التوجيهي العلمي
رياضيات

أ علاء عواد
0569642323

أسئلة نوعيه ووزاريه واثرائيه على درس " تطبيقات عملية على القيم القصوى "

التوجيهي العلمي رياضيات

أ علاء عواد / 0569642323

Paradise Center
شركة برادايس للإستشارات والتدريب

مركز

رام الله و البيرة

مركز برادايس
رام الله مقابل مدرسة
الفرندز الاساسيه
عمارة مطعم كاستلو /
الطابق الثالث

Paradise Center
شركة برادايس للإستشارات والتدريب

بند (٣-٤) التطبيقات العملية على [illegible]

تذكر أن : * الخطوات التي نتبعها عند حل التطبيقات العملية :

(١) ندرس المسألة ونحدد المعطيات والمطلوب فيها ونكتب متغيراتها برموز مناسبة.

(٢) نرسم شكلاً توضيحياً للمسألة. (إذا كان ذلك مناسباً)

(٣) نعبر عن المتغير الذي يراد تعيين قيمته القصوى في صيغة اقتران بمتغير واحد.

(٤) نعين النقط الحرجة

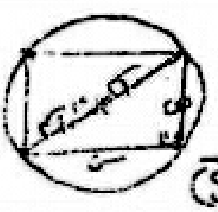
* توضيح : لو طلب أكبر مساحة فيجب أن يكون الاقتران م = ... ، أو أقل تكاليف فيكون الاقتران ك = ... ، أو أكبر سرعة فيكون الاقتران ع = ... ، أو أصغر حجم فيكون الاقتران ن = ... وهكذا

مع وضع الاقتران في متغير واحد فقط

٢٠٠٧ أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم.

الحل : مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = س ص ——— ①



س² + ص² = ٤٠٠ من نظرية فيثاغورس ⇐ ص = $\sqrt{٤٠٠ - س^2}$ ——— ②

بالتعويض عن ص في ① : م = س $\sqrt{٤٠٠ - س^2}$ = $\sqrt{س^2(٤٠٠ - س^2)}$

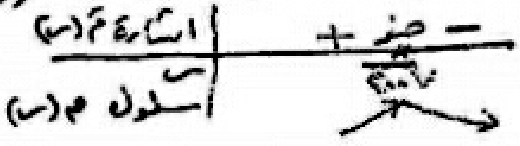
م(س) = $\sqrt{٤٠٠ س^2 - س^4}$

لاحظ أن س = $\sqrt{س^2}$ عندما س > صفر وفي التطبيقات العملية المقادير > صفر !!

$$م'(س) = \frac{٨٠٠ س - ٤ س^3}{٢\sqrt{٤٠٠ س^2 - س^4}} = \frac{٤ س(٢٠٠ - س^2)}{٢\sqrt{٤٠٠ س^2 - س^4}}$$

م'(س) = صفر ⇐ ٤س(٢٠٠ − س²) = صفر ⇐ س = صفر مرفوض أو ٢٠٠ − س² = صفر

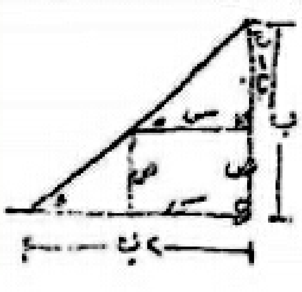
س = $\sqrt{٢٠٠}$ ، أو س = −$\sqrt{٢٠٠}$ مرفوضة



من الشكل المجاور : يوجد قيمة عظمى محلية (ومطلقة) للاقتران م(س) عندما س = $\sqrt{٢٠٠}$ ، ص = $\sqrt{٢٠٠}$

أي أن مساحة أكبر مستطيل = س × ص = $\sqrt{٢٠٠}$ × $\sqrt{٢٠٠}$ = ٢٠٠ سم²

٢٠٠٨ معتمداً على الشكل المجاور ، جد بعدي المستطيل ذي المساحة الكبرى ، الذي يمكن رسمه داخل مثلث قائم الزاوية ، بحيث ينطبق أحد أضلاع هذا المستطيل على أحد ضلعي القائمة في المثلث ، ورأساه الآخران على ضلعي المثلث الآخرين



الحل : من تشابه المثلثين يكون $\frac{ب - ص}{ب} = \frac{س}{٢ب}$

$\boxed{س = ٢ب - ٢ص}$ ——— ①

تابع (٢-٦): تطبيقات عملية على القيم القصوى

(٦ إثرائي)

$مَ(س) = صفر \Leftarrow ٢س^٢ - ٨س = صفر \Leftarrow ٢س(س-٤) = صفر \Leftarrow س = صفر$ مرفوض ، $س = ٤$

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة)

للاقتران م(س) عندما س = ٤

إشارة مَ(س) | − صفر +

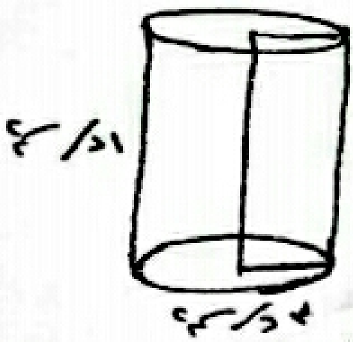
٤

سلوك م(س)

أي أن مساحة المثلث أصغر ما يمكن عندما س = ٤ لذا المستقيم يقطع محور السينات في (٤، ٠) ويمر

$$ميل المستقيم = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٠}{٢ - ٤} = \frac{٤}{-٢} = \boxed{-٢}$$

مثال٢: يراد صنع وعاء معدني على هيئة اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ٨١ π سم³ ، فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة ٣ دنانير لكل سم² من قاعدة الاسطوانة وديناراً واحداً لكل سم² من سطحها الجانبي ، جد أبعاد الاسطوانة التي تجعل تكاليف صنعها أقل ما يمكن.



الحل: التكاليف = مساحة القاعدة × ٣ + المساحة الجانبية × ١

$ت = ٣\pi نق^٢ + ٢\pi نق ع$ ——①

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$٨١\pi = \pi نق^٢ ع$

$ع = \frac{٨١\pi}{\pi نق^٢} = \frac{٨١}{نق^٢}$ ——②

بالتعويض عن ع في ①:

$ت = ٣\pi نق^٢ + ٢\pi \cancel{نق} \times \frac{٨١}{نق^٢}$

$ت(نق) = ٣\pi نق^٢ + \frac{١٦٢\pi}{نق}$

$تَ(نق) = ٦\pi نق - \frac{١٦٢\pi}{نق^٢} = \frac{٦\pi نق^٣ - ١٦٢\pi}{نق^٢} = \frac{٦\pi(نق^٣ - ٢٧)}{نق^٢}$

$تَ(نق) = صفر \Leftarrow نق^٣ - ٢٧ = صفر \Leftarrow نق^٣ = ٢٧ \Leftarrow نق = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

من الشكل المجاور:

إشارة تَ(نق) | − صفر +

نق | ٣

سلوك ت(نق)

يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة)

للاقتران ت(نق) عندما نق = ٣

أي التكاليف أقل ما يمكن عندما يكون نق = ٣ سم ، $ع = \frac{٨١}{٩} = ٩$ سم.

