \\ جـ & ، س = ٢ \end{cases}$ يحقق المتوسطه على مجاله جد الثوابت أ،ب،جـ

ثم جد جـ التى تعنيها النظريه ٨علامات

ب) $\begin{vmatrix} أ & أ+ب & أ+٢ب \\ أ+٢ب & أ & ب+أ \\ ب+أ & أ+٢ب & أ \end{vmatrix} = ٩ب^{٢}(أ+ب)$ ٦علامات

ج،) أذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) على $[-١،١]$ يساوى ٧ وكان $هـ(س) = س ن^{٢}(س) + ٤س$

احسب متوسط التغير للاقتران على $[-١،١]$ علما بان $ن(١) \times هـ(١) = -٨$ ٨علامات

---

السادس:أ) اذا كانت العلاقه $\frac{١}{٢}ع^{٣} + \frac{٩}{ف} = ٧$ تربط ازاحه الجسم مع سرعته جد التسارع عند ما يكون قد قطع ٣م

**الكخن ٢٠٢١=H2021** ٦علامات

ب) : استخدم طريقه جاوس لايجاد مجموعه حل النظام

$س + ٣ص - ع = -٤$ ، $٢س + ٣ص + ٢ع = ٢$ ، $٩ = ٤ع - ص + س$ ٦علامات

حـ) كثير حدود من الدرجة الثالثة له عظمى محليه عند $س = س_{١}$ وصغرى محليه عندس $س = س_{٢}$ اثبت ان الانعطاف يحد

عند $س = \frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$

---

السابع:أ) كثير حدود من الدرجه الثالثه له حرجه واحدة فقط عند س=و اثبت ان الانعطاف له يحدث

عندس=و ٦علامات

ب)اذا كان س مربعه من الرتبه الثانيه بحيث $س^{-١} = س$ حل المعادله $س^{٣} - ٢س = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} + ٢س$ ٦علامات

جـ) ق((س) كثير حدود معرف على $[١،٣]$ يقع فى الرابع ومتزايد على مجاله كان $هـ(س) = ١٠ - س^{٢}$

جد مجالات التزايد والتناقص للاقتران $ل(س) = (هـ(س) \times ن(س))^{٢}$ على نفس الفترة ٨علامات

الثامن أ) كثير حدود من الدرجة الثانية اثبت ان الوتر الواصل بين النقطتين $(س_١، ق(س_١))، (س_٢، ق(س_٢))$ يوازى المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ٦علامات

ب) . ا ب ج مثلث طول قاعدته ب ج يساوي ١٢سم ، وطول ارتفاعه النازل من الرأس ا يساوي ١٦سم فرضت نقطة د على ب ج ، ثم رسم مستقيم ب ج ، ثم رسم مستقيم يوازي ب ج ويقطع ا ب ، ا ج في نقطتين هـ ، و أحسب طول العمود النازل من و على هـ لتكون مساحة المثلث هـ د و أكبر ما يمكن

جـ) اذا كانت $ا = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ كانت $جـ_١$ ، $جـ_٢$ مصفوفتى عمود حيث $ا جـ_١ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ، $ا جـ_٢ = \begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$

جد $جـ_١ + جـ_٢$ ٦علامات

H2021=٢٠٢١ الكخن

التاسع:أ) وعاء اسطوائى غطائه نصف كرة مساحه سطحه $٨٠\pi$ جد اكبر حجم ممكن للوعاء ٨ علامه؟

ب) ) عند حل نظام باستخدام كريمر وجد ان

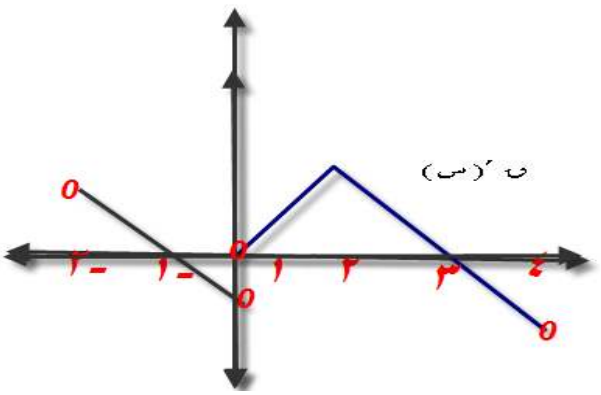
$ا_س - ا_ص = \begin{bmatrix} ٤ & ٦- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ا_ص - ٢ا_س = \begin{bmatrix} ٧ & ٩- \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$ جد س،ص

جـ) ا الشكل التالى $ق'(س)$ على $[-٢،٤]$ بالاعتماد اجب

١)قيم س الحرجه للاقتران ق

٢)التزايد والتناقص ل ق(س)

٤)التقعر للاعلى وللاسفل للاقتران ق(س) ونقطه الانعطاف؟




KH-2021-أ-بلال

H2021=٢٠٢١ الكخن

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي
مديرية التربية والتعليم – خان يونس

# امتحان نهاية الفصل الأول

## للعام الدراسي ٢٠٢١/٢٠٢٢

*المبحث : الرياضيات*

الصف: الثاني عشر علمي
الزمن :
التاريخ: / /

اسم الطالب : _____

**القسم الأول: يتكون هذا القسم من أربعة أسئلة وعلى المشترك أن يجيب عنها جميعاً**

## السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة : ( ٣٠ علامة)

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١، ٣] يساوي ٤ وكان متوسط تغيره في [٣،٥] يساوي ٨ ، فإن متوسط تغير الاقتران في [١،٥] يساوي

أ) ٢ ب) ٢٤ ج) ٦ د) ١٢

٢) إذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)-٢}{س-١} = ٣$ ، وكان ق(س) متصلاً على ح فإن $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} ق(س) - ق(١)}{س-١}$ ؟

أ) ٩ ب) ٦ ج) ١٤ د) صفر

٣) أي من الاقترانات الأتية يكون قابلاً للاشتقاق على مجاله

أ) ق(س)= [ س + $\frac{١}{٢}$ ] – [س] ب) ق(س) = $\sqrt{٣٦-س^{٢}}$

ب) ق(س) = $س^{٥} + س^{\frac{١}{٣}}$ د) ق(س) = | $س^{٢}$ + ٢س +١|

٤) إذا علمت أن ص=$ع^{٢}$ ، ع= جاس – جتاس ، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ ؟

أ) ٢جتا٢س ب) ٢جا٢س ج) –٢جتا٢س د) صفر

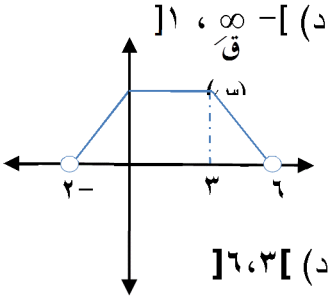
٥) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن بُعده بالأمتار عن النقطة (و) بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة :
ف= $ن^{٢}$ + ك ن + ٣ فإذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة [٥،٢] تساوي ١١ فما قيمة الثابت ك ؟

أ) –٤ ب) ٤ ج) $\frac{-١٠}{٣}$ د) ٧

٦) إذا كان ق(س) = س+ | س–١| ، فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها نقاط حرجة للاقتران ق(س) هي

أ) ١ ب) ٠ ج) ]– ∞ ، ١[ د) ]– ∞ ، ١[

٧) إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة [–٢،٦] وكانت $ق'$(س) ممثلة في الشكل المجاور، ٠فما الفترة التي يكون فيها ق(س) مقعراً للأسفل




أ) ]–٢،٦[ ب) ]–٢،٠[ ج) ]–٢،٣[ د) ]٣،٦[

٨) ما مجموعة قيم جـ التي تحددها نظرية رول على الاقتران ق(س) = ٩ في [٠،١]

أ) Ø ب) {٠} ج) ]٠،١[ د) [٠،١]



اقلب الصفحة

٩) **يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث** $ع^{٢} = ١ + ٨\sqrt{ف + ن}$ **، ف: المسافة بالأمتار، ن: الزمن بالثواني ، فجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٥م/ ث .**

أ) ٠,٨ ب) ٠,٤ ج) ٠,٢ د) ٠,٥

١٠) **ماالعبارة الصحيحة دائماً من العبارات التالية ؟**

أ) إذا كان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س= **جـ** فإن **ق َ(جـ)** = ٠

ب) إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية وكان **ق(أ)=ق(−أ)** ، فإنه يوجد جـ على الأقل ، جـ ∈ ]−أ،أ[ ، بحيث **ق َ(جـ)** = ٠

ج) إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [١،٥] ، **ق َ(س)** < ٠ ، ∀ س ∈ ]١،٥[ فإن للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند س= ٥ .

د) إذا كان $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ∈ [ أ، ب] ، **ق َ($س_{١}$)− ق َ($س_{٢}$)** > ٠ ∀ $س_{١}$ > $س_{٢}$ ، فإن منحنى ق(س) متزايد في [ أ، ب] .

١١) إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على [−١،١] ، **وكان ق(١) =٢ ،** $\underset{س \to ١^{-}}{نهـا}$ ق(س) = ١ **،فإنه يوجد عند س=١**

أ) قيمة صغرى محلية ب) قيمة صغرى مطلقة

ج) قيمة عظمى محلية د) **ق َ(١)**=٠

١٢) **إذا كان ق(س)= $س^{٢}$ ، هـ(س)=** $\frac{ب}{٢س+١}$ **، وكان** $(ق َ \circ هـ)َ(١) = \frac{٨}{٩}$ **، فأن قيمة الثابت ب تساوي**

أ) −٢ ب) ٢ ج) −٤ د) ٤

١٣) **إذا كان المستقيم: ص+٣س +٢=٠ مماساً لمنحنى الاقتران ق(س) عند نقطة الانعطاف (−١،١) فإن ظل زاوية الانعطاف عند النقطة (−١،١) يساوي**

أ) −١ ب) ١ ج) صفر د) −٣

١٤) **إذا كان ق(س) =** $لـو_{هـ}$(ظتاس+قتاس)−٢ ، ٠< س < $\frac{\pi}{٢}$ **، فأي مما يلي يمثل جاس × ق َ(س)**

أ) −١ ب) ١ ج) − قتاس د) − ظاس

١٥) **إذا كان (س − ص)$^{٤}$ + (ص − س)$^{٤}$ = ٣٢ ، س ≠ ص ، فإن** $\frac{دص}{دس}$ =

أ) ١ ب) ٤ ج) −١ د) −٤

١٦) **إذا كان ق(س) =** $\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ **حيث** |س| ≤ ٦ **فإن ق(س) يكون متزايداً عندما**

أ) س ≥ ٠ ب) س ≥ ٦ ج) −٦ ≤ س ≤ ٠ د) ٠ ≤ س ≤ ٦

١٧) **القيمة العظمى المطلقة للاقتران ق(س)=** س$لـو_{هـ}$ س **حيث** س∈[$هـ^{-٢}$ ، هـ] **تساوي**

أ) −٢$هـ^{-٢}$ ب) هـ ج) ٢هـ د) −$هـ^{-١}$



اقلب الصفحة

١٨) **إذا كان ق(س)** = $\sqrt{س^{٢}-٩}$ ، س ∈ [٣، ب] ، **وكانت قيمة جـ التي تعينها نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) في الفترة** [٣، ب] **هي (٥)، فجد قيمة** ب؟

أ) $\frac{٩}{١٢٣}$ ب) $\frac{١٢٣}{٩}$ ج) $\frac{٢٥}{١٦}$ د) $\frac{٥}{٤}$

١٩) **إذا كانت** ص = هـ$^{س^{٣}-٤}$ **وكان** ٢ص$_{س}$ = م س$^{٢}$ ص ، س ≠ صـــفر **فإن قيمة** م **تساوي**

أ) ٦ ب) ٤ ج) ٣ د) ٢

٢٠) **إذا كان لمنحنى الاقتران ق(س)** = س$^{٣}$ + ٣س$^{٢}$ + أس **نقطة انعطاف أفقي فما قيمة** أ ؟

أ) -٣ ب) -١ ج) ١ د) ٣

---

## السؤال الثاني : (٢٠علامة)

أ) إذا كان ق(س) = س$^{٢}$(٣س -٣) +١ معرفاً على [-٢ ، ٦] ، فجد : **(١٠ علامات)**

١) مجالات تزايد وتناقص الاقتران ق(س)

٢) القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران ق(س) (إن وجدت)

ب) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : س$^{٢}$ - ٤س + ص$^{٢}$ =١ ، **(١٠ علامات)**
ص > . ، عند نقطة تقاطعه مع منحنى ص= س$^{٢}$ -٤س + ٥ .

---

## السؤال الثالث : (٢٠علامة)

أ) إذا كان ق(س)= $\begin{cases} أس^{٢}+٢س & ٠ \geq س < ٢ \\ س^{٣}-بس+١٢ & ٢ \geq س \geq ٣ \end{cases}$ **(١٠ علامات)**

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في [٠ ، ٣] ، جد قيمة الثابتين أ ، ب ، ثم جد قيمة/قيم جـ التي تحددها النظرية .