مثال٣ ٢٠١١: سلك طوله ١٢ سم ثني ليكون مثلثاً متساوي الساقين ما أطوال أضلاع هذا المثلث لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

(تبع)

صلاح

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[٦ اثرائي]

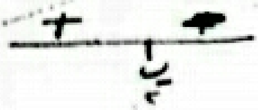
مساحة المستطيل = الطول × العرض = س ص

$\text{م} = (\text{٢ب} - \text{٢ص})\,\text{ص} \Leftarrow \text{م(ص)} = \text{٢ب ص} - \text{٢ص}^2$ بالتعويض من ① :

$\text{م}'(\text{ص}) = \text{٢ب} - \text{٤ص}$

$\text{م}'(\text{ص}) = \text{صفر} \Leftarrow \text{٢ب} - \text{٤ص} = \text{صفر} \Leftarrow \text{ص} = \frac{-\text{٢ب}}{-\text{٤}} = \frac{\text{ب}}{\text{٢}}$

$\text{م}''(\text{ص}) = -\text{٤} \Leftarrow \text{م}''\left(\frac{\text{ب}}{\text{٢}}\right) = -\text{٤} < \text{صفر}$



∴ يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران م(ص) عندما $\text{ص} = \frac{\text{ب}}{\text{٢}}$

أي أن مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما يكون العرض = $\text{ص} = \frac{\text{ب}}{\text{٢}}$ ، الطول = $\text{س} = \text{٢ب} - \frac{\text{٢ب}}{\text{٢}} = \text{ب}$

٢٠٠٩م جد أقصر مسافة بين النقطة (٠، ٦) ومنحنى العلاقة $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = \text{١٦}$

الحل : نفرض أن النقطة (س، ص) تقع على منحنى العلاقة $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = \text{١٦}$

فهي تحقق العلاقة ⟸ $\text{س}^2 = \text{١٦} + \text{ص}^2$ ——①

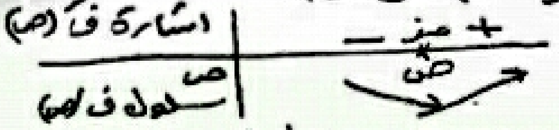
ف = المسافة بين النقطة (٠، ٦) والنقطة (س، ص)

$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 + (\text{ص} - \text{٦})^2} \overset{①}{=} \sqrt{\text{١٦} + \text{ص}^2 + \text{ص}^2 - \text{١٢ص} + \text{٣٦}}$

$\text{ف(ص)} = \sqrt{\text{٢ص}^2 - \text{١٢ص} + \text{٥٢}}$

$\text{ف}'(\text{ص}) = \frac{\text{٤ص} - \text{١٢}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢ص}^2 - \text{١٢ص} + \text{٥٢}}} = \frac{\text{٢ص} - \text{٦}}{\sqrt{\text{٢ص}^2 - \text{١٢ص} + \text{٥٢}}}$

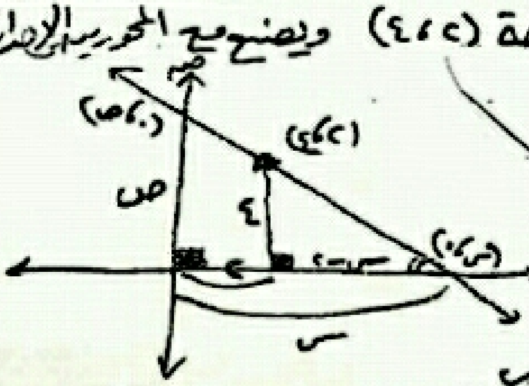
$\text{ف}'(\text{ص}) = \text{صفر} \Leftarrow \text{٢ص} - \text{٦} = \text{صفر} \Leftarrow \text{ص} = \text{٣}$



من الشكل المقابل : يوجد قيمة صغرى محلية (ومطلقة) للاقتران ف(ص) عندما ص = ٣

أي أن أقصر مسافة عندما (ص = ٣) وتساوي $\sqrt{\text{٣٤}}$ وحدة طول

~~٢٠٠٩م إكمال : جد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢، ٤) ويصنع مع المحورين الإحداثيين في الربع الأول مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن.~~



~~الحل : مساحة المثلث = ½ × القاعدة × الارتفاع~~

~~$\text{م} = \frac{1}{2}\,\text{س ص}$ ——①~~

~~من تشابه المثلثين : $\frac{\text{ص}}{\text{٤}} = \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{٢}}$~~

~~$\text{ص} = \frac{\text{٤س}}{\text{س} - \text{٢}}$ ——②~~

~~بالتعويض عن ص في ① : $\text{م} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\text{س} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\text{س}}{\text{س} - \text{٢}}$~~

~~$\text{م(س)} = \frac{\text{٢س}^2}{\text{س} - \text{٢}}$~~

~~$\text{م}'(\text{س}) = \frac{(\text{س} - \text{٢}) \times \text{٤س} - \text{٢س}^2 \times \text{١}}{(\text{س} - \text{٢})^2} = \frac{\text{٤س}^2 - \text{٨س} - \text{٢س}^2}{(\text{س} - \text{٢})^2} = \frac{\text{٢س}^2 - \text{٨س}}{(\text{س} - \text{٢})^2}$~~

(يتبع)

تابع (٣-٦): تطبيقات عملية على القيم القصوى

إثرائي

م̀(س) = صفر ⇐ ٢س − ٨/س² = صفر ⇐ ٢س(س − ٤) = صفر ⇐ س = صفر مرفوضة أو س = ٤

+ صفر − ٤ إشارة م̀(س)

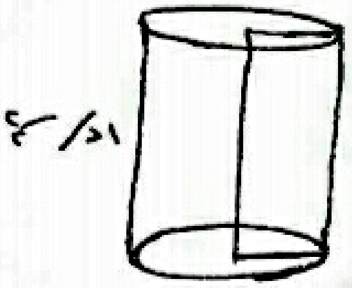
سلوك م(س)

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = ٤

أي أن مساحة المثلث أصغر ما يمكن عندما س = ٤. لذا المستقيم يقطع محور السينات في (٤، ٠) ويمر (٢، ٤)

ميل المستقيم = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٠}{٢ - ٤} = \frac{٤}{-٢} = \boxed{-٢}$

مثال ٢: يراد صنع وعاء معدني على هيئة اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعته ٨١ π سم³، فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة ٣ دنانير لكل سم² من قاعدة الاسطوانة ودينارًا واحدًا لكل سم² من سطحها الجانبي، جد أبعاد الأسطوانة التي تجعل تكاليف صنعها أقل ما يمكن.



الحل: التكاليف = مساحة القاعدة × ٣ + المساحة الجانبية × ١

ت = ٣ π نق² + ٢ π نق ع ——— ①

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

٨١ π = π نق² ع

ع = $\frac{٨١ π}{π نق^٢} = \frac{٨١}{نق^٢}$ ——— ②

بالتعويض عن ع في ①:

ت = ٣ π نق² + ٢ π $\cancel{نق}$ × $\frac{٨١}{نق^٢}$

ت(نق) = ٣ π نق² + $\frac{١٦٢ π}{نق}$

ت̀(نق) = ٦ π نق − $\frac{١٦٢ π}{نق^٢}$ = $\frac{٦ π نق^٣ - ١٦٢ π}{نق^٢}$ = $\frac{٦ π (نق^٣ - ٢٧)}{نق^٢}$

ت̀(نق) = صفر ⇐ نق³ − ٢٧ = صفر ⇐ نق³ = ٢٧ ⇐ نق = $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣

+ صفر − ٣ إشارة ت̀(نق) نق

سلوك ت(نق)

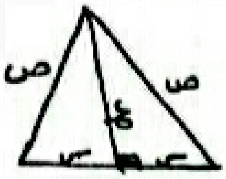
من الشكل المجاور: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران ت(نق) عندما نق = ٣

أي التكاليف أقل ما يمكن عندما يكون نق = ٣ سم، ع = $\frac{٨١}{٩}$ = ٩ سم.

مثال ١١ إثرائي: سلك طوله ١٢ سم ثني ليكون مثلثًا متساوي الساقين، ما أطوال أضلاع هذا المثلث لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

(تشيو)

صلاه



مساحة المثلث = ½ × القاعدة × الارتفاع

م = ½ × ٢س × ع = س ع ---- ①

$\text{ع}^2 = \text{ص}^2 - \text{س}^2$ من نظرية فيثاغورس ⟸ $\text{ع} = \sqrt{\text{ص}^2 - \text{س}^2}$

بالتعويض عن ع في ① :

$\text{م} = \text{س}\sqrt{\text{ص}^2 - \text{س}^2}$ ---- ②

محيط المثلث = طول الأضلاع = ٢س + ٢ص = ١٢ $\xRightarrow{\div 2}$ س + ص = ٦

⟸ ص = ٦ − س ⟸ $\text{ص}^2 = 36 - 12\text{س} + \text{س}^2$

بالتعويض عن ص^2 في ② : $\text{م} = \text{س}\sqrt{36 - 12\text{س} + \cancel{\text{س}^2} - \cancel{\text{س}^2}} = \sqrt{\text{س}^2(36 - 12\text{س})}$

« لاحظ أن $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2}$ عندما س ≥ صفر »
والأبعاد هنا موجبة

$\text{م}(\text{س}) = \sqrt{36\text{س}^2 - 12\text{س}^3}$

$\text{م}'(\text{س}) = \dfrac{72\text{س} - 36\text{س}^2}{2\sqrt{36\text{س}^2 - 12\text{س}^3}}$

$\text{م}'(\text{س}) = \dfrac{36\text{س}(2 - \text{س})}{2\sqrt{36\text{س}^2 - 12\text{س}^3}}$

م′(س) = صفر ⟸ ٣٦س(٢−س) = صفر ⟸ س = صفر مرفوضة ، أو س = ٢

من الشكل المقابل : يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س)

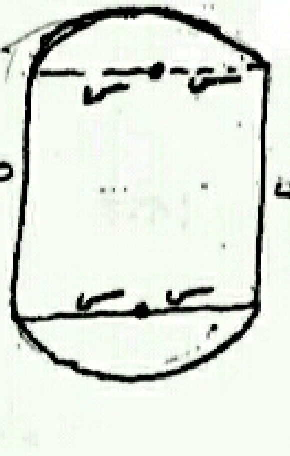
إشارة م′(س)	+ ٢ −
سلوك م(س)	↗ ↘

عندما س = ٢ ، ص = ٦ − ٢ = ٤

أي أن مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما يكون أطوال أضلاعه ٤سم ، ٤سم ، ٤سم

[illegible] الأردن : يراد إقامة سياج حول قطعة أرض على شكل مستطيل ينتهي بنصف دائرة ، فإذا كانت تكلفة تركيب المتر الواحد من السياج على الجانبين المستقيمين (٤) دنانير وعلى الأجزاء المنحنية (٦) دنانير جد أكبر مساحة ممكنة لقطعة الأرض التي يمكن إحاطتها بسياج تكلفته (٤٠٠) دينار

الحل : مساحة الأرض = مساحة المستطيل + مساحة نصفي الدائرتين



$\text{م} = 2\text{س}\text{ص} + \pi\text{س}^2$ ---- ①

التكاليف = ن = ٢ص × ٤ + ٢πس × ٦

٤٠٠ = ٨ص + ١٢πس

٨ص = ٤٠٠ − ١٢πس ÷ ٨

$\text{ص} = 50 - \frac{3}{2}\pi\text{س}$ ---- ②

بالتعويض عن ص في ① :

$\text{م} = 2\text{س}\left(50 - \frac{3}{2}\pi\text{س}\right) + \pi\text{س}^2$

(يتبع)

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى [إثرائي]

م = ١٠٠س − ٣ط س² + ط س²

م(س) = ١٠٠س − ٢ط س²

م'(س) = ١٠٠ − ٤ط س

م'(س) = صفر ⇐ ١٠٠ − ٤ط س = صفر ⇐ س = $\frac{١٠٠}{٤\pi} = \frac{٢٥}{\pi}$

م''(س) = −٤ط ⇐ م''$\left(\frac{٢٥}{\pi}\right)$ = −٤ط < صفر

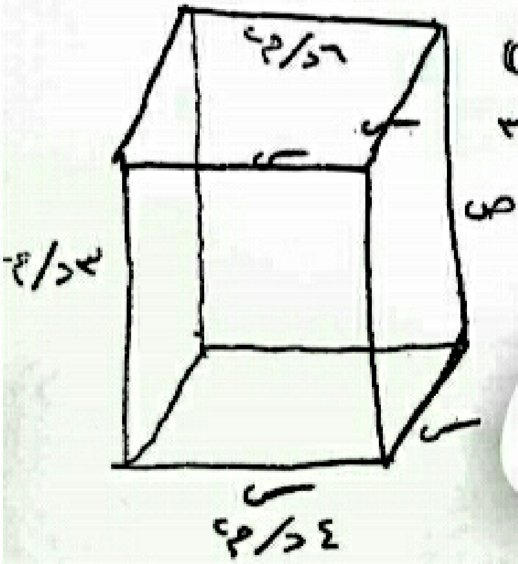
∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = $\frac{٢٥}{\pi}$

أي أن أكبر مساحة ممكنة للأرض عندما (س = $\frac{٢٥}{\pi}$) وتساوي ١٠٠ × $\frac{٢٥}{\pi}$ − ٢ط × $\left(\frac{٢٥}{\pi}\right)^2$

م = $\frac{٢٥٠٠}{\pi} - \frac{١٢٥٠}{\pi} = \frac{١٢٥٠}{\pi}$ م²

---

٧) يراد عمل خزانة معدني مقفل له هيئة متوازي مستطيلات سعته ٤٥ م³ بحيث تكون كل من قاعدتيه العليا والسفلى مربعة الشكل ، فإذا كانت تكاليف المتر المربع الواحد من القاعدة السفلى ٤ دنانير ومن القاعدة العليا ٦ دنانير لكل متر مربع ، ومن الجوانب ٣ دنانير لكل متر مربع ، أوجد أبعاد هذا الخزانة حتى تكون تكاليفه أقل ما يمكن وما هي تكاليفه عندئذ



الحل : ∵ المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات = محيط القاعدة × الارتفاع))

التكاليف = مساحة القاعدة السفلى × ٤ + مساحة القاعدة العليا × ٦ + المساحة الجانبية × ٣

ت = س² × ٤ + س² × ٦ + ٤س × ص × ٣

ت = ١٠س² + ١٢س ص ——— ①

حجم الخزانة = الطول × العرض × الارتفاع

٤٥ = س × س × ص

ص = $\frac{٤٥}{س^2}$ ——— ②

بالتعويض عن ص من ① :

ت = ١٠س² + ١٢س × $\frac{٤٥}{س^2}$

ت(س) = ١٠س² + $\frac{٥٤٠}{س}$

ت'(س) = ٢٠س − $\frac{٥٤٠}{س^2} = \frac{٢٠س^3 - ٥٤٠}{س^2} = \frac{٢٠(س^3 - ٢٧)}{س^2}$

ت'(س) = صفر ⇐ س³ − ٢٧ = صفر ⇐ س³ = ٢٧ ⇐ س = $\sqrt[3]{٢٧}$ = ٣

من الشكل المقابل : يوجد للاقتران ت(س) قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) عندما س = ٣

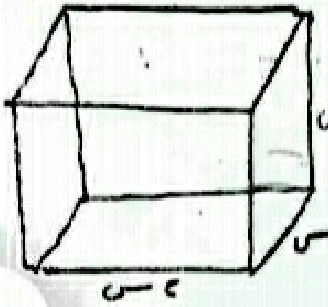
سلوك ت(س)	↘	٣	↗
إشارة ت'(س)	−	صفر	+

أي أن التكاليف أقل ما يمكن عندما تكون طوله ٣م وعرضه ٣م وارتفاعه $\frac{٤٥}{٩}$ ② = ٥

وتكون التكاليف عندئذ = ٩٠ + ١٨٠ = ٢٧٠ دينار

ص ١٤٢

س٧٩ صندوق من الصفيح على هيئة متوازي مستطيلات مفتوح من أعلى فإذا كان طول قاعدته مثلي عرضها وكان حجمه ٢٨٨ سم٣ ، فأوجد أبعاد هذا الصندوق بحيث يكون مساحة الصفيح اللازم لصنعه أصغر ما يمكن .