أ) دائرة نصف قطرها ١٠سم ، رسم فيها شبه منحرف أب جـ د بحيث تقع رؤوسه على **(١٠ علامات)**
محيط الدائرة وتنطبق قاعدته الكبرى ب جـ على قطر الدائرة ، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف .



اقلب الصفحة

## السؤال الرابع : (٢٠علامة)

أ) إذا كان ق(س) = ٣جاس جتاس ، س ∈ ]٠ ، π[ ، فجد : **(١٠ علامات)**

١) فترات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س) . ٢) نقاط الانعطاف وزوايا الانعطاف (إن وجدت) .

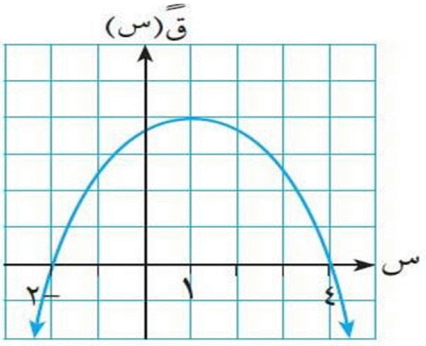
ب) الشكل المجاور يمثل منحنى ق″(س). إذا علمت أن : **(١٠ علامات)**

النقاط الحرجة للاقتران ق(س) هي عند س= −١، ٦ فأوجد:

١) فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س) .

٢) نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) .

٣) نقطة / نقط الانعطاف للاقتران ق(س) .



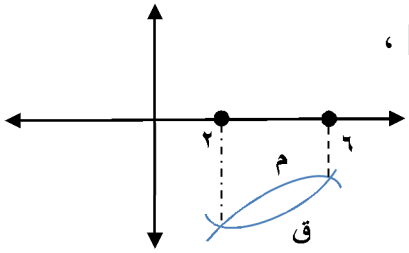

| |
|---|
| القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط. |

## السؤال الخامس : (١٠علامات)

أ) الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) ، م(س) في الفترة [٢ ، ٦] ، **(٥ علامات)**

بحيث ك′(س) = هـ^{ق(س) . م′(س)} ، بين أن الاقتران ك(س)

مقعراً لأعلى في ]٢ ، ٦[.




ب) إذا كانت ص = أجتا(لـو_هـ س) + ب جا(لـو_هـ س)، أثبت أن س^٢ ء^٢ص/ءس^٢ + س ءص/ءس + ص = ٠ **(٥ علامات)**

---

## السؤال السادس : (١٠علامات)

أ) قُذِف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث أن بعده عن سطح الأرض **(٥ علامات)**

يعطى بالعلاقة ف(ن)= ٢٠ن − ٥ن^٢ حيث ف : ارتفاع الجسم بالأمتار ، ن : الزمن بالثواني ، جد :

١) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم .

٢) سرعة الجسم عندما يكون قد قطع مسافة ٢٥م .

ب) إذا كان ص + س ص = جتاس ، اثبت أن : ص″ + ص = −٢ص′/(س+١) **(٥ علامات)**

**انتهت الأسئلة**

**القسم الأول : يتكون هذا القسم من أربعة أسئلة ، أجب عنها جميعا.**

**السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة :** **( ٢٠ علامة )**

١) إذا كان متوسط تغير $ن(س) = |س + ٢| - ب$ في $[جـ، ٢]$ يساوي ٤ فإن $جـ$ =

أ) $\frac{٢}{٥}$ ب) ٢ ج) ٤ د) ١

٢) إذا كان $ن(س)$ معرفا في $[-١، ١]$ ، و كان $ن(١) = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} ن(س) = ١$ فما العبارة الصحيحة :

أ) $ن(١)$ قيمة صغرى محلية ب) $ن(١)$ قيمة صغرى مطلقة

ج) $ن(١)$ قيمة عظمى محلية د) $ن'(١)$ = صفر

٣) تحرك جسم حسب العلاقة $ف = \sqrt{ع}$ إذا كان التسارع يساوي ٨ م/ث فإن قيمة ف الموجبة :

أ) $\frac{١}{١٦}$ ب) $\frac{١}{٨}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{١}{٢}$

٤) إذا كان $ن(س) = ١$ معرف على $[٤، ٠]$ ، فإن قيم $جـ$ التي نحصل عليها من تطبيق رول هي :

أ) $\{\}$ ب) ٢ ج) $]٤، ٠[$ د) $[٤، ٠]$

٥) إذا كان $ن(س) = ٢س^٢ + بس$ ، $(ن \circ ن)'(١) = ٢٤$ ، فما قيمة الثابت $ب$ ؟

أ) ٢ ب) $-٢$ ج) $-٤$ د) ٤

٦) إذا كان $ن(س) = [س + ٧] - [س] + |٢س|$ ، $س \in ]-١، ٥[$ ، فإن $ن'(-٣)$ =

أ) ٢ ب) $-٢$ ج) ١٣ د) غير موجودة

٧) إذا كان $ن(س) = جتاس - جاس$ ، $س \in [\pi، ٠]$ ، فما قيمة $س$ التي يكون عندها قيمة صغرى مطلقة للاقتران $ن(س)$؟

أ) ٠ ب) $\frac{\pi}{٤}$ ج) $\frac{\pi}{٢}$ د) $\frac{\pi ٣}{٤}$

٨) إذا كان $ن(س)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة له قيمة صغرى محلية عند $س_١$ وقيمة عظمى محلية عند $س_٢$ ، $س_١ < س_٢$ فإن $ق'(س)$ يكون على ح

أ) مقعرا لأسفل ب) مقعرا لأعلى ج) متناقصا د) متزايدا

٩) إذا كان $ق(س) = لـو_هـ (س^٢ + ١)^٢ + هـ^{جاس}$ ، فما قيمة $ق(٠) \times ق'(٠)$

أ) صفر ب) ١ ج) هـ د) ١ + هـ

١٠) إذا كان المستقيم $ص + ٣س + ٢ = ٠$ ، مماسا لمنحنى $ن(س)$ عند نقطة الانعطاف $(-١، ١)$ فما ظل زاوية الانعطاف عند هذه النقطة :

أ) $-٣$ ب) $-١$ ج) صفر د) ١

**السؤال الثاني ( ٢٠ علامة ) :**

أ) جد $\lim_{س \to ١} \frac{س لـو_{٢} س - س + ١}{(س - ١) لـو_{٢} س}$ .

ب)جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(س + ٢ص)^{٣} - ٤س + ٦ص = ٤٣$ عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم $٦ص = ٩ - ٣س$ .

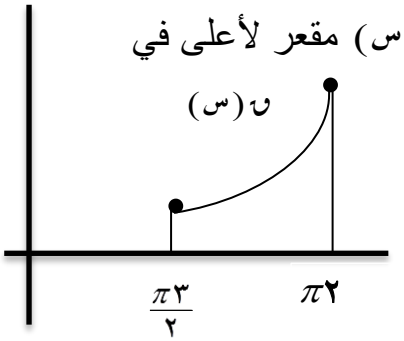
**السؤال الثالث ( ٢٠ علامة ) :**

أ) قذف جسم رأسيا لأعلى من قمة برج ارتفاعه ١٢٠ م حسب العلاقة $ف = ٤٠ن - ٥ن^{٢}$ ، حيث ف ارتفاع الجسم عن سطح البرج (بالأمتار ) في اللحظة ن ( بالثواني ).

١) جد المسافة الكلية المقطوعة بعد ٧ ث من بدء الحركة .

٢) جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٢٠ م عن سطح الأرض.

ب)الشكل المقابل يمثل منحنى $ن(س)$ في $\left[\frac{٣\pi}{٢}، ٢\pi\right]$ ، أثبت أن $هـ(س)$ مقعر لأعلى في تلك الفترة علما بأن $هـ`(س) = ن`(س) جتاس$ .




**السؤال الرابع ( ٢٠ علامة ) :**

أ) إذا كان $ن(س) = \begin{cases} ا س^{٢} - ٢س - ٢ & ، -١ \geq س > ١ \\ س^{٢} + بس - ٤ & ، ١ \geq س \geq ٣ \end{cases}$ يحقق نظرية المتوسطة في $[-١، ٣]$

جد قيمتي الثابتين ا،ب ثم قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية.

ب) إذا كان $ص = \left(\frac{١}{٢} ظا س جا ٢س\right)^{٣}$ ، فأثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = ٣جا^{٤} س جا ٢س$

**القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين و على المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط .**

**السؤال الخامس ( ٢٠ علامة ):**

أ) مستطيل محيطه ٢٤ سم ، ثني ليكون اسطوانة . أوجد أكبر حجم لهذه الاسطوانة .

ب)إذا كان $ن(س)$ كثير حدود متصل على ح وكان $ن`(٣) = ن`(١) = ٠$ ، وكان $ن`(س)$ متناقص على $]-∞، -٢]$،$[٢، ∞[$ ، $هـ`(س)$ متزايدا على $[-٢، ٢]$ ، جد للاقتران ق ( س) :

١) فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية ٢) فترات التقعر ونقط الانعطاف

**السؤال السادس ( ٢٠ علامة ) :**

أ) ا ب جـ د مستطيل عرضه ا ب = ٨ سم و طوله ب جـ = ١٠ سم ، م نقطة على الضلع ا ب ، بحيث أن ا م = س ، ن نقطة على الضلع ب جـ بحيث ب ن = $\frac{٣}{٢}$ س ، جد قيمة س بحيث يكون مجموع مساحتي الشكل أ م جـ د والمثلث م ب ن أصغر ما يمكن .

ب) $ص = هـ^{٣}(س) - هـ(س^{٣})$ ، جد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند س = ٢ حيث $ن(٢) = ١، ن`(٢) = -٢، ن`(٨) = ٢$

انتهت الأسئلة

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم -طولكرم
المبحث : الرياضيات /الورقة الأولى

الامتحان التجريبي
الثاني العلمي

مدة الامتحان : ساعتان ونصف
التاريخ : ٢٠٢١/١٢/٢٧
مجموع العلامات (١٠٠)علامة

**ملاحظة: عدد أسئلة الورقة (ستة) أسئلة، أجب عن (خمسة) منها فقط**

**القسم الأول: يتكون هذا القسم من أربعة أسئلة ، وعلى المشترك أن يجيب عنها جميعا**

**السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة ، ثم ضع إشارة ( ✗ )في المكان المخصص في دفتر الاجابة : (٣٠علامة)**

١) جد $\lim_{س \to ١} \frac{هـ^{س-١} - س}{لـو_{هـ} س}$ ، حيث هـ العدد النيبيري ؟

أ) ١ ب) صفر ج) - ١ د) هـ

٢) إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) في $[١ ، ٣]$ يساوي (٤) ، وكان ك(س) $= س^{٢} + ٣ق(س)$ ، جد مقدار التغير في الاقتران ك(س) على نفس الفترة ؟

أ) ١٦ ب) ٣٢ ج) ٤ د) ٢٠

٣) اذا كان $\begin{bmatrix} س^{٢}-١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ص+٥ \\ ٢ & س+١ \end{bmatrix}$ ، فإن قيم س ، ص على الترتيب هي :

أ) ٣ ، -٨ ب) -٨ ، ٣ ج) -٣ ، -٨ د) ± ٣ ، - ٨

٤) أحد الاقترانات التالية قابل للاشتقاق على مجاله :-

أ) $ق(س) = س^{\frac{٣}{٤}}$ ب) $ق(س) = [س + ٣]$ ج) $ق(س) = |س|$ د) $ق(س) = \frac{س}{س+٢}$

٥) اذا كان $ق(س) = \frac{١}{ج} س^{٥}$ ، $ق'''(س) = ٥س^{٢}$ جد قيمة الثابت ج ؟

أ) ٢٠ ب) ٥ ج) ١٢ د) ٦٠

٦) إذا كان $ق(س) = س^{٢} + \frac{١}{٢} هـ(س)$ ، وكان ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند $س = ٢$ يساوي $\left(-\frac{١}{٥}\right)$، جد قيمة $\frac{١}{٢} ق'(٢) - هـ'(٢)$؟

أ) $\frac{٥}{٢}$ ب) ٢ ج) ٤ د) $\frac{١}{٢}$

٧) اذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٣س - ب$ يحقق شروط نظرية رول على الفترة $[-٢ ، ب]$، جد قيمة الثابت ب :

أ) ١ ب) ٢ ج) ٤ د) ٥

٨) اذا كان $ج = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} + ب$ جد ب ج $-$ أ ج؟

أ) $\begin{bmatrix} ١٦ & ٥ \\ ١٨ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٩ \\ ١٠ & ١١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -٥ & -١٦ \\ -٣ & -١٨ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -١٢ & -٩ \\ -١٠ & -١١ \end{bmatrix}$

لاحظ الصفحة التالية
يتبع صفحة (٢)

٩) اذا كان س = ظاص ، ص ∈ $\left]٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$ ، جد $س^٢ ص'$ ؟