الحل : مساحة الصفيح = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية للصندوق

م = ٢س × س + (س + ٢س + س + ٢س) × ص

م = ٢س² + ٦س ص ——— ①

حجم الصندوق = الطول × العرض × الارتفاع

٢٨٨ = س × ٢س × ص

$\text{ص} = \frac{٢٨٨}{٢\text{س}^٢} = \frac{١٤٤}{\text{س}^٢}$ ——— ②

بالتعويض عن ص في ① : $\text{م} = ٢\text{س}^٢ + ٦\text{س} \times \frac{١٤٤}{\text{س}^٢}$

$\text{م(س)} = ٢\text{س}^٢ + \frac{٨٦٤}{\text{س}}$

$\text{م}'\text{(س)} = ٤\text{س} - \frac{٨٦٤}{\text{س}^٢} = \frac{٤\text{س}^٣ - ٨٦٤}{\text{س}^٢} = \frac{٤(\text{س}^٣ - ٢١٦)}{\text{س}^٢}$

م'(س) = صفر ⇐ س³ − ٢١٦ = صفر ⇐ س³ = ٢١٦ ⇐ س = $\sqrt[٣]{٢١٦}$ = ٦

من الشكل المقابل : يوجد قيمة صغرى محلية (مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = ٦

+ صفر −	اشارة م'(س)
٦	س
↘ ↗	سلوك م(س)

أبعاد صندوق الصفيح الأصغر ما يمكن عندما يكون طول الصندوق ١٢سم ، عرضه ٦سم ، ارتفاعه ص = $\frac{١٤٤}{٣٦}$ = ٤سم

س٨٠ دائرتان لهما نفس المركز ونصف قطر الصغرى = ٩سم ونصف قطر الكبرى ١٥سم ، فإذا أخذ نصف قطر الصغرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره ٥سم/ث بينما أخذ نصف قطر الكبرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره ٤سم/ث ، فأوجد أكبر مساحة ممكنة بين الدائرتين بحيث لا يتعدى نصف قطر الصغرى عن نصف قطر الكبرى .

الحل : نفرض أن زمن التحرك المشترك = ن ث ، المسافة = السرعة × الزمن

نق (الكبرى) = ١٥ + ٤ن ، نق (الصغرى) = ٩ + ٥ن

نق ≤ نق ⇐ ٩ + ٥ن ≤ ١٥ + ٤ن ⇐ ن ≤ ٦

المساحة بين الدائرتين عند أي لحظة = مساحة الدائرة الكبرى − مساحة الدائرة الصغرى

$\text{م(ن)} = \pi(١٥+٤\text{ن})^٢ - \pi(٩+٥\text{ن})^٢$

$\text{م}'\text{(ن)} = ٢\pi(١٥+٤\text{ن}) \times ٤ - ٢\pi(٩+٥\text{ن}) \times ٥$

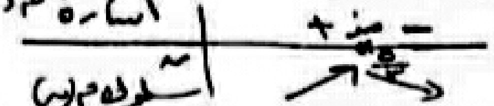
م'(ن) = صفر ⇐ ٨π(١٥+٤ن) − ١٠π(٩+٥ن) = صفر بالقسمة على ٢π

٤(١٥+٤ن) − ٥(٩+٥ن) = صفر ⇐ ٦٠ + ١٦ن − ٤٥ − ٢٥ن = صفر

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[إثرائي]

٩ن = ١٥ ⇐ ن = $\frac{١٥}{٩}$ = $\frac{٥}{٣}$



من الشكل المقابل: يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(ن) عندما ن = $\frac{٥}{٣}$

أي أن أكبر مساحة بين الدائرتين عندما (ن = $\frac{٥}{٣}$) = π(١٥ + ٤ × $\frac{٥}{٣}$)² − π(٩ + ٥ × $\frac{٥}{٣}$)²

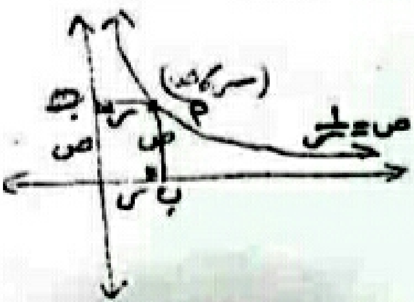
= ١٦٩ π سم²

---

٨٢ النقطة م(س، ص) الواقعة على منحنى ص = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ ، رسم العمودان $\overline{مب}$ ، $\overline{مجـ}$ على المحورين الإحداثيين ، أوجد بعدي المستطيل و ب م جـ (حيث و نقطة الأصل) بحيث يكون محيطه أصغر ما يمكن.

الحل: محيط المستطيل = ٢ × الطول + ٢ × العرض

ل = ٢س + ٢ص ——①



∵ النقطة (س، ص) تقع على المنحنى ص = $\frac{١}{س}$ فهي تحقق معادلته ——②

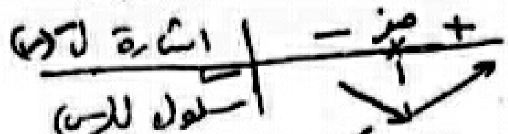
بالتعويض عن ص في ①:

ل(س) = ٢س + $\frac{٢}{س}$

ل'(س) = ٢ − $\frac{٢}{س^٢}$ = $\frac{٢س^٢ − ٢}{س^٢}$ = $\frac{٢(س^٢ − ١)}{س^٢}$

ل'(س) = صفر ⇐ س² − ١ = صفر ⇐ س = +١ ، س = −١ مرفوضة لأن س > ٠.

من الشكل المقابل:



* يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران ل(س) عند س = ١

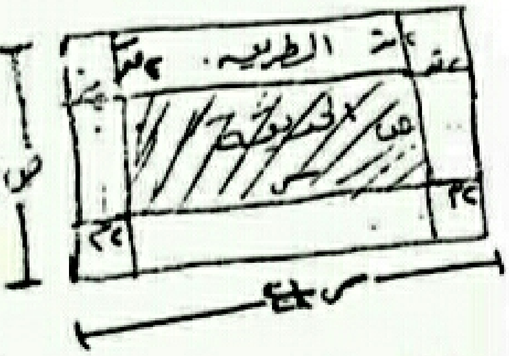
أي أن ~~محيط المستطيل~~ محيط المستطيل أصغر ما يمكن عندما يكون بعديه س = ١ ، ص $\overset{②}{=}$ $\frac{١}{١}$ = ١

---

٨٣ يراد إنشاء حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٩٠٠ متر مربع وإحاطتها من جميع الجوانب بطريق خارجي منتظم عرضه ٢ متر. أوجد أبعاد الحديقة التي تجعل المساحة الكلية للحديقة والطريق أقل ما يمكن.

الحل: المساحة الكلية للحديقة والطريق = الطول × العرض

م = (س + ٤)(ص + ٤) ——①



مساحة الحديقة = الطول × العرض

٩٠٠ = س ص ⇐ ص = $\frac{٩٠٠}{س}$ ——②

بالتعويض عن ص في ①: م = (س + ٤)($\frac{٩٠٠}{س}$ + ٤)

م = ٩٠٠ + ٤س + $\frac{٣٦٠٠}{س}$ + ١٦

م(س) = ٩١٦ + ٤س + $\frac{٣٦٠٠}{س}$

(يتبع)

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى [إثراء]

$م''(س) = ٤ - \frac{٣٦٠٠}{س^٢} = \frac{٤س^٢ - ٣٦٠٠}{س^٢} = \frac{٤(س^٢ - ٩٠٠)}{س^٢}$

$م'(س) = صفر ⟸ س^٢ - ٩٠٠ = صفر ⟸ س = ٣٠$ ، $س = -٣٠$ مرفوضة

إشارة م′(س): − ٣٠ +

سلوك م(س)

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = ٣٠

أي أن مساحة الحديقة والطريق أقل ما يمكن عندما يكون بعديها ٣٠ متر ، $ص = \frac{٩٠٠}{٣٠} = ٣٠$ متر

---

٢٠) جسم يسير في خط مستقيم وفقاً للعلاقة $ف = ن^٤ - ١٢ن^٣ + ٢٨ن^٢ - ٦ن + ٥٠$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد أقل تسارع يمكن لهذا الجسم.

الحل: $ع = \frac{دف}{دن} = ٤ن^٣ - ٣٦ن^٢ + ٥٦ن - ٦$

$ت(ن) = \frac{دع}{دن} = ١٢ن^٢ - ٧٢ن + ١٦$

$ت'(ن) = ٢٤ن - ٧٢$

$ت'(ن) = صفر ⟸ ٢٤ن - ٧٢ = صفر ⟸ ن = \frac{٧٢}{٢٤} = ٣$

إشارة ت′(ن): − ٣ +

سلوك ت(ن)

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران ت(ن) عندما ن = ٣

أو اختبار المشتقة الثانية

$ت''(ن) = ٢٤$

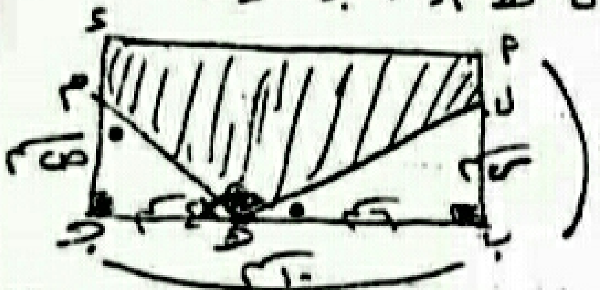
$ت''(٣) = ٢٤ > صفر$

يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة

أي أقل تسارع ممكن عندما $(ن = ٣) = ١٢ × ٩ - ٧٢ × ٣ + ١٦ = -٩٢$ م/ث²

---

٢١) أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب ج = ١٠ سم ، هـ نقطة على ب ج بحيث ب هـ = ٦ سم ، أخذت نقطتان ل ، م على أ ب ، د ج بحيث كان قياس ∠ ل هـ م = ٩٠° فإذا كان طول ل ب = س سم ، م ج = ص سم فأوجد س ، ص اللتين تجعلان مساحة الشكل أ ل هـ م د أكبر ما يمكن.



الحل: مساحة الشكل أ ل هـ م د = مساحة المستطيل أ ب ج د − مساحة ∆ ل ب هـ − مساحة ∆ م هـ ج

$م = ٨٠ - \frac{١}{٢} × ٦ × س - \frac{١}{٢} × ٤ × ص$

$م = ٨٠ - ٣س - ٢ص$ ①

∆ هـ ب ل ≈ ∆ م هـ ج وينتج أن: $\frac{ص}{٦} = \frac{٤}{س}$ بالضرب ⟸ $س ص = ٢٤ ⟸ ص = \frac{٢٤}{س}$ ②

بالتعويض عن ص في ①: $م(س) = ٨٠ - ٣س - \frac{٤٨}{س}$

$م'(س) = -٣ + \frac{٤٨}{س^٢} = \frac{-٣س^٢ + ٤٨}{س^٢} = \frac{٣(١٦ - س^٢)}{س^٢}$

$م'(س) = صفر ⟸ ١٦ - س^٢ = صفر ⟸ س = ٤$ ، $س = -٤$ مرفوضة

[illegible]

تابع (٣ − ٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى [إثرائي]

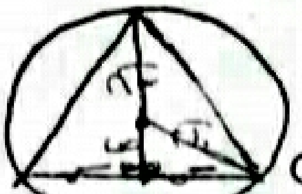
إشارة م′(س): + صفر − عند ٤

سلوك م(س)

من الشكل المقابل يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = ٤ ، ص = $\frac{٢٤}{س} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$

أي أن مساحة المخطط هي أكبر ما يمكن عندما تكون س = ٤سم ، ص = ٦سم

س٧) أوجد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠سم.



الحل: مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

$م = \frac{١}{٢} \times ٢س \times (١٠ + ص) = س(١٠ + ص)$ —— ①

من نظرية فيثاغورث: $ص^٢ = ١٠٠ - س^٢ \Leftarrow ص = \sqrt{١٠٠ - س^٢}$ —— ②

بالتعويض عن ص في ①: $م = س(١٠ + \sqrt{١٠٠ - س^٢})$

(لاحظ س = $\sqrt{س^٢}$ هنا)

$م(س) = ١٠س + س\sqrt{١٠٠ - س^٢} = ١٠س + \sqrt{١٠٠س^٢ - س^٤}$

$م′(س) = ١٠ + \frac{٢٠٠س - ٤س^٣}{٢\sqrt{١٠٠س^٢ - س^٤}} = ١٠ + \frac{١٠٠س - ٢س^٣}{\sqrt{١٠٠س^٢ - س^٤}}$

$م′(س) = \frac{١٠\sqrt{١٠٠س^٢ - س^٤} + ١٠٠س - ٢س^٣}{\sqrt{١٠٠س^٢ - س^٤}}$

$م′(س) = صفر \Leftarrow ١٠\sqrt{١٠٠س^٢ - س^٤} = ٢س^٣ - ١٠٠س$ بالقسمة على ٢

$٥\sqrt{١٠٠س^٢ - س^٤} = س^٣ - ٥٠س$ بتربيع الطرفين

$٢٥(١٠٠س^٢ - س^٤) = س^٦ - ١٠٠س^٤ + ٢٥٠٠س^٢$

$\cancel{٢٥٠٠س^٢} - ٢٥س^٤ = س^٦ - ١٠٠س^٤ + \cancel{٢٥٠٠س^٢}$

$س^٦ - ٧٥س^٤ = صفر \Leftarrow س^٤(س^٢ - ٧٥) = صفر$

س = صفر أو $س^٢ = ٧٥ \Leftarrow س = \sqrt{٧٥}$ ، $س = -\sqrt{٧٥}$ مرفوضة

إشارة م′(س): + صفر − عند $\sqrt{٧٥}$

سلوك م(س)

من الشكل المقابل يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = $\sqrt{٧٥}$

أي أن مساحة أكبر مثلث تكون عندما (س = $\sqrt{٧٥}$) = $\sqrt{٧٥}(١٠ + ٥) = ٥\sqrt{٣} \times ١٥ = ٧٥\sqrt{٣}$ سم² وحدة مربعة

---

٢٧ جسم يتحرك في خط مستقيم حسب العلاقة ف = $ن^٣ - ١٢ن^٢ + ٨٠ن$ حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، أوجد أقل سرعة ممكنة لهذا الجسم.

الحل: ع = $\frac{دف}{دن}$ = $٣ن^٢ - ٢٤ن + ٨٠$

ع′(ن) = ٦ن − ٢٤

ع′(ن) = صفر ⇐ ٦ن − ٢٤ = صفر ⇐ ن = $\frac{٢٤}{٦}$ = ٤

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (أو مطلقة) للاقتران ع(ن) عندما ن = ٤.

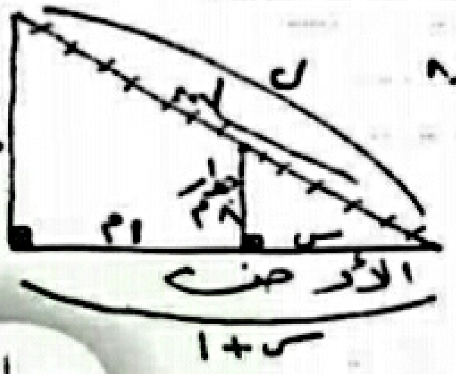
إشارة ع′(ن) | + صفر −

سلوك ع(ن) | ٤

أي أقل سرعة ممكنة عندما (ن=٤) = ٣×١٦ − ٢٤×٤ + ٨٠ = ٣٢ م/ث

وأيضا: يمكن استخدام اختبار المشتقة الثانية: ع″(ن) = ٦ ⇐ ع″(٤) = ٦ > صفر ⇐ يوجد قيمة صغرى

٢٩ جدار ارتفاعه ٨م ويبعد ١م عن بناية عالية، أوجد طول أقصر سلم يمكن أن يصل بين الأرض والبناية بحيث يرتكز على الجدار.