أ) $جا^٢ س$ ب) $جا^٢ ص$ ج) $جتا^٢ س$ د) $جتا^٢ ص$

١٠) اذا كان ق(٣) = ٥ ، $ق'(٣) = ٤$ فجد $\lim_{س \to ٣} \frac{٣ق(س) - س ق(٣)}{س - ٣}$

أ) ٧ ب) ١١ ج) ٨ د) ١٢

١١) عدد النقاط الحرجة للاقتران $ق(س) = \sqrt[٣]{س^٣ - ١٢س}$ ، س ∈ [−١ ، ٣] هي :

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٥

١٢) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س + ب & ، -٢ \le س \le ١ \\ ٣س^٢ + ب س ، & ١ < س \le ٦ \end{cases}$ وكان $ق'(١)$ موجودة جد قيمة الثابت ب؟

أ) ٣ ب) −١ ج) −٣ د) صفر

١٣) اذا كان $ق(س^٣ - ١) = (س^٢ + ٢)^٣$ ، جد $ق'(٧)$ ؟

أ) ٣٢ ب) ٣٦ ج) ٥٠ د) ٢٥

١٤) اذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة المصفوفة ٢٢أ + ٢٧ب − ٥(أ + ٢ب)؟

ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١٧ & ١٧ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٥١ & -٣٤ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٥١ & ٣٤ \end{bmatrix}$

١٥) اذا كان $\begin{vmatrix} ٢أ & ٢جـ \\ ٤ب & ٤ء \end{vmatrix} = -٨$ ، اوجد $\begin{vmatrix} \frac{٣}{٢}جـ & \frac{٣}{٢}ء \\ ٢أ & ٢ب \end{vmatrix}$

أ) −٣ ب) −١ ج) ١ د) ٣

١٦) اذا كانت زاوية الانعطاف للاقتران $ق(س) = س^٣ + ٣س^٢ + أس$ هي $\frac{٣\pi}{٤}$ ، جد قيمة الثابت أ ؟

أ) −١ ب) ٢ ج) −٢ د) ٣

١٧) اذا كان $(ق \circ هـ)'(٢) = ٢٧$ ، $ق(س) = س^٢ - ٥س$ ، $هـ'(٢) = ٣$ فما قيمة هـ(٢)؟

أ) ٢١ ب) ١٦ ج) ٩ د) ٧

١٨) اذا كان ق(س) كثير حدود له قيمة عظمى محلية عند النقطة (١ ، ٤) ، وكان $هـ(س) = (١ - ق(س))^٣$ ، احدى العبارات التالية صحيحة ؟

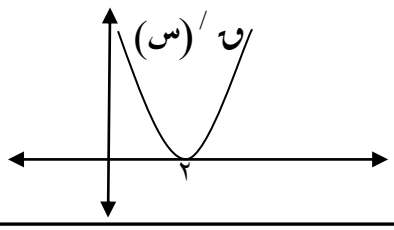
أ) $هـ''(١) > ٠$ ب) $هـ''(١) < ٠$ ج) $هـ''(١) = ٠$ د) $هـ''(١)$ غير موجودة

١٩) اكبر قيمة للاقتران $ق(س) = هـ^{جاس} - جاس$ ، س ∈ $[٠ ، \pi]$ هي

أ) ١ ب) ٢ ج) هـ − ١ د) هـ

٢٠) الشكل المجاور يمثل منحنى $ق'(س)$ للاقتران كثير الحدود ق(س)

فان النقطة (٢ ، ق(٢)) هي




أ) نقطة قيمة قصوى ونقطة انعطاف ب) نقطة حرجة ونقطة انعطاف

ج) نقطة انعطاف وليست نقطة حرجة د) ليست نقطة انعطاف

**السؤال الثاني : (٢٠ علامة )**

أ) ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٢س - ٢ ، -١ \geq س > ١ \\ س^{٢} + ٢س - ٤ ، ١ \geq س \geq ٣ \end{cases}$

على $[-١ ، ٣]$ ، ثم جد قيمة/قيم جـ التي تعينها النظرية ان وجدت ؟ ( ٧علامات )

ب) اذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٢}{س + ١} ، س \neq -١$ ، جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران $ق(س)$ والذي يوازي المستقيم المار بالنقطتين $(٣ ، ٦) ، (١ ، ٢)$ ؟ ( ٧علامات )

ج) حل المعادلة المصفوفية $-٣ \begin{pmatrix} س \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = س$ ( ٦علامات )

---

**السؤال الثالث : (٢٠ علامة)**

أ) اذا كان $ق(س) = ٢ + جتا^{٢} س - جتا ٢س ، س \in [٠ ، \pi]$ ، جد ما يلي :- (١٢ علامات)

١)عين مجالات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س)$ ٢)جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران $ق(س)$ ( ان وجدت)

٣)مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران $ق(س)$ على الفترة $[٠ ، \pi]$

ب) ١) جد قيم س ، ص التي تجعل $[س \quad ص] \cdot \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$ ( ٨ علامات)

٢)اذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ك \\ ٥ & ١+ك \end{bmatrix} ، ب = \begin{bmatrix} -ك & ٢ \\ -١ & -٢ك \end{bmatrix}$ ، جد قيمة ك التي تجعل $|أ + ب| = ٠$

---

**السؤال الرابع : ( ٢٠ علامة)**

أ) قذف جسم رأسيا لأعلى من قمة برج ارتفاعه (٤٠) متر بحيث أن ارتفاعه عن البرج بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة

$ف(ن) = ٤٠ ن - ٥ ن^{٢}$ ، احسب :

١)اقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الارض؟

٢) سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع (١٠٠) متر من سطح الأرض ؟ ( ٨ علامات)

ب) اذا كان $ل = ص^{٢} + ٤ص - ٥ ، ص + س ص = ٦$ ، جد $\frac{د ل}{د س}\Big|_{ص=٢}$ ؟ ( ٥علامات )

ج) اذا كان $ق(س) = ٢س^{٣} - ٩أ س^{٢} + ١٢ أ^{٢} س + ١ ، أ > ٠$ له قيمة عظمى محلية عند $س = ٢$ ، وله قيمة صغرى محلية عند $س = ن$ ، بحيث $٢^{٢} = ن$ ، جد الثابت أ ؟ ( ٧علامات)

---

**القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط**

**السؤال الخامس: ( ١٠ علامات)**

أ)اذا كان $ص^{٢} = \frac{س}{س+١}$ ، اثبت أن $ص' = \frac{ص^{٣}}{٢س^{٢}}$ ( ٤ علامات)

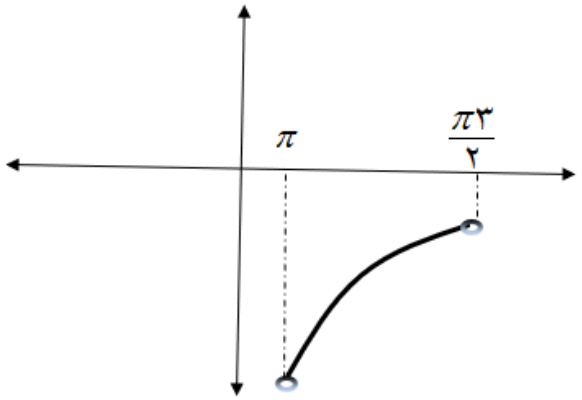
ب) دائرة قطرها $\overline{أب}$ طوله يساوي (٤) سم ، بدأت النقطة (جـ) الحركة على القوس $\overset{\frown}{أب}$ ، من $أ$ باتجاه ب ، جد قياس الزاوية $أ ب جـ$ التي تجعل مساحة المثلث $أ ب جـ$ أكبر ما يمكن ؟ ( ٦ علامات)

---

**السؤال السادس : (١٠علامات)**

أ)باستخدام خصائص المحددات اثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س & ص & -س \\ -س ص & -س^{٢} & س ص \end{vmatrix} = ٢س(ص^{٢} - س^{٢})$ ( ٥علامات)

ب)الشكل المجاور يمثل منحنى $ق(س)$ على الفترة $\left]\frac{٣\pi}{٢}, \pi\right[$




جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران $هـ(س) = \frac{س ظاس}{ق(س)}$

على الفترة $\left]\frac{٣\pi}{٢}, \pi\right[$

(٥ علامات)

---

**انتهت الأسئلة**

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم بيرزيت
الامتحان الموحد

# امتحان نهاية الفصل الأول للعام الدراسي 2021-2022 م

**المبحث : الرياضيات**
**الورقة : -**
الفرع : العلمي
الزمن : ساعتان ونصف
**مجموع العلامات ( 100 ) علامة**
**التاريخ : 27 / 12 / 2021 م**

**ملاحظة : عدد أسئلة الورقة ( ستة ) أسئلة ، أجب عن ( خمسة ) أسئلة منها فقط**

**القسم الأول : يتكون هذا القسم من أربعة أسئلة ، وعلى المشترك أن يجيب عنها جميعها**

**السؤال الأول : انقل رمز الإجابة الصحيحة إلى دفتر الإجابة ( 20 علامة )**

(1) ما قيمة / قيم جـ التي تحددها نظرية رول على الاقتران $ن(س)=جا^{٢}س+\frac{١}{٢}جتا٢س$ في $[٠ ، \pi]$

أ) $\{\frac{\pi}{٦}\}$ ب) $[٠ ، \frac{\pi}{٦}]$ ج) $]٠ ، \frac{\pi}{٦}[$ د) $[٠ ، \frac{\pi}{٦}[$

( 2 ) اذا كان متوسط تغير الاقتران $ن(س)=٣س^{٢}-٢س$ في $[ب ، ٢ب]$ يساوي ١٦ حيث $ب>٠$ فان قيمة الثابت ب هي

أ) ٢ ب) $\frac{١٤}{٩}$ ج) $\frac{٢٢}{٩}$ د) ١

(3) $\lim_{هـ\to٠}\frac{قا^{٢}(٥س+٣هـ)-قا^{٢}(٥س)}{هـ}=$

أ) $٦قا^{٢}٥س ظا٥س$ ب) $١٠قا^{٢}٥س ظا٥س$ ج) $٦قا٥س ظا٥س$ د) $٦قا^{٢}٣هـ ظا٢هـ$

(4) إذا كان $ن(س)=(س^{٢}+٢)هـ(س)$ وكان المماس لمنحنى $هـ(س)$ عند النقطة $(١ ، -٢)$ عموديا على المستقيم الذي معادلته $٤ص+٢س=١$ فما قيمة $ن'(١)$

أ) $-٢$ ب) ١٠ ج) ٢ د) $-٥$

(5) إذا كان $ن(س)=\begin{cases} س^{٢} & ١ \geq س > ٢ \\ ٤س & ٢ \geq س \geq ٣ \end{cases}$ فما عدد النقاط الحرجة

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

6) **اذا كانت أ،ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين بحيث إن : $|أ ب|=١٨ ، |أ|+|ب|=١١$ و كان $|أ| \leq |ب|$ فما قيمة $|أ|$**

**أ) ٢ ب) ٦ ج) ٧ د) ٩**

7) اذا كان $ن(س)=أجا٢س$ وكان $(ن \circ ن')'(\frac{\pi}{٤})=-٣٢$ فما قيمة / قيم الثابت أ

أ) ٢ ب) $-٢ ، ٢$ ج) ٤ د) $-٤$

8) اذا كان $ن(س)=لـو_{هـ}(س-س^{٢})$ فما الفترة التي يكون فيها $ن(س)$ متزايدا على مجاله

أ) $[٠ ، \frac{١}{٢}[$ ب) $]٠ ، \frac{١}{٢}[$ ج) $]١ ، \frac{١}{٢}[$ د) $]١ ، \frac{١}{٢}[$

9) اذا كانت $\begin{bmatrix} ٢س & ١٤ \\ ٦ & -٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ع^{٢} \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ فما قيمة $س + ص$

أ) ٦ ب) ١ ج) ٧ د) ٠

10) **اذا كانت** $ص^{٣} = ن(٢س^{٢} - س)$، $ن'(٦) = ٤$، $ن(٦) = -٨$ **فان** $\frac{د ص}{د س}$ **عندما** $س = ٢$ **هي**

أ) $\frac{٣}{٧}$ ب) $\frac{٧}{٣}$ ج) $\frac{٧}{١٢}$ د) $\frac{١٢}{٧}$

---

**السؤال الثاني : ( 20 علامة )**

**( أ) اذا كان الاقتران** $ن(س) = \begin{cases} ٣ - أس^{٢} & ، -١ \le س < ١ \\ س^{٢} + ب س + ٥ & ، ١ \le س \le ٢ \end{cases}$ **يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على**

**الفترة** $[-١، ٢]$ **فجد الثابتين** $أ، ب$ **ثم جد قيمة / قيم** $جـ$ **التي تحصل عليها من تطبيق النظرية ( 10علامات )**

**( ب )إذا كانت** $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ **حل المعادلة المصفوفية** $(٢س أ)^{-١} = ب$ **( 10 علامات )**