الحل: ل = $\sqrt{(س+١)^٢ + ص^٢}$ —①

من تشابه المثلثين: $\frac{ص}{٨} = \frac{س+١}{س}$ بالضرب في ٨

ص = $\frac{٨(س+١)}{س}$ = ٨ + $\frac{٨}{س}$ —②

بالتعويض عن ص في ①:

ل(س) = $\sqrt{(س+١)^٢ + (٨ + \frac{٨}{س})^٢}$

ل′(س) = $\frac{٢(س+١) + ٢(٨+\frac{٨}{س}) \times \frac{-٨}{س^٢}}{٢\sqrt{(س+١)^٢ + (٨+\frac{٨}{س})^٢}}$

= $\frac{س+١ - \frac{٦٤}{س^٢} - \frac{٦٤}{س^٣}}{\sqrt{(س+١)^٢ + (٨+\frac{٨}{س})^٢}}$ = $\frac{س^٤ + س^٣ - ٦٤س - ٦٤}{س^٣\sqrt{(س+١)^٢ + (٨+\frac{٨}{س})^٢}}$

ل′(س) = صفر ⇐ $س^٤ + س^٣ - ٦٤س - ٦٤$ = صفر ⇐ $س^٣(س+١) - ٦٤(س+١)$ = صفر

(س+١)($س^٣ - ٦٤$) = صفر ⇐ س+١ = صفر ومنه س = −١ مرفوض

أو $س^٣ - ٦٤$ = صفر ⇐ $س^٣$ = ٦٤ ⇐ س = $\sqrt[٣]{٦٤}$ = ٤

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (أو مطلقة)

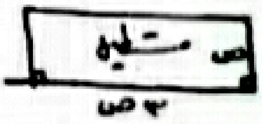
إشارة ل′(س) | + صفر −

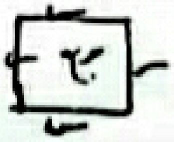
سلوك ل(س) | ٤

عندما س = ٤ أي أن أقصر سلم يصل بين الأرض والبناية مرتكزاً على الجدار عندما (س=٤) = $\sqrt{٢٥ + ١٠٠}$ = $\sqrt{١٢٥}$ = ٥$\sqrt{٥}$ متر

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية ٢ القيم القصوى [إثراء]

٢٣ سلك طوله ٢٨سم قطع إلى جزئين ثم ثني الجزء الأول ليكون مربعاً وثني الجزء الثاني ليكون مستطيلاً طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه ، أوجد طول كل من الجزئين إذا كان مجموع مساحتي المربع والمستطيل أقل ما يمكن .





الحل :

مجموع مساحتي المربع والمستطيل = مساحة المربع + مساحة المستطيل

م = س^٢ + ٣ص^٢ ——— ①

طول السلك = محيط المربع + محيط المستطيل ⟸ ٤س + (٣ص + ص) × ٢ = ٢٨

٤س + ٨ص = ٢٨ بالقسمة على ٤ ⟸ س + ٢ص = ٧ ⟸ س = ٧ − ٢ص ——— ②

بالتعويض عن س في ① : م = (٧ − ٢ص)^٢ + ٣ص^٢ = ٤٩ − ٢٨ص + ٤ص^٢ + ٣ص^٢

م(ص) = ٧ص^٢ − ٢٨ص + ٤٩

مَ(ص) = ١٤ص − ٢٨

مَ(ص) = صفر ⟸ ١٤ص − ٢٨ = صفر ⟸ ص = $\frac{٢٨}{١٤}$ = ٢

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة)

إشارة مَ(ص)	−	صفر	+
ص		٢	
سلوك م(ص)	↘		↗

للاقتران م(ص) عندما ص = ٢ ، س = ٣

أي أن مجموع مساحتي المربع والمستطيل أقل ما يمكن عندما يكون طول الجزء الأول من السلك = ٤س = ١٢سم

وطول الجزء الثاني من السلك = ٤ص × ٢ = ١٦سم

ملاحظة : يمكن استخدام اختبار المشتقة الثانية : مً(ص) = ١٤ ⟸ مً(٢) = ١٤ > صفر ⟸ يوجد قيمة صغرى محلية وهي مطلقة (الاقتران متصل)

---

٢٤ أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ١٠سم ، مد الضلع د جـ على استقامته إلى هـ ووصل أ هـ ليقطع ب جـ في نقطة و ، فإذا كان طول ب و = س سم ، وطول جـ هـ = ص سم ، فأوجد قيمتي س ، ص اللتين تجعلان مجموع مساحتي المثلثين أ ب و ، و جـ هـ أقل ما يمكن .

الحل : مجموع مساحتي المثلثين أ ب و ، و جـ هـ = مساحة △ أ ب و + مساحة △ و جـ هـ

م = $\frac{١}{٢}$ × س × ٦ + $\frac{١}{٢}$ (١٠ − س) × ص ——— ①

من تشابه المثلثين هـ جـ و ، أ ب و ينتج أن : $\frac{ص}{٦}$ = $\frac{١٠ − س}{س}$ بالضرب في ٦

ص = $\frac{٦(١٠ − س)}{س}$ ——— ②

بالتعويض عن ص في ① : م = ٣س + $\frac{١}{\cancel{٢}}$ (١٠ − س) × $\frac{\overset{٣}{\cancel{٦}}(١٠ − س)}{س}$

م = ٣س + (١٠ − س) ($\frac{٣٠}{س}$ − ٣) = ٣س + $\frac{٣٠٠}{س}$ − ٣٠ − ٣٠ + ٣س

م(س) = ٦س − ٦٠ + $\frac{٣٠٠}{س}$

مَ(س) = ٦ − $\frac{٣٠٠}{س^٢}$ = $\frac{٦س^٢ − ٣٠٠}{س^٢}$ = $\frac{٦(س^٢ − ٥٠)}{س^٢}$

مَ(س) = صفر ⟸ س^٢ − ٥٠ = صفر ⟸ س = $\sqrt{٥٠}$ أو س = −$\sqrt{٥٠}$ مرفوضة

من الشكل المقابل يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة)

إشارة مَ(س)	−	صفر	+
		$\sqrt{٥٠}$	
سلوك م(س)	↘		↗

للاقتران م(س) عندما س = $\sqrt{٥٠}$

أي أن مجموع مساحتي المثلثين أقل ما يمكن عندما تكون $\text{س} = \frac{١٠}{\sqrt{٥}} = ٢\sqrt{٥}$ سم ، $\text{ص} = \frac{٦(١٠ - ٢\sqrt{٥})}{٢\sqrt{٥}}$

$\text{ص} = \frac{٦\text{س}}{٢} - ٦ = \frac{٦ \times ٢\sqrt{٥}}{٢} - ٦ = ٦\sqrt{٥} - ٦ = ٦(\sqrt{٥} - ١)$ سم

---

٩٤ جسم يسير في خط مستقيم بحيث أن بعده (ف) بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة $\text{ف} = \text{أ}\ \text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} + \text{ب}\ \text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}$. فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠، ٢] هي ١٠ م/ث وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عندما ن = ١ ثانية فأوجد الثابتين أ، ب .