**السؤال الثالث : (25 علامة )**

( أ ) إذا كان $ن(س) = ٢س^{٣} - ٦س^{٢} - ١٨س + ١$ ، $س \in ع$ اوجد **( 10 علامات)**

1 ) مجالات التزايد والتناقص للاقتران $ن(س)$

2 )القيم القصوى المحلية للاقتران $ن(س)$

( ب ) اذا كان $ن(س) = س - ظاس$ ، $س \in \left]-\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right[$ أوجد **( 7 علامات)**

1 ) فترات التقعر للاعلى وللاسفل للاقتران $ن(س)$

2 ) نقط وزوايا الانعطاف للاقتران $ن(س)$ ان وجدت

( ب ) **مقلمة على شكل اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها** $١٩٢\pi$ **سم$^{3}$ فإذا علمت أن سعر كل ١ سم$^{2}$ من البلاستيك المستخدم في صنع القاعدة يساوي ثلاثة أمثال سعر ١سم$^{2}$ من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب. جد أبعاد المقلمة ذات الاقل تكلفة .** **( 8 علامات )**

**السؤال الرابع : (25 علامة )**

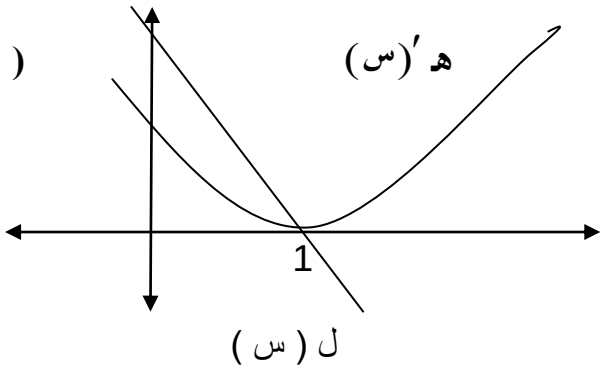
( أ ) استخدم طريقة جاوس في حل النظام الاتي : (9 علامات)

$$\begin{cases} ٣س - ٧ص - ٥ع = ١١ \\ ٤ص + ٢ع + ٢ = ٠ \\ ٧ + ع - ٢س = ٠ \end{cases}$$

(ب ) يتحرك جسم حسب المعادلة $ع^{٢} = \frac{٢}{أ ف} + ع$ اوجد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٢ م / ث **( 8 علامات )**

**( ج ) اذا كان ق(س) اقتران متصل على ح حيث ق′(س) = هـ′(س) × ل(س) بالاعتماد على الشكل المجاور**

**اثبت ان منحنى ق(س) مقعر للاسفل في ]∞،١[** **( 8 علامات )**




**القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين ، وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط**

**السؤال الخامس : ( 10علامات )**

أ ) قذف جسم رأسيا لأعلى من سطح الارض حسب العلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن$^{٢}$ فاذا علمت انه فقد ربع السرعه التي قذف بها وهو على ارتفاع ٣٥م عن سطح الارض اوجد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم ( 5 علامات )

**ب ) بدون فك المحدد اثبت ان** $\begin{vmatrix} أ & -ب & -جـ \\ ب & ١ & ٠ \\ جـ^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = أ + ب^{٢} + جـ^{٣}$ **( 5 علامات )**

**السؤال السادس : ( 10علامات )**

أ ) اذا كان المستقيم ٤ص + س = ٣ يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س^{٢} + جـ}$ ، س > ٠،جـ > ٠ **عند نقطة الانعطاف** $(س_{١}، ص_{١})$ **لمنحنى الاقتران ق(س) اوجد قيمة جـ** **(5 علامات)** .

ب ) اذا كان س = $\sqrt{١ + جتاص}$ . أثبت أن $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{-٢}{\sqrt{٢ - س^{٢}}}$ ( 5 علامات )

********** انتهت الأسئلة **********

| | | |
|---|---|---|
| دولة فلسطين | | مدة الامتحان : ساعتان و نصف |
| وزارة التربية و التعليم | | التاريخ : ٢٠٢١/١٢/١٩م |
| مديرية التربية و التعليم ضواحي القدس | | مجموع العلامات : (١٠٠) علامة |
| نهاية الفترة الاولى و الثانية | | المبحث : رياضيات |

**الامتحان الموحد للثاني عشر العلمي**

**ملاحظة: عدد أسئلة الورقة (ستة ) أسئلة ، أجب عن (خمسة) منها فقط.**

القسم الأول : يتكون هذا القسم من أربعة أسئلة وعلى المشترك ان يجيب عن جميع الأسئلة.

**السؤال الاول: اختر رمز الاجابة الصحيحة ثم انقل الرمز الى ورقة الاجابة . ( ٢٠ علامة)**

١) اذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة $[٩،١]$ يساوي ٥ فما متوسط تغير الاقتران $ل(س) = س^{٢} هـ(٢س + ٥)$ في الفترة $[-٢،٢]$ ؟

أ) ١٠ ب) $-١٠$ ج) ٤٠ د) $-٤٠$

٢) اذا كان $ص = لـو_{هـ}(س^{٢})$ ، $س > ٠$ فما قيمة $ص هـ^{ص}$ ؟

أ) $-٢$ ب) ٢ ج) $-١$ د) ١

٣) اذا كان $هـ(س) = [س] \times |س|$ فما قيمة $هـ'\left(-\frac{٥}{٢}\right)$ ؟

أ) $-٣$ ب) ٣ ج) صفر د) غير موجودة

٤) اذا كان الاقتران ق(س) اقتران متصل على الفترة $[٥،١]$، و له ثلاث نقاط حرجة على مجاله، فإذا علمت أن $هـ'(٢) = ٠$، $هـ'(٣) > ٠$ و كان $هـ'(٢) \times هـ'(٣) < ٠$ ، فأي العبارات الأتية صحيحة دائماً للاقتران ق؟

أ) $(٣، هـ(٣))$ نقطة حرجة للاقتران ق(س) ب) $(٢، هـ(٢))$ نقطة انعطاف.

ج) $(٢، هـ(٢))$ نقطة قيمة عظمى . د) $(٢، هـ(٢))$ نقطة قيمة صغرى.

٥) **ما قيم ا ، ب على الترتيب التي تجعل** $\lim_{س \to ٢} \frac{ا - جتا٢\pi س}{س^{٢} - ٢س} = ب$ ؟

أ) صفر ، ١ ب) ١، صفر ج) $١، \frac{١}{٢}$ د) $١، \frac{١}{٢}$

٦) اذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ ، و كان $س^{٢} = س$، $ص = م_{٢} - س$ فما قيمة $ص^{٢}$ ؟

أ) **س** ب) $م_{٢} - ص$ ج) **س ص** د) **ص**

٧) اذا كانت $\frac{١}{٢}(ا - ب) = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ فما قيمة $(٣ا - ٣)(ب + م_{٢} + ١٤ا) + ٢ب)$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -١ & -٤ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$



لاحظ الصفحة التالية

٨) **اذا علمت أن** $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -١ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ **و كانت** $جـ = أب$ **، فما قيمة** $جـ_{٣٢}$ ؟

أ) ٨ ب) ٤ ج) ١١ د) ٧

٩) ما ميل المماس عند $س = ١$ لمنحنى الاقتران $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٢ & ، \ س < ١ \\ ٥ & ، \ س = ١ \\ ٦س - ١ & ، \ س > ١ \end{cases}$ ؟

أ) ٥ ب) ٦ ج) صفر د) غير موجود

١٠) يتحرك جسيم في خط مستقيم وفق العلاقة $ف(ن) \times ع(ن) = ن$ حيث ف، ع يمثلان المسافة و السرعة على الترتيب ، ن : الزمن بالثواني. فإذا كانت $ع(٢) = ٣$ م/ث فما هو تسارع الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة ؟

أ) $-٨$ م/ث$^{٢}$ ب) ٨ م/ث$^{٢}$ ج) ١٢ م/ث$^{٢}$ د) $-١٢$ م/ث$^{٢}$

## السؤال الثاني : (٢٠ علامة)

أ) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} -س^{٢} + ٣س + أ & ، \ ٠ \leq س \leq ١ \\ بس + ٤ & ، \ ١ < س \leq ٤ \end{cases}$ (٨ علامات )

١) جد قيم $أ ، ب$ اللتان تجعلان ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[٢،٠]$ ؟

٢) قيمة \ قيم جـ التي تحددها النظرية ؟

ب) رُسم مماس وعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق ( س ) = س$^{٢}$ + ٢ عند النقطة ( ٢ ، ٦ ) الواقعة عليه ، فقطعا محور السينات في النقطتين أ ، ب . (٦ علامات )
أوجد مساحة المثلث المحصور بين المماس والعمودي على المماس ومحور السينات ؟

ج) قذف جسم راسيا لأعلى من قمة برج بحيث أن ارتفاعه عن البرج بالأقدام بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^{٢}$ . (٦ علامات

١- جد ارتفاع البرج علما بأن أقصى ارتفاع وصله الجسم عن سطح الأرض $= ٢٥٦$ قدم .

٢- جد سرعة ارتطام الكرة بالأرض.

لاحظ الصفحة التالية

## السؤال الثالث : (٢٠ علامة)

أ) اذا كانت $ص = (٢ع - ٥)^{٤}$ ، $ع = \sqrt{س^{٣} - ٢س + ١٢}$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ٢$ ؟ (٦ علامات)

ب) اذا كان $ن(س) = \sqrt[٣]{س^{٢} + ٧}$ ، وكانت $هـ(٢) = ٢$ ، $هـ'(٢) = ١٢$ . جد (٦ علامات)

$$\lim_{س \to ١} \frac{(هـ \circ ن)^{٢}(س) - ٤}{س - ١}$$

ج) اذا كان $ن(س) = ٢ + جا^{٢}س$ ، $س \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$ (٨ علامات)

١) جد فترات التقعر للاعلى و الاسفل للاقتران ق(س)؟

٢) جد نقاط الانعطاف ان وجدت؟

## السؤال الرابع : (٢٠ علامة)

أ) رُسم للاقتران $ن(س) = أ س^{٢} + بس + ٦$ مماساً عند النقطة $(٢ ، ن(٢))$ فقطع من محور الصادات ٤ وحدات موجبة ، فإذا كان قياس زاوية ميل المماس يساوي $\frac{\pi ٣}{٤}$ . جد قيمة الثابتين أ ، ب ؟ (٧ علامات)

ب) اذا كان $ن(س) = هـ^{جاس + جتاس}$ ، حيث $س \in \left[٠ ، \frac{\pi ٣}{٢}\right]$ : (٧ علامات)

١- جد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)؟

٢- جد نقاط القيم القصوى المحلية و المطلقة منها ان وجدت؟

ج) اذا كان $ن(س) = \sqrt{س^{٢} - ٩}$ ، $س \in [٣ ، ب]$ و كان متوسط تغير الاقتران $ن(س)$ في $[٣ ، ب]$ مساوياً $ن'(٥)$ ، فما قيمة ب ؟ (٦ علامات)



لاحظ الصفحة التالية

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين و على المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط.

## السؤال الخامس : (٢٠ علامة)

أ) جد قيم الثوابت س ، ص ، ع التي تجعل المعادلة المصفوفية الأتية صحيحة؟ (٧ علامات)

$$\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ع & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -ص & ٤ \end{bmatrix} ٣ = \begin{bmatrix} ٢ع & ١ \\ ١ & س \end{bmatrix} ٣ + \begin{bmatrix} ص & ١ \\ ٤ & س \end{bmatrix}$$

ب) اذا علمت أن $ن(س) = \begin{cases} هـ(س) & ، \ ٠ \leq س < ٢ \\ ٣س^{٢} - ٢ & ، \ ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ (٦ علامات)

و كان ق(س) يحقق نظرية القيمة المتوسطة في $[٠ ، ٤]$ ، وكان هـ(س) يحقق شروط نظرية رول في $[٠ ، ٢]$ ، أثبت أنه يوجد $جـ \in ]٠ ، ٤[$ بحيث $هـ'(جـ) = ٩$ ؟

ج) مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٦ سم ، وارتفاعه ٨ سم ، يراد اقتطاع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث ويقع كل من الرأسين الآخرين على ساقي المثلث . جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر مايمكن ؟ (٧ علامات)

## السؤال السادس : (٢٠ علامة)

أ) اذا علمت أن $ص^{٢} = ٤ + ٢ جا س جتا س$ أثبت أن $ص ص'' + (ص')^{٢} + ٢ ص^{٢} = ٨$ ؟ (٧ علامات)

ب) جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ١٢ سم ، بحيث ينطبق رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي ؟ (٧ علامات)

ج) اذا كانت $(١ ، ٢)$ نقطة انعطاف أفقي لمنحنى الاقتران $ن(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} + هـ(س)$ ، حيث $هـ(س)$ اقتران قابلاً للاشتقاق على ع ، و كان $ك(س) = هـ^{٢}(س)$ . جد قيمة $ك'(١)$ ؟ (٦ علامات)

انتهت الاسئلة

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم شمال الخليل
مدرسة بيت أولا الثانوية للبنين

الاسم:.....
المادة : رياضيات
الصف : الثاني عشر علمي
التاريخ : ٢٦ / ١٢ / ٢٠٢١ م

يتكون هذا الاختبار من قسمين : القسم الأول اجب عن جميع الأسئلة ، القسم الثاني أجب عن أحد السؤالين

## القسم الأول

**السؤال الأول :** **( ١٨ علامة)**

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

١) إذا كان المستقيم $ص + ٣س + ٢ = ٠$ مماساً لمنحنى $ه(س)$ عند نقطة الانعطاف ، فإن ظل زاوية الانعطاف عند تلك النقطة يساوي :

أ) صفر ب) ١ ج) ٣ د) $-٣$

٢) لتكن $أ = \begin{bmatrix} جا٢س & ١ \\ & \frac{١}{٢} \\ ١ & \end{bmatrix}$ ، $٠ \leq س \leq \pi$ ، فإن قيمة / قيم س التي تجعل المصفوفة ليس لها نظير ضربي هي :

أ) $\left\{\frac{\pi}{١٢} ، \frac{\pi ٥}{١٢}\right\}$ ب) $\left\{\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi ٥}{٦}\right\}$ ج) $\left\{\frac{\pi}{٦}\right\}$ د) $\left\{\frac{\pi}{١٢}\right\}$

٣) إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ١ & س \\ ٤ & ص + ٤ \end{bmatrix}$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & \frac{-١}{٢} \\ س - ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإن $س + ص =$

أ) ٤ ب) ٢ ج) $-٢$ د) $-٤$

٤) إذا كان $ه(س)$ ، $هـ(س)$ معرفين على ح ، وكان $ه(س)$ متزايد على ح ، $ه(س) \neq ٠$ بحيث أن $ه(س) \times هـ(س) = ٧$ ، فإن أحد العبارات التالية دائماً صحيحة :

أ) $هـ(س)$ متزايد على ح ب) $هـ(س)$ متناقص على ح

ج) $هـ(س)$ ثابت على ح د) $ه(س) > هـ(س)$ على ح

٥) إذا كانت $أجـ + بجـ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإن $|أ + ب| =$

أ) صفر ب) ١ ج) $-١$ د) ٩

٦) عند حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام كريمر وجد أن

$أ \times أ_س = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$ ، $أ_س \times أ_ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة ص =

أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) $-١$

٧) إذا كانت $أ ، ب$ مصفوفتان مربعتان ثنائيتان ، وكانت $|أ| = ٤$ ، $|٢أ^{-١} ب| = -٤$ ، فإن $|-٣ب| =$

أ) ٣٦ ب) $-٣٦$ ج) ١٢ د ) $-١٢$

٨) مجموعة قيم س التي يكون للاقتران $\text{هـ}(س) = \sqrt{س^{٢} - ٥س}$ عندها نقاط حرجة هي :

أ) $\{٥،٠\}$ ب) $\left\{٥ ، \frac{٥}{٢}، ٠\right\}$ ج) $\{٠\}$ د) $\{٥\}$

٩) إذا كان $\text{هـ}'(س) = (س^{٢} - ١)^{٣} (س - ٢)^{٤}$ ، فإن الفترة التي يكون فيها $\text{هـ}(س)$ متناقص هي :

أ) $]-\infty ، -١]$ ب) $[-١، ١]$ ج) $[١، ٢]$ د) $[٢ ، \infty[$

---

**السؤال الثاني :** **( ١٢ علامة : ٧ + ٥)**

أ) ليكن $\text{هـ}(س) = س + \frac{١٦}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، أوجد :

١) مجالات التزايد والتناقص لمنحنى $\text{هـ}(س)$

٢) النقاط الحرجة لمنحنى الاقتران $\text{هـ}(س)$

ب) حل المعادلة الآتية : $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ س & -٢ & ١ \\ -١ & ٤ & س+٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -٥ & ٣ \\ ٤ & س+٣ \end{vmatrix}$

---

**السؤال الثالث :** **( ١٤ علامة : ٧ + ٧ )**

أ) إذا كان $\text{هـ}(س) = جتا^{٢}س - ٢جاس$ ، $س \in ]٠ ، \pi[$ ، أوجد :

١) مجالات التقعر لأعلى وأسفل لمنحنى $\text{هـ}(س)$

٢) نقاط الانعطاف لمنحنى $\text{هـ}(س)$ ( إن وجدت )

ب) حل نظام المعادلات الآتي باستخدام طريقة جاوس :

$٢س + ص - ع = ٠$ ، $س - ص - ٦ = -ع$ ، $٢ص + س + ع = ٣$

---

**السؤال الرابع :** **( ١٤ علامة : ٨ + ٦)**

أ) شريط طوله ١٣٠ سم لف مرتين على علبة اسطوانية الشكل لتزيينها ، وخصص ١٠ سم لصنع ربطة التزيين العلوية ، جد طول نصف قطر العلبة وارتفاعها التي تجعل حجمها أكبر ما يمكن . ( انظر الشكل المجاور)

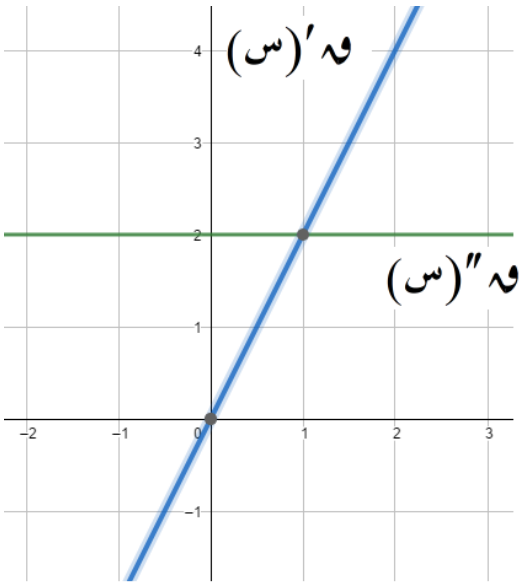
ب) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، حل المعادلة المصفوفية الآتية : $س \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} + ٢س = أ^{٢} + ٣م_{٢}$

## القسم الثاني

أجب عن أحد السؤالين الآتيين :

**السؤال الخامس :** **( ١٢ علامة : ٦ + ٦ )**

أ) إذا كان $\text{ه}(س)$ كثير حدود ، وكانت القيمة الصغرى المطلقة له تساوي ١ ، وكان التمثيل البياني لكل من $\text{ه}'(س)$ ، $\text{ه}''(س)$ موضحاً في الشكل المجاور ، أوجد :




١) قاعدة الاقتران $\text{ه}(س)$

٢) إذا كان $\text{ل}(س) = س^{٣} \text{ه}'(س) + \text{ه}^{٢}(س)$ ، أثبت أن $\text{ل}(س)$ متزايد عندما $س > ٠$

ب) إذا كان $\text{ه}(س)$ كثير حدود من الدرجة الأولى ، وكان $\text{ه}(١) = ١٥$ ، $\text{ه}(٤) = ٣٠$ ، جد قاعدة الاقتران $\text{ه}(س)$ مستخدماً قاعدة كريمر .

---

**السؤال السادس :** **( ١٢ علامة : ٦ + ٦ )**

أ) إذا كان $\text{ه}(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + أس$ ، جد قيمة / قيم الثابت أ التي تجعل $\text{ه}(س)$ متزايد على ح .

ب) باستخدام خصائص المحددات أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س & ص & ع \\ صع & سع & سص \end{vmatrix} = (س - ص)(ص - ع)(ع - س)$

بالتوفيق والنجاح

| دولـــة فلســـطين<br>وزارة التربية والتعليم<br>مديرية التربية والتعليم/ نابلس<br>الامتحان المناطقي الموحد | بسم الله الرحمن الرحيم<br><br>امتحان نهاية الفترة الثانية | المبحث: رياضيات<br>الزمن: ساعتان<br>التاريخ : ١٩ / ١٢/ ٢٠٢١<br>العلامة: ١٠٠<br>الصف :الثاني الثانوي العلمي |
|---|---|---|

| |
|---|
| ملاحظة : عدد أسئلة الامتحان ستة أسئلة و على المشترك الإجابة عن خمسة منها |
| القسم الأول : يتكون هذا القسم من أربعة أسئلة أجب عنها جميعا |

**السؤال الاول: انقل رمز الاجابة الصحيحة مقابل رقم الفقرة في دفتر الاجابة (٢٠ علامة)**

١)عدد النقاط الحرجة للاقتران ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ٩}$ ، س ∈ [−١،٣] هو

أ) ٥ ب) ٤ ج)٣ د)٢

٢) إذا كان ق(س)= هـ$^{س^٢-١}$ ، س ∈ [-١ ، ١ ] فإن أصغر قيمة يتخذها ق(س) هي :

أ) هـ ب)٠ ج) ١ د) $\frac{١}{هـ}$

٣)اذا كان ق/(س) = ١- جا٢س ، س∈ ] ٠ ، π [ فإن نقطة الانعطاف الأفقي لمنحنى ق(س) هي :

أ) ( $\frac{٣\pi}{٤}$ ، ٠) ب) ( $\frac{٣\pi}{٤}$ ، ق( $\frac{٣\pi}{٤}$ )) ج) ( $\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) د) ( $\frac{\pi}{٢}$ ، ق( $\frac{\pi}{٢}$ ) )

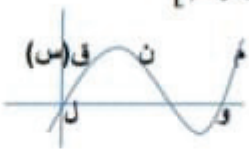
٤)اذا كان ق(س) = س$^٢$ + أس ، س ∈ [٠،٣] و كان ميل المماس عند جـ التي تعينها المتوسطة هو ١ ، فإن قيمة أ =

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) - ٢ ج) ٢ د)- ٦

٥)اذا كان ق/(س) = (١- س$^٢$)$^٣$ ( س-٢)$^٢$ فان ق يكون متزايدا في :

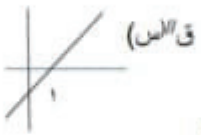
أ) [−١،١] ب) [١،٢] ج)[١،∞[،]−∞،−١] د)[١،٢]،]−∞،−١]

٦)الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) فأي من النقاط تكون عنها اشارة ق/ ، ق// سالبة




أ) ل ب) م ج) ن د) و

٧)الشكل المجاور يمثل منحنى ق//(س) وكان للاقتران نقطة حرجة وحيدة عند س=٢




و كانت ب ∈ مجال ق ، ب ≠٢ فإن

أ) ق(٢) = ق(ب) ب) ق(٢) <٠ ج) ق(٢) < ق(ب) د) ق(٢) >ق(ب)

٨) اذا كانت ب = $\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$ ، | ٣ب|= -١٨ فإن $\begin{vmatrix} ع & ل \\ ع-٣س & ل-٣ص \end{vmatrix}$

أ) ٦ ب) -٦ ج) ٢ د) -٢

لاحظ الصفحة التالية

← يتبع صفحة( ٢ )

**تابع السؤال الأول :**

٩)اذا كانت $\begin{bmatrix} -٤ & س & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & -٥ \\ س & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ \end{bmatrix}$ فإن س =

أ) - ٢ ب)-١ ج) ١ د)٢

١٠ ) إذا كانت ب ، جـ مصفوفتين مربعتين من نفس الرتبة و كانت جـ= $(\frac{١}{٢}$ ب$)^{-١}$ فإن ب . جـ =

أ ) - $\frac{١}{٢}$ م ب) -٢م ج) $\frac{١}{٢}$ م د) ٢م

---

**السؤال الثاني ( ٢٠ علامة)**

أ ) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٢س ، & ٠ \leq س < ٢ \\ ٢س - ٤ ، & ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$ جد :

١)فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق (٨علامات)

ب) باستخدام القيم القصوى أثبت أن المقدار ٤س$^٣$ – س$^٤$ -٢٩ سالب دائما (٥علامات)

جـ) عند حل معادلتين باستخدام كريمر كانت س =٢ ، $|أ_س| + ٤|أ_س| = ١٠$ ، وكانت $|٤أ_س| = ٦٤$ جد قيمة ص

( ٧علامات)

---

**السؤال الثالث:(٢٠ علامة)**

أ)اذاكان ق(س) = جا$^٢$س – جاس ، بين باستخدام نظرية رول أن للاقتران قتران ق(س) مماسا افقيا واحدا على الاقل في ]٠،$\pi$[ ، ثم جد قيمة جـ التي تعنيها النظرية (١٠ علامات)

ب)حل النظام التالي باستخدام طريقة جاوس

٤أ + ٥ب+جـ = ١٤

أ + ٣ب + ٢جـ = ٧ (١٠ علامات)

ب + ١٠أ = ١٢

لاحظ الصفحة التالية

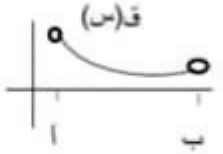
← يتبع صفحة(٣)

**السؤال الرابع : ( ٢٠ علامة )**

أ ) ا)اذا كان $س^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ جد ع التي تحقق $ع^{-١} \times س = ص$ (١٠ علامات)