الحل : السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، ٢] $= \frac{\Delta\text{ف}}{\Delta\text{ن}} = \frac{\text{ف}(٢) - \text{ف}(٠)}{٢ - ٠}$

$$١٠ = \frac{\text{أ}\ \overset{\text{صفر}}{\cancel{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}}} + \text{ب}\ \text{جا}\frac{\pi}{٢} - (\text{أ}\ \text{جتا}٠ + \text{ب}\ \overset{\text{صفر}}{\cancel{\text{جا}٠}})}{٢} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{٢}$$

$\therefore \text{ب} - \text{أ} = ٢٠$ ——— ①

$\because$ سرعة الجسم أقل ما يمكن عندما ن = ١ ثانية أي يوجد قيمة قصوى عندما ن = ١ ، ع قابل للاشتقاق

$\therefore \bar{\text{ع}}(١) = \text{صفر}$

$$\text{ع}(\text{ن}) = \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{أ} \times (-\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}) \times \frac{\pi}{٤} + \text{ب}\ \text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤}$$

$$\text{ع}(\text{ن}) = \frac{-\text{أ}\pi}{٤}\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} + \frac{\text{ب}\pi}{٤}\text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}$$

$$\bar{\text{ع}}(\text{ن}) = \frac{-\text{أ}\pi}{٤}\text{جتا}\frac{\pi}{٤}\text{ن} \times \frac{\pi}{٤} + \frac{\text{ب}\pi}{٤} \times (-\text{جا}\frac{\pi}{٤}\text{ن}) \times \frac{\pi}{٤}$$

$$\bar{\text{ع}}(١) = \frac{-\text{أ}\pi^٢}{١٦}\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - \frac{\text{ب}\pi^٢}{١٦}\text{جا}\frac{\pi}{٤} = \text{صفر}$$

$$\frac{-\text{أ}\pi^٢}{١٦\sqrt{٢}} - \frac{\text{ب}\pi^٢}{١٦\sqrt{٢}} = \text{صفر} \qquad (\text{لأن جا}\frac{\pi}{٤} = \text{جتا}\frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\sqrt{٢}})$$

$$\frac{-\pi^٢}{١٦\sqrt{٢}}(\text{أ} + \text{ب}) = \text{صفر}$$

$\therefore \text{أ} + \text{ب} = \text{صفر}$ ——— ②

بجمع ① ، ② : $٢\text{ب} = ٢٠ \Leftarrow \text{ب} = \boxed{١٠}$

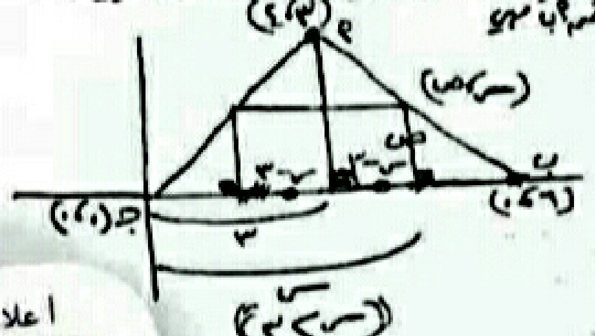
بالتعويض في ② : $\text{أ} + ١٠ = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -١٠}$

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[وزاري]

س٩٥ ؟ أ ب جـ مثلث رؤوسه النقط أ(٣، ٤) ، ب(٦، ٠) ، جـ(٠، ٠) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث يقع رأساه من رؤوس المستطيل على القاعدة ب جـ ويقع كل من الرأسين الآخرين على ضلعي المثلث الآخرين.

الحل: نفرض أن نقطة (س، ص) تقع على المستقيم أ ب فهي تحقق معادلته وهي:



$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{ص - ٠}{س - ٦} = \frac{٤ - ٠}{٣ - ٦} = \frac{٤}{-٣}$$

٤س − ٢٤ = −٣ص بالقسمة على −٣

ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ٨ ——— ①

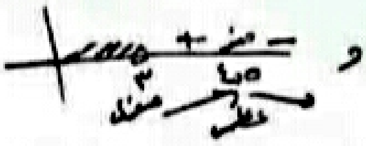
مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = ٢(س − ٣) × ص ($\underset{①}{من}$)

= (٢س − ٦)($-\frac{٤}{٣}$س + ٨)

م = $-\frac{٨}{٣}$س² + ١٦س + ٨س − ٤٨

م(س) = $-\frac{٨}{٣}$س² + ٢٤س − ٤٨



م′(س) = $-\frac{١٦}{٣}$س + ٢٤

م′(س) = صفر ⇐ $-\frac{١٦}{٣}$س + ٢٤ = صفر ⇐ س = $\frac{٩}{٢}$ = ٤,٥

م″(س) = $-\frac{١٦}{٣}$ ⇐ م″(٤,٥) = $-\frac{١٦}{٣}$ < صفر

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = ٤,٥

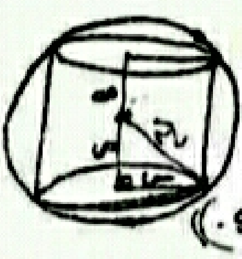
أي أن مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما (س = ٤,٥)

م(٤,٥) = $-\frac{٨}{٣}$ × (٤,٥)² + ٢٤ × ٤,٥ − ٤٨ = ٦ وحدة مربعة

س٩٦ أوجد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها (√٣) دسم

الحل: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = π س² × ٢ص ——— ①



من نظرية فيثاغورس: ص² = (√٣)² − س² ⇐ ص = $\sqrt{٣ - س^٢}$ ——— ②

بالتعويض عن ص في ①: ح = ٢π س² $\sqrt{٣ - س^٢}$

ح = ٢π $\sqrt{س^٤ (٣ - س^٢)}$

(لاحظ س² = $\sqrt{س^٤}$ عندما س ≥ ٠)

ح = ٢π $\sqrt{٣س^٤ - س^٦}$

$$ح′(س) = \frac{\cancel{٢}π × (١٢س^٣ - ٦س^٥)}{\cancel{٢}\sqrt{٣س^٤ - س^٦}} = \frac{π × ٦س^٣(٢ - س^٢)}{\sqrt{٣س^٤ - س^٦}}$$

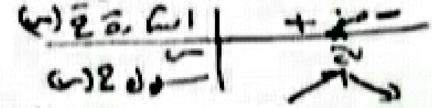
[illegible]

تابع (٣ - ٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[١ أدبي]

ح̄(س) = صفر ← س٣ = صفر ، ٤٢ − ٣س٢ = صفر ← س = ٠ مرفوضة ، $\sqrt{٢}$ ، س = $-\sqrt{٢}$ مرفوضة ، س = $\sqrt{٢}$

من الشكل المقابل: يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة)



للاقتران ح(س) عندما س = $\sqrt{٢}$

أي أكبر حجم للأسطوانة داخل الكرة عندما (س = $\sqrt{٢}$) = $π٢\sqrt{١٢-٨}$ = ٤π وحدة مكعبة

س٩٧ أوجد إحداثيي نقطة على منحنى الاقتران ص = م(س) = $\sqrt{٢س-١}$ ، بحيث تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٣، ٠).

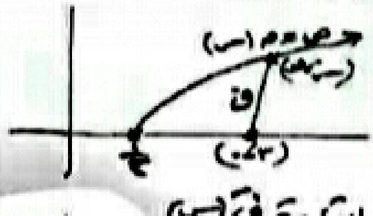
نفرض أن (س، ص) نقطة على منحنى الاقتران فهي تحقق معادلته أي أن ص = $\sqrt{٢س-١}$ بالتربيع

ص٢ = ٢س − ١ ——— (١) حيث س ≥ ½

المسافة بين النقطة (٣، ٠) والنقطة (س، ص) = $\sqrt{(س_٢-س_١)^٢+(ص_٢-ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(س-٣)^٢+ص^٢}$ $\overset{من}{(١)}$ $\sqrt{س^٢-٦س+٩+٢س-١}$

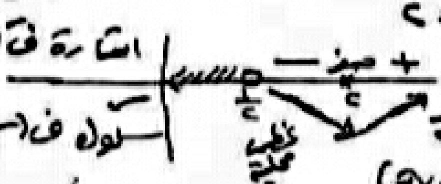
ف(س) = $\sqrt{س^٢-٤س+٨}$



ف̄(س) = $\frac{٢س-٤}{٢\sqrt{س^٢-٤س+٨}}$ = $\frac{س-٢}{\sqrt{س^٢-٤س+٨}}$

ف̄(س) = صفر ← س − ٢ = صفر ← س = ٢

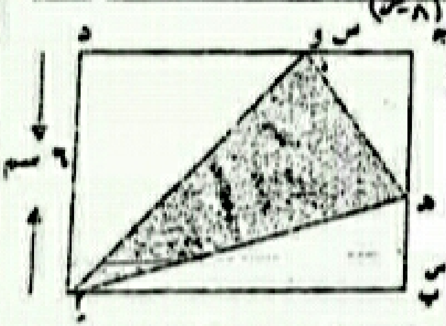
من الشكل المقابل: يوجد للاقتران ف(س) قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) عندما س = ٢ ، ص = $\sqrt{٣}$



أي أن أقرب نقطة إلى النقطة (٣، ٠) هي (٢، $\sqrt{٣}$)

س٩ الأردن: أراد أحد الأثرياء تقسيم حديقة له مستطيلة الشكل حسب الشكل المجاور و بداخله مثلث أهو ملون بحيث ب هـ = جـ و = س سم كما في الشكل المجاور ، جد أقل مساحة ممكنة للمثلث أهو.