ب)اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س ) المعرف على] أ ، ب[

و كان ل/ (س) = $\frac{هـ^{س}}{ق(س)}$ جد فترات التقعر لمنحنى ل(س)




(١٠ علامات)

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى الطالب الاجابة عن سؤال واحد منهما فقط

**السؤال الخامس: (٢٠ علامة)**

أ ) استخدم خصائص المحددات في إثبات أن $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ب \\ ١-ب & ب & ب-١ \\ ب & -ب & ١ \end{vmatrix} = ١ - ب^{٢}$ (١٠ علامات)

ب) ق(س) اقتران كثير حدود له نقطة انعطاف عند س=٢ و معادلة المماس عندها هي ص= جـ س +٦ و قياس زاوية الانعطاف عندها $\frac{\pi ٣}{٤}$ جد نهـا $\frac{ق^{٢}(س) \cdot ق/(س)+١٦}{س^{٢} - ٤}$ (١٠علامات)

س ← ٢

---

**السؤال السادس: (٢٠ علامة)**

ب) إذا كان ق (س)= لـــو$_{هـ}$ ( س + $\frac{١}{س}$ ) ، س ∈ [أ ، ب] ، أ ، ب > ٠

استخدم نظرية القيمة المتوسطة في إثبات أن $\frac{لـــو_{هـ}(\frac{أ ب^{٢} + أ}{أ^{٢} ب + ب})}{ب - أ} = \frac{حـ^{٢} - ١}{حـ^{٣} + جـ}$ حيث جـ هي التي تعينها المتوسطة (١٠ علامات)

ب) مستقيم يمر بالنقطة (١، ٢) ويقطع محوري السينات والصادات في النقطتين أ ،ب جد أصغر مساحة ممكنة للمثلث و أ ب الواقع في الربع الاول حيث و نقطة الأصل (١٠علامات)

انتهت الأسئلة

الصف الثاني ثانوي علمي - رياضيات
امتحان نهاية الفصل الأول

التاريخ : ١٩ / ١٢ / ٢٠٢١ م
مدة الامتحان : ساعتان ونصف

**القسم الأول : يتكون من أربعة أسئلة وعليك الإجابة على جميعها**

**السؤال الأول (٢٦ علامة): اختاري رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :**

١. إذا كان $ق(س) = ٨(\text{لو}_{هـ} س) + س^{٢}$ .جد قيمة/قيم $س$ التي تجعل المماس لمنحنى $ق$ $(س)$ أفقيا؟

أ) ٤ ب) ٢ ج) - ٢ د) $\pm ٢$

٢. إذا كان $ق'(س) = (س^{٢} - ١)^{٣} (س - ٢)^{٤}$ وكان $ق(س)$ اقتران متصل على $[٠ ، ٣[$ ما عدد النقاط الحرجة للاقتران $ق(س)$ :

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٥

٣. إذا كان $(أ - ب)^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فما قيمة $٢أ - ٣(ب + ٤أ) + ٢ب$ :

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

٤. الشكل المجاور يمثل منحنى $ق'(س)$ . ما قيمة ظل زاوية الانعطاف لمنحنى الاقتران $ق(س)$ :

أ) صفر ب) ٢ جـ) ٤ د) ٥

٥. إذا كان للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى محلية عند $(٢ ، ٣)$ . وكان $هـ(س) = (١ - ق(س))^{٢}$ .فإن للاقتران $هـ(س)$

أ) قيمة صغرى محلية عند $(٢ ، -٨)$ ب) قيمة عظمى محلية عند $(٢ ، -٨)$

جـ) قيمة صغرى محلية عند $(٢ ، ٨)$ د) قيمة عظمى محلية عند $(٢ ، ٨)$

٦. ما قيمة $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{(\text{لو}_{هـ}(س+١))^{٢}}{س^{٢}}$

أ) ٢ ب) ١ جـ) صفر د) $\frac{١}{٤}$

٧. إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ١ \\ ص & ٣ \end{bmatrix}$ . $ب = \begin{bmatrix} ص - ٤ & ١ \\ س & ٣ \end{bmatrix}$ حيث $أ = ب$ . فإن قيمة $(س - ص)$ التي تجعل $أ$ منفردة :

أ) ٦ ب) ١٢ جـ) -٦ د) -١٢

٨. إذا كان $ق(س)$ كثير حدود معرف على ح . $ق'(١) = ٠$ . $ق''(١) \times ق''(٣) < ٠$ . وكان $ق'(س)$ متناقص في $[٢ ، ٤]$ . فإن النقطة $(١ ، ق(١))$ هي بالنسبة للاقتران $ق(س)$ :

أ) صغرى محلية ب) نقطة انعطاف جـ) عظمى محلية د) لايمكن تحديدها

٩. قذف جسم رأسياً للأعلى من سطح الأرض بحيث ارتفاعه بالأمتار عن نقطة قذفه يعطى حسب العلاقة $ف(ن) = أ ن - ٥ن^{٢}$ إذا علمت أن سرعة الجسم أثناء صعوده و بعد مرور ٦ ثواني تساوي نصف سرعته الابتدائية . فإن قيمة $أ$ :

أ) ١٢٠ ب) ٦٠ جـ) ٤٠ د) ٣٠

**القسم الأول : يتكون من أربعة أسئلة وعليك الإجابة على جميعها**

**السؤال الأول (٢٦علامة): اختاري رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :**

١. إذا كان ق(س) = ٨(لو س) + س$^{٢}$ .جد قيمة/قيم س التي تجعل المماس لمنحنى ق(س) أفقيا؟

أ) ٤ ب) ٢ ج) - ٢ د) ±٢

٢. إذا كان ق'(س) = (س$^{٢}$ - ١)$^{٣}$ (س - ٢)$^{٤}$ وكان ق(س) اقتران متصل على [٠ ، ٣[ ما عدد النقاط الحرجة للاقتران ق(س) :

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٥

٣. إذا كان (أ - ب)$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فما قيمة ٢أ١ - ٣(ب + ٤أ) + ٢ب :

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ \frac{-١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{١}{٢} & -١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

٤. الشكل المجاور يمثل منحنى ق'(س) . ما قيمة ظل زاوية الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) :

أ) صفر ب) ٢ جـ) ٤ د) ٥

٥. إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٣) . وكان هـ(س)= (١ - ق(س))$^{٢}$ .فإن للاقتران هـ(س)

أ) قيمة صغرى محلية عند (٢ ، -٨) ب) قيمة عظمى محلية عند (٢ ، -٨)

جـ) قيمة صغرى محلية عند (٢ ، ٨) د) قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٨)

٦. ما قيمة نهـا $\frac{(\text{لو}(س+١))^{٢}}{س^{٢}}$ ، س ← ٠

أ) ٢ ب) ١ جـ) صفر د) $\frac{١}{٤}$

٧. إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س & ١ \\ ص & ٣ \end{bmatrix}$ . ب = $\begin{bmatrix} ص & -٤ \\ س & ٣ \end{bmatrix}$ حيث أ = ب . فإن قيمة (س ص) التي تجعل أ منفردة :

أ) ٦ ب) ١٢ جـ) -٦ د) -١٢

٨. إذا كان ق(س) كثير حدود معرف على ح . ق'(١) = ٠ . ق''(١) × ق''(٣) < ٠ . وكان ق'(س) متناقص في [٢ ، ٤] . فإن النقطة (١ ، ق(١)) هي بالنسبة للاقتران ق(س) :

أ) صغرى محلية ب) نقطة انعطاف جـ) عظمى محلية د) لايمكن تحديدها

٩. قذف جسم رأسياً للأعلى من سطح الأرض بحيث ارتفاعه بالأمتار عن نقطة قذفه يعطى حسب العلاقة ف(ن) = أن - ٥ن$^{٢}$ إذا علمت أن سرعة الجسم أثناء صعوده و بعد مرور ٦ ثواني تساوي نصف سرعته الابتدائية . فإن قيمة أ :

أ) ١٢٠ ب) ٦٠ جـ) ٤٠ د) ٣٠

١٠) قيمة / قيم جـ التي تحددها نظرية رول للاقتران ق(س) = لـو (س + $\frac{١}{س}$) في الفترة [$\frac{١}{٤}$ ، ٤] هي :

أ) ١ ب) ±١ جـ) ٢ د) ٣

١١) إذا كان ق(س) = ٢ظا س . هـ(س) = $\frac{١}{١ + س^{٢}}$ وكان (هـ° ق)′($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{٨}{٢٥}$ جدي قيمة الثابت أ :

أ) -١ ب) ١ جـ) ٢٥ د) -٢٥

١٢) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{هـ^{جاس}}$ . س ∈ [٠ ، π] . في أي الفترات التالية يكون ق(س) متزايد :

أ) [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ب) [٠ ، $\frac{\pi}{٣}$] جـ) [$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi ٣}{٤}$] د) [π ، $\frac{\pi}{٢}$]

١٣) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ . ب مصفوفة من الرتبة ن × ك . وكان أ . ب = م$_{٢}$ . فما قيمة المقدار أن + ك :

أ) ٦ ب) ٧ جـ) ٨ د) ٩

## السؤال الثاني : ( ٢٠ علامة )

أ) ( ١٤ علامة ) إذا كان ق(س) = س(٤ - س)$^{٢}$ حيث س ∈ [-١ ، ٥] جدي :

١) مجالات التزايد والتناقص
٢) القيم القصوى محددة نوعها
٣) مجالات التقعر
٤) نقط الانعطاف

ب) ( ٦ علامات ) إذا كان س جاص = ١ . أثبتي أن $\frac{ص}{س}$ = جتاص - قاص

## السؤال الثالث : ( ٢٠ علامة )

أ) ( ٧ علامات ) إذا كان جـ = $\begin{bmatrix} س & ١ & ١ - س \\ ١ - & ٠ & ٢ \\ س & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ . أ = $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ٢ - & ١ - \\ ٣ - & ٠ \end{bmatrix}$

جدي قيمة س بحيث | أجـ | - ٣ = | ٣ أ ب$^{-١}$ |

ب) ( ٨ علامات ) جدي معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ٢ س$^{٢}$ - ٢ س ص + ص$^{٢}$ - ١ = ٠ .
عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم س + ص = ٢

جـ) ( ٧ علامات ) ليكن ق . هـ اقترانين حيث ق(س) + هـ(س) = ٠ . هـ(س) - ق(س) = ٠ . وكان ق(س) ، هـ(س) > ٠ . وكان ع(س) = $\frac{هـ(س)}{ق(س)}$ . أثبتي أن ع (س) متزايد على مجاله .

**السؤال الرابع : (٢٠ علامة )**

أ) **( ٧ علامات )** إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ . $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ أوجدي المصفوفة $س$ علماً أن :

$|أ^{-١}| س - ب س = أ^{٢}$

ب) **( ٧ علامات )** قذف جسم رأسياً إلى أعلى من سطح برج ارتفاعه ٢٢٥ م بحيث أن بعده عن قمة البرج يعطى بالعلاقة $ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢}$ . جدي :

١. أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض

٢. سرعة الجسم عندما يكون قطع مسافة ٣٦٠ م

جـ) **( ٦ علامات )** جدي حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤سم وارتفاعه ١٢سم بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي

**القسم الثاني : يتكون من سؤالين وعليك الإجابة على سؤال واحد فقط**

**السؤال الخامس : (١٤ علامة )**

أ) **( ٧ علامات )** إذا كان $٣ د(س) = د(٣س - ١) + د(٦ - س^{٢}) - ٢$ . وكان $د(٥) = ٤$ . جد متوسط تغير الاقتران $د(س)$ في الفترة $[١، ٥]$ حيث الاقتران $د(س)$ معرف في الفترة $[١، ٥]$ ؟

ب) **( ٧ علامات )** دون فك المحدد أثبتي أن :

$$\begin{vmatrix} ١ & ١- & ب \\ ١-ب & ب & ب-١ \\ ب & -ب & ١ \end{vmatrix} = ١-ب^{٢}$$

**السؤال السادس : (١٤ علامة )**

أ) **( ٨ علامات )** إذا كان $د(س) = \begin{cases} هـ(س) & ، ٠ \leq س < ٢ \\ ٣س^{٢} - ٢ & ، ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ وكان $د(س)$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[٠ ، ٤]$ . $هـ(س)$ يحقق نظرية شروط نظرية رول في $[٠ ، ٢]$ . أثبتي وجود $جـ \in ]٠ ، ٤[$ بحيث $هـ'(س) = ٩$

ب) **( ٧ علامات )** إذا كان $س = جتا(٣ن) + \frac{١}{٢}$ . $ص = جا(٣ن) + \frac{١}{٢}$ . فجدي $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ عند $ن = \frac{\pi}{٦}$ .

**انتهت الأسئلة .. أمنياتي لكن بالتوفيق**

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم / يطا

الصف: الثاني عشر العلمي
التاريخ: الأحد ٢٠٢١/١٢/٢٦ م
مجموع العلامات ( ١٠٠ )

امتحان نهاية الفترة الأولى الثانية (الرياضيات) الزمن: ساعتان

**ملاحظة: عدد الأسئلة ستة أسئلة وعلى الطالب أن يجيب عن خمسة أسئلة فقط**

**القسم الأول: يتكون هذا القسم من أربعة أسئلة على المشترك أن يجيب عنها جميعاً**

**السؤال الأول: (٢٠ علامة)**

**يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات من اختيار من متعدد، من أربعة بدائل، اختر رمز الإجابة الصحيحة، ثم ضع إشارة (×) في المكان المخصص في دفتر الإجابة:**

١. إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، جـ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٥، فما رتبة المصفوفة (ب) حيث أ × ب = جـ؟

أ) ٢ × ٣ ب) ٣ × ٥ ج) ٥ × ٢ د) ٢ × ٥

٢. إذا كانت $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & ١- \\ س & ٤- \end{vmatrix} = ٧$، فما قيمة ص ، س على الترتيب؟

أ) ٥ ، ٣ ب) ٣ ، ٥ ج) ١ ، ٤ د) ١ ، ٢

٣. إذا كان ن(س) = س $^{٢}$ |س|، ما العبارة الصحيحة فيما يأتي؟

أ) ن(٠) قيمة عظمى محلية ب) ن(٠) قيمة صغرى محلية ج) (٠ ، ٠) نقطة انعطاف د) ن$'$(٠) غير موجودة

٤. ما أقل قيمة للمقدار س$^{٣}$ − ٣س في الفترة [− ٣ ، ١]؟

أ) − ٣٦ ب) − ٣ ج) − ١٨ د) − ٢

٥. إذا كان ((س − ص) $^{٢}$ = ٤)، فما قيمة ($\frac{ص}{س}$) عند (ص = − ١ ، س > ٠)؟

أ) − ٢ ب) − ١ ج) ١ د) ٢

٦. إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى ص = $\frac{أ}{س}$ عند نقطة التماس هي ص = أس، فما قيمة / قيم أ؟

أ) ٢ ب) ١ ج) ± ١ د) − ١

٧. إذا كانت (ن ∘ هـ$^{-١}$)$'$ (٢) = − ٦، وكان هـ(س) = س $^{٢}$ − س، فما قيمة ن$'$ (٣)؟

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) ٢ د) − ٣

٨. إذا كانت ص$^{٣}$ = ن(٤س $^{٢}$ − س) ، ن$'$ (٥) = ٤ ، ن(٥) = − ٨، فما قيمة $\frac{ص}{س}$ عندما س = − ١؟

أ) − ٦ ب) ٣ ج) ٦ د) − ٣

٩. إذا كانت ن(س) = $\frac{س^{٢} - ٢س + ١}{س^{٢}}$، فان ق(س) متناقص على الفترة؟

أ) ]− ∞ ، ١[ ب) ]١ ، ∞[ ج) [٠ ، ١] د) ]٠ ، ١[

١٠. إذا كان لـو$_{هـ}$ ص = ١ + لـو$_{هـ}$ س، حيث س ، ص > ٠، فما قيمة $\frac{ص}{س}$، حيث هـ العدد النيبيري؟

أ) صفر ب) هـ ج) $\frac{س}{ص}$ د) ١ + هـ

**السؤال الثاني: (٢٠ علامة)**

أ) **إذا كان** $ن(س) = جا\frac{س}{٢} + \frac{١}{٢}جتاس$ ، $س \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$ أجد كل مما يأتي: **(١٠ علامات)**

١. فترات التزايد والتناقص للاقتران $ن(س)$. ٢. القيم القصوى وبين نوعها.

ب) **إذا كان** $ن(س) = (س^{٢} - ١)(س - ١)^{٢}$ ، $س \in ]-١ ، ٥[$، أجد كل مما يأتي: **(١٠ علامات)**

١. فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران $ن(س)$. ٢. نقطة الانعطاف للاقتران $ن(س)$، إن وجدت.

**السؤال الثالث: (٢٠ علامة)**

أ) **إذا كانت قيمة** $\begin{vmatrix} س & ص & ع+٢ \\ س & ص+٢ & ع \\ س+٢ & ص & ع \end{vmatrix} = -٤$، استخدم خصائص المحددات لإيجاد قيمة المقدار $س + ص + ع$. **(١٠ علامات)**

ب) إذا كان المستقيم المار في النقطتين $(٠ ، -١)$ ، $(١ ، ب)$ ، مماساً لمنحنى $ن(س) = ٢س^{٢} - ٥س + ٧$، أجد قيمة / قيم $(ب)$. **(١٠ علامات)**

**السؤال الرابع: (٢٠ علامة)**

أ) إذا كان $(س - ص)^{٥} = س^{٢}$، أثبت أنّ $ص` = \frac{٣س + ٢ص}{٥س}$. **(١٠ علامات)**

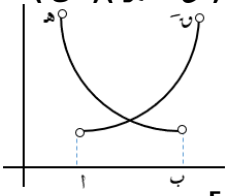
ب) جد النقطة / النقط الواقعة على منحنى العلاقة $ص^{٢} - ٢ص - س^{٢} = ١١$، والتي تكون أقرب ما يمكن من النقطة $(٤ ، ١)$. **(١٠ علامات)**

**القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما.**

**السؤال الخامس: (٢٠ علامة)**

أ) من قمة برج أسقط جسم رأسياً للأسفل بحيث أن المسافة التي يقطعها $ف = ٥ن^{٢}$، وفي نفس اللحظة قذف جسم رأسياً للأعلى من الأرض، بحيث أن ارتفاعه عن نقطة القذف $ف_{١} = ١٨ن - ٥ن^{٢}$، إذا قطع الجسم الأول $(\frac{٢}{٣})$ ارتفاع البرج عندما وصل الجسم الثاني إلى أقصى ارتفاع له عن سطح الأرض، وكانت المسافة بينهما في تلك اللحظة (٤٠) متراً، جد ارتفاع البرج. **(١٢ علامة)**

ب) الشكل المجاور يمثل منحنى كل من $ن`(س)$ ، $هـ(س)$، ابحث في تقعر الاقتران $ك(س) = (ن \circ هـ)(س)$ في $]أ ، ب[$. **(٨ علامات)**




**السؤال السادس: (٢٠ علامة)**

أ) **إذا كان** $ن(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} + أ}{س - ٢} & ، س < ٢ \\ ب س^{٢} + ﺟ & ، س \geq ٢ \end{cases}$، يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[١ ، ٣]$ جد.

١. الثوابت أ، ب، ﺟ. ٢. قيمة **ﺟ** التي تعينها النظرية. **(١٢علامة)**

ب) إذا كان $ن(٩ - س^{٢}) = ن(٢س + ١) - ن(س) + ٢$، وكان متوسط تغير $ن(س)$ في $[٢ ، ٣]$ يساوي $-٤$،أجد ق(٧) علما أن ق(٠)=ق(٣). **(٨ علامات)**

**انتهت الاسئلة**

القسم الأول : يتكون من أربعة أسئلة أجب عنها جميعاً

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي: (٢٤ علامة)

١) إذا كان ق(س، ١) = س٣ + ٣س + ب ، فما متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [-١، ٢]

أ) -٣ ب) -١ جـ) ١ د) ٢

٢) ما أكبر قيمة للاقتران ق(س) = $\frac{٣}{س^٢ + ١}$ ؟

أ) ١٠ ب) صفر جـ) ٣ د) ٢

٣) النقطة (٠، ١) هي نقطة انعطاف لمنحنى أحد الاقترانات التالية :

أ) ق(س) = س٣ + ١٠ ب) هـ(س) = ١ - س٣

جـ) ل(س) = س٣ + ١ د) س٢ + ١

٤) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ فإن أ٢٠٠ + (أ)٢٠٠

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١٠٠٥ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ١٠٠٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١٠٠٠ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١٥٠٠ & ١ \end{bmatrix}$

٥) $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{جا^٢(س + ٢هـ) - جا^٢س}{٣هـ}$

أ) ٢ جا٢س ب) $\frac{١}{٣}$ جتا٢س جـ) جاس جا٢س د) جتا٢س

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س & ٠ \leq س < ١ \\ س^٢ + ١ & ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في [٠، ٢] فإن قيمة جـ التي تحققها النظرية

أ) $\frac{٤}{٥}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{٥}{٤}$

٧) إذا كان لمنحنى الاقترانين ق(س) = ٢س٣ + ١ ، هـ(س) = ٣س٢ + ب س مماساً مشتركاً عند س = ١ ، فما قيمتي ٢ ، ب على الترتيب

أ) ٣ ، ٢ ب) ٣ ، ٤ جـ) ٢ ، ٣ د) غير ذلك

٨) عند حل نظام من معادلتين خطيتين بقاعدة كريمر وُجد أن $أ_س = \begin{pmatrix} ٨ & -٢ \\ -٥ & ١ \end{pmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{pmatrix} ٣ & ٨ \\ -٢ & -٥ \end{pmatrix}$ فإن قيمتي س ، ص على الترتيب

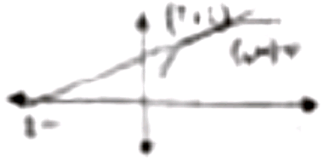
أ) ٢ ، ١ ب) -٢ ، -١ جـ) -١ ، ٢ د) ٢ ، -١

٩) إذا كانت س ، ص ، ع ثلاث مصفوفات من الرتبة الثانية ، |ع| ≠ ٠ ، فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً

أ) إذا كانت س × ص = ص × ع فإن س = ص ب) إذا كانت س × ص = و فإن س = و أو ص = و

جـ) $س^٢ - ص^٢ = (س - ص)(س + ص)$ د) $|(٢ع)^{-١}| = \frac{١}{٤|ع|}$

١٠) من الشكل المجاور الذي يمثل الاقتران ق(س) ، إذا كانت ص = $ق^٢(س)$ + س فإن $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٤ هي




أ) -٤ ب) ١ جـ) ٢ د) -٢

١١) إذا كانت ص = $\sqrt{س^٢ + ٢^٢}$ فإن ص × $ص^{-١}$ =

أ) س ب) ٢س جـ) $\frac{س}{٢}$ د) ص

١٢) إذا كان ق(س) = ٥ × $٢^{س}$ فإن $ق^{-١}(٢)$ =

أ) ٢٠ ب) ١٠ جـ) ٤٠ د) ٦٠

---

**السؤال الثاني:** أ) باستخدام طريقة جاوس حل النظام التالي (٢٠ علامة)

س + ص + ع = ١ ، س - ص + ع = ٤ ، س - ص - ع = -١

ب) إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية والمار بنقطة الأصل يحقق شروط نظرية رول على الفترة [٠ ، ٤] وله قيمة صغرى قيمتها = -٤ ، جد قاعدة الاقتران ق(س)

ج) إذا كان ق(س) = $(س + ٦)^٢(س - ٢)$ جد مجالات التقعر و نقطة / نقاط وزوايا الانعطاف للاقتران ق(س)

---

**السؤال الثالث:** أ) إذا كان ق(س) = $جا^٢(\frac{س}{٢})$ + جتاس ، س ∈ [٠ ، ٢π] جد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى مبيناً نوعها (٢٠ علامة)

ب) إذا كان $س^٢ \times ص^{-١} = (س + ص)^{-١}$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{س}$

ج) إذا كانت $ب^{-١} = \begin{pmatrix} ٥ & س \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ٢ب = $\begin{pmatrix} -٦ & ٢س \\ ٨ & -١٠ \end{pmatrix}$ فجد المصفوفة من بحيث أن :

$-س + ٤(ب\,ب^{-١})^{-١} = ب \times \begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ -٢ & ٥ \end{pmatrix}$

**السؤال الرابع:** أ) إذا كان ق(س) = أ جاس ، هـ(س) = $\frac{٣س}{س^٢ + ١}$ وكان $(هـ \circ ق)^{-}(\frac{\pi}{٦})$ = صفر . (٢٠ علامة)

جد قيمة الثابت أ ، حيث أ ≠ ٠

ب) قذف جسم رأسياً إلى أعلى من قمة برج بحيث أن ارتفاعه عن قمة البرج معطى بالعلاقة ف = ٣٠ن − ٥ن$^٢$

، حيث ف الارتفاع بالأمتار ، ن الزمن بالثواني جد :

١) ارتفاع البرج علماً أن أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض = ٢٨٠ م .

٢) سرعة ارتطام الجسم بالأرض

ج) إذا كانت س = $\begin{pmatrix} جا^٢س & \frac{١}{٢}جا٢س \\ \frac{١}{٢}جا٢س & جتا^٢س \end{pmatrix}$ وكانت ص = م − س ، أثبت أن ص$^٢$ = ص

---

**القسم الثاني:** يتكون من سؤالين أجب عن أحدهما

**السؤال الخامس:** أ) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية إحداثيات رؤوسه أ(٥ ، ٠) ، ب(٠ ، ٠) ، ج(٠ ، ٥) ، (١٦ علامة)

رسم بداخله مستطيل ينطبق رأسان من رؤوسه على الضلع ب جـ وأحد رأسيه الآخران على الضلع أ جـ

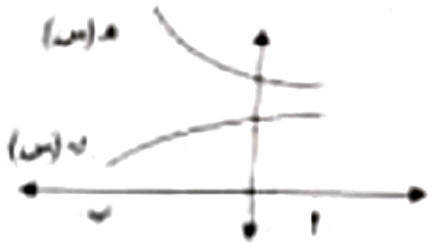
والرأس الآخر على المنحنى ص = س$^٢$ ، جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل

ب) حل المعادلة المصفوفية الآتية ٣س + س$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} \frac{١٣}{٢} & \frac{١٥}{٢} \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ علماً أن $|(٢س)^{-١}| = \frac{٦}{٨}$

---

**السؤال السادس:** أ) في الشكل المجاور الذي يمثل ق(س) ، هـ(س) في [أ ، ب] أثبت أن (١٦ علامة)

٦ (ق(س) × هـ(س))$^{-}$ > (ق$^٢$(س))$^{-}$ + (هـ$^٢$(س))$^{-}$




ب) باستخدام خصائص المحددات أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ب & أ & أ \\ أ & ب & أ \\ ب & أ & ب \end{vmatrix} = (ب - أ)^٢ (أ + ب)$$

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي
مديرية التربية والتعليم/ شمال غزة
الفترة الصباحية

امتحان نهاية الفترة الدراسية الثانية لمبحث الرياضيات
للعام الدراسي ٢٠٢١/٢٠٢٢
للصف الثاني عشر علمي

٨٠

التاريخ : ٢٧ / ١٢/ ٢٠٢١
الزمن : ساعة ونصف

اسم الطالب: .....
اسم المدرسة : .....

ملاحظة :عدد أسئلة الورقة (خمسة) أسئلة ، أجب عن (ثلاثة) منها فقط

القسم الأول : يتكون هذا القسم من (ثلاثة) أسئلة ، وعلى المشترك أن يجيب عن سؤالين منها على أن يكون السؤال الأول منها.

**السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة (١٨ علامة)**

١) إذا كان ميل المستقيم القاطع الواصل بين (٢ ، ق(٢)) و (٥، ق(٥)) الواقعتين على منحنى ق(س) = س$^{٢}$ + ب س يساوي ٤ ، فما قيمة الثابت ب؟

أ) -٣ ب) ٣ جـ) -٧ د) ٧

٢) إذا كان ص = س + [س + ١,٢] + $\sqrt{س^{٢}}$ ، فما قيمة $\frac{ص}{س}$ عندما س = -١؟

أ) غ.م ب) ١ جـ) ٢ د) صفر

٣) إذا كان ص = ل$^{٢}$ ، (س + ل)$^{٢}$ = ٤، فجد $\frac{ص}{س}$ عندما س = صفر ، ل > ٠؟

أ) -٣ ب) -٢ جـ) -٤ د) -١

٤) إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ - ٤، فإن قيمة (ق ∘ ق)$'$(١) = .....

أ) ٢٥ ب) ١٠٠ جـ) ٥٠ د) -٥٤

٥) ما قيمة $\frac{ص}{س}$ لمنحنى العلاقة س = ظا(ص)، عند س = ٢؟

أ) $\frac{١}{٥}$ ب) ٥ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٦) إذا كان ق(س) اقتران متصل على [-١، ٣] ، وكانت ق$'$(س) = $\frac{(س-١)^{٣}}{(س-٢)^{٢}(س+١)}$ ، فإن عدد النقاط الحرجة للاقتران ق(س) هي.....

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٥

٧) إذا كان ق$'$(س) متناقصا على ح ، وكان ق$'$(٢) = ٠، فإن النقطة (٢، ق(٢)) هي:

أ) قيمة صغرى محلية ب) قيمة عظمى محلية جـ) نقطة انعطاف د) ق$'$(٢) = ٠

٨) إذا كان ق(س) = ٣$\sqrt{س^{٢}}$ ، س ∈ [-١، ١]، فإن للاقتران ق قيمة صغرى مطلقة عند ....

أ) (-١ ، ١) ب) (١ ، ١) جـ) (٠ ، ٠) د) (٠ ، ١)

٩) إذا كان المستقيم س - ص + جـ = ٠ يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{-١}{س}$ عند النقطة (س ، ص) ، فإن قيمة الثابت جـ تساوي.....

أ) ١ ، -١ ب) ١، -٢ جـ) ٢، -٢ د) ٢، -١

اقلب الصفحة

**السؤال الثاني : (٣٧علامة)**

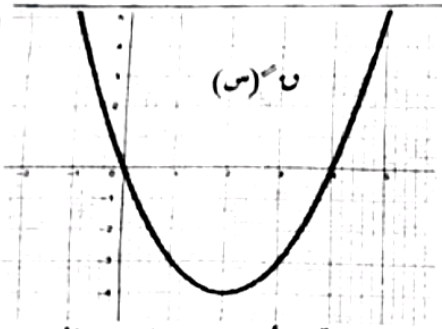
أ) ق(س) كثير حدود معرف على ح من الدرجة الثالثة ق(س) + ق″(س) = س$^{٣}$ + ٦س$^{٢}$ − ٣س + ٢، جد القيم القصوى المحلية وفترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)؟ (١٧علامة)

ب) إذا كان ق′(٢س) = (١ + س)هـ$(\frac{٢}{س})$، جد معادلة العمودي على منحنى الاقتران ق(س) عند $(٤، \frac{١}{٤})$ علمًا بأن معادلة المماس لمنحنى هـ(س) عند س = ١ هي ص = ١ + ٤س ؟ (١٠علامة)

ت) إذا كان ق(س) كثير حدود، وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{ق(س)} - ٢}{٢س - ٢} = ٥$ ، ك(س) = $\frac{س^{٢}}{ق(س)}$، جد ك′(١)؟ (١٠علامة)

---

**السؤال الثالث : (٣٧علامة)**




أ) الشكل المجاور يمثل منحنى ق″(س) إذا علمت أن ق(س) اقتران كثير حدود معرف على ح له ثلاث نقاط حرجة عند س = −٢، ٢، ٦

جد : مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

فترات التقعر لأعلى ولأسفل ، ونقطة الانعطاف إن وجدت. (١٧علامة)

ب) يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ع$^{٢}$ (ن) = ٦ − $\frac{١}{ف(ن)}$، حيث ف : المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني

جد قيمة الثابت أ علمًا بأن تسارع الجسيم في لحظة انعدام سرعته هي ٩ م/ث$^{٢}$ . (١٠علامة)

ت) إذا كان ق(٢س + ٥) = س$^{٣}$ + ٢س، قابلا للاشتقاق، جد $\lim_{ع \to ١} \frac{ق(ع^{٢} + ٢ع) + ٣}{لو_{هـ} ع^{٢}}$ (١٠علامة)

**القسم الثاني : يتكون من سؤالين وعلى الطالب الإجابة عن أحدهما**

**السؤال الرابع : (٢٥علامة)** ( ٩- ١٠-٦)علامة

أ) بين أن الاقتران ق(س) = س$^{٢}$ − س − ٦ يحقق شروط نظرية رول في [١، ٤]، ثم جد قيمة جـ التي تعينها النظرية.

ب) علبة على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها، فإذا كان مجموع ارتفاعها ومحيط قاعدتها يساوي ٤٥ سم، فأوجد أبعاد العلبة عندما يكون حجمها أكبر ما يمكن؟

ت) إذا كانت ص = (جاس + جتاس)$^{٤}$ ، فأثبت أن ص″ + ٤ص = ٢ اجتا$^{٢}$٢س.

---

**السؤال الخامس: (٢٥علامة)** ( ٩-١٠-٦)علامة

أ) بين أن الاقتران ق(س) = س$^{٣}$ + ١ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في [−٢، ١]، ثم جد قيمة جـ التي تعينها النظرية .

ب) مستطيل محيطه ٣٦ سم ثني ليكون أسطوانة، فأوجد أكبر حجم ممكن للأسطوانة.

ت)إذا كان ص = $\frac{١ - ظاس}{١ + ظاس}$ ، أثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{١ + جا٢س}$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

**السؤال الثالث:** (٢٠ علامة)

أ) جد معادلة المماس المرسوم من النقطة (-٥ ، ٠) لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ . (٨ علامات)

ب) إذا كان ق(س) = ٤س$^{٣}$ - س$^{٤}$ ، س ∈ [-٥،٣] أوجد : (١٢ علامة)

١) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

٢) القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران ق(س).

٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س).

**السؤال الرابع:** (٢٠ علامة)

أ) أثبت باستخدام نظرية بلزانو أن الاقتران ق(س) = جاس + جتاس يقطع محور السينات في الفترة ] $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi ٣}{٢}$ [ ثم جد الإحداثي السيني لنقطة تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات. (٩ علامات)

ب) أجرى سباق بين طريقان متعامدان في هـ طولهما ٩٠٠ متر ، ٧٠٠ متر على الترتيب ، تحرك رجل من أ إلى هـ بسرعة ثابتة ٦م/ث، تحرك رجل آخر من ب إلى هـ بسرعة ٨م/ث بعد تحرك الأول بثانيتين ، جد معدل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه موقعا الرجلين والنقطة هـ بعد ٥ ثواني من تحرك الشخص الأول. (١١ علامة)

**القسم الثاني: يتكون من سؤالين وعلى الطالب الإجابة عن سؤال واحد فقط**

**السؤال الخامس:** (١٠ علامات)

أ) إذا كان س = طاس + قاس أثبت أن س' = ١ - جاس . (٥ علامات)

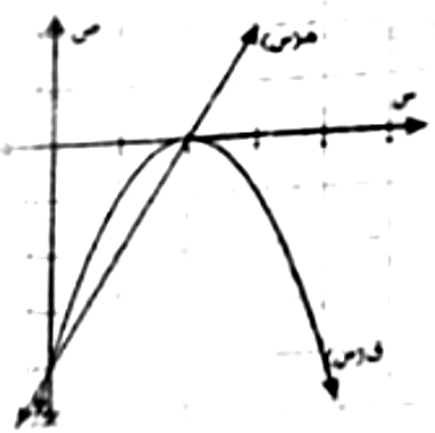
ب) إذا كان ق(س) = ب طاس ، هـ(س) = $\frac{١}{٢س + ١}$ وكان (هـ ∘ ق)'($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{٨}{٢٥}$ ، نهـا ق(س) = ٢ جد قيمة الثابت ب (٥ علامات)

**السؤال السادس:** (١٠ علامات)

أ) سلك طوله ٦٠سم قطع إلى جزأين فكون من كل جزء مستطيل طوله مثلي عرضه جد أقل مساحة ممكنة للمستطيلين. (٥ علامات)

ب) بالاعتماد على الشكل المجاور أثبت أن الاقتران ل(س) = (ق × هـ)(س)

متزايد للأعلى في الفترة ] -∞ ، ٢[ حيث هـ(س) اقتران خطي . (٥ علامات)




**انتهت الأسئلة**

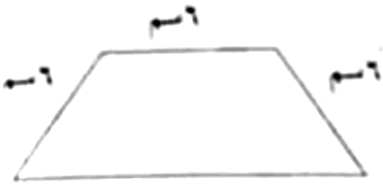
ج) استخدم طريقة جاوس لحل النظام الآتي :
$$\begin{aligned} س - ص + ع &= -٢ \\ س + ٢ص + ع &= ٤ \\ -٢س + ٢ص - ع &= ٣ \end{aligned}$$
( ٦ علامات )

---

السؤال الرابع : ( ٢٠ علامة)

أ) جد قيمة / قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} س & -١ \\ ١ & س \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & س & ٥ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{vmatrix}$ ( ١٠علامات )

ب) شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦سم ، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف .




( ١٠ علامات)

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى الطالب أن يجيب عن سؤال واحد فقط .

السؤال الخامس: ( ١٠ علامات)

أ) إذا كانت س = ظا ص ، أثبت أن $ص'' = \frac{-جا٢ص}{(١ + س^{٢})^{٢}}$ . ( ٥ علامات )

ب) إذا كان ق(س) كثير حدود معرف على ح وكانت $ق'(٢) = ق'(٦) = ٠$ ، $ق''$ متناقص على $]-\infty ، ٤]$ ومتزايد على $[٤ ، \infty[$ جد :
١) نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)
٢) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق .
( ٥ علامات)

---

السؤال السادس : ( ١ علامات)

أ) إذا كانت $هـ^{ص+ص} = هـ^{ص} + هـ^{ص}$ أثبت أن $ص' = هـ^{ص} - هـ^{ص-ص}$ . ( ٦ علامات)

ب) استخدم خصائص المحددات لأثبات أن $\begin{vmatrix} ١ & ٢جا^{٢}١ & ١ \\ ٢جتا^{٢}١ & ١ & ١ \\ جتا^{٢}١ & جا^{٢}١ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر . ( ٤علامات)

انتهت الأسئلة
مع أمنياتنا لكم بالتفوق دائماً