الحل: مساحة Δ أهو = مساحة المستطيل أ ب جـ د − مساحة Δ جـ هـ و − مساحة Δ هـ ب أ − مساحة Δ أ د و



م = ٨×٦ − ½ (٦−س) س − ½ × ٨ × س − ½ × ٦ × (٨−س)

م = ٤٨ − $\cancel{٣س}$ + ½ س٢ − ٤س − ٢٤ + $\cancel{٣س}$

م(س) = ½ س٢ − ٤س + ٢٤

م̄(س) = س − ٤

م̄(س) = صفر ← س − ٤ = صفر ← س = ٤

م̿(س) = ١ ← م̿(٤) = ١ > صفر .

∴ يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = ٤

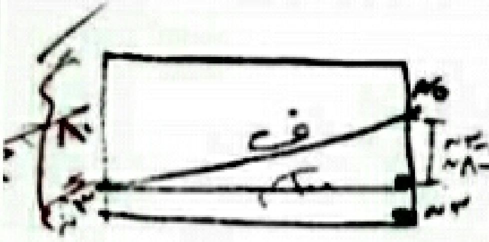
أي أن أقل مساحة ممكنة للمثلث أهو عندما (س = ٤) = ½×١٦ − ٤×٤ + ٢٤ = ١٦ وحدة مربعة

٩٨) مستطيل أ ب جـ د فيه أ ب = ١٠٠ سم ، ب جـ = ٨٠ سم فإذا تحركت نقطة من د باتجاه أ بسرعة منتظمة مقدارها ٥ سم/ث وتحركت نقطة أخرى من ب باتجاه جـ بسرعة منتظمة مقدارها ٣ سم/ث . فمتى تكون المسافة بين النقطتين أقل ما يمكن وما مقدارها عندئذ

الحل : نفرض أن زمن الحركة المشترك = ن ث

المسافة التي تحركتها النقطة التي تحركت من د = السرعة × الزمن = ٥ن سم

" " " " " ب = ٣ن سم



من الشكل المقابل ونظرية فيثاغورس :

$$ف(ن) = \sqrt{(١٠٠)^٢ + (٨٠ - ٨ن)^٢} \quad —①$$

$$ف'(ن) = \frac{٢(٨٠ - ٨ن) \times -٨}{٢\sqrt{(١٠٠)^٢ + (٨٠ - ٨ن)^٢}} = \frac{٨(٨ن - ٨٠)}{\sqrt{(١٠٠)^٢ + (٨٠ - ٨ن)^٢}}$$

$ف'(ن) = صفر \Leftarrow ٨ن - ٨٠ = صفر \Leftarrow ن = \frac{٨٠}{٨} = ١٠ ث$

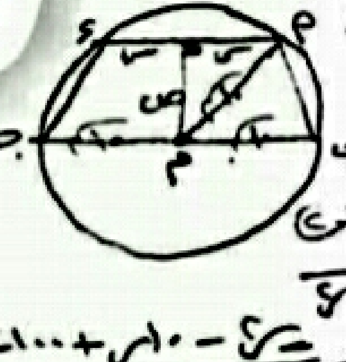
من الشكل المجاور : يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) عندما ن = ١٠ .

إشارة ف'(ن)	− صفر +
سلوك ف(ن)	↘ ١٠ ↗

أي أن المسافة بين النقطتين أقل ما يمكن عندما (ن = ١٠ ث) أي بعد مضي ١٠ ثوان $\underset{①}{\overset{نعوض}{=}} \sqrt{١٠٠^٢ + صفر} = ١٠٠$ سم

٩٩) دائرة نصف قطرها ١٠ سم رسم فيها شبه منحرف أ ب جـ د بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة وتنطبق قاعدته الكبرى ب جـ على قطر الدائرة ، أوجد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف أ ب جـ د .

الحل : مساحة شبه المنحرف = $\frac{(القاعدة الصغرى + الكبرى)}{٢} \times$ الارتفاع



$$م = \frac{(٢س + ٢٠)}{٢} \times ص = (س + ١٠)ص \quad —①$$

من نظرية فيثاغورس : $ص^٢ = ١٠٠ - س^٢ \Leftarrow ص = \sqrt{١٠٠ - س^٢} \quad —②$

بالتعويض عن ص في ① : $م(س) = (س + ١٠)\sqrt{١٠٠ - س^٢}$

$$م'(س) = (س + ١٠) \times \frac{-\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{١٠٠ - س^٢}} + \sqrt{١٠٠ - س^٢} = \frac{-س^٢ - ١٠س + ١٠٠ - س^٢}{\sqrt{١٠٠ - س^٢}}$$

$$م'(س) = \frac{-٢س^٢ - ١٠س + ١٠٠}{\sqrt{١٠٠ - س^٢}}$$

$م'(س) = صفر \Leftarrow -٢س^٢ - ١٠س + ١٠٠ = صفر$ بالقسمة ÷ −٢ $\Leftarrow س^٢ + ٥س - ٥٠ = صفر$

$(س - ٥)(س + ١٠) = صفر \Leftarrow س = ٥$ ، $س = -١٠$ مرفوضة

من شكل التغاير : يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عند س=٥

إشارة م'(س)	+ صفر −
سلوك م(س)	↗ ٥ ↘

قيمة عظمى

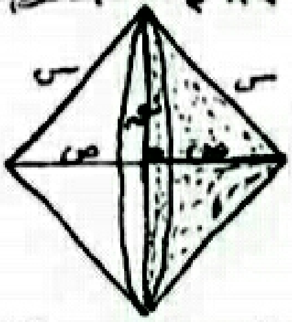
أي أن أكبر مساحة لشبه المنحرف عندها (س=٥) $= ١٥\sqrt{٧٥} = ٧٥\sqrt{٣}$ سم٢

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[د ١ أ ٨]

١٩٩٩ الأردن: إذا دارت صفيحة معدنية على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه ٤٠ سم دورة كاملة حول قاعدته، فما أكبر حجم ممكن للجسم الناتج عن هذا الدوران.

الحل: حجم الجسم الناتج عن الدوران = ٢ × حجم المخروط المظلل = ٢ × $\frac{1}{3}$ مساحة قاعدة المخروط × ارتفاعه



ح = ٢ × $\frac{1}{3}$ π نق² × ص ——— ①

نق² = س² − ص² من فيثاغورث ——— ②

محيط المثلث = ٢س + ٢ص = ٤٠ ÷ ٢ ← س + ص = ٢٠

∴ س = ٢٠ − ص ——— ③

بالتعويض عن س في ②: نق² = (٢٠ − ص)² − ص²

نق² = ٤٠٠ − ٤٠ ص + ~~ص²~~ − ~~ص²~~ = ٤٠٠ − ٤٠ ص

بالتعويض عن نق² في ①: ح = $\frac{2\pi}{3}$ × (٤٠٠ − ٤٠ ص) ص ——— ④

ح(ص) = $\frac{800\pi}{3}$ ص − $\frac{80\pi}{3}$ ص²

ح̄(ص) = $\frac{800\pi}{3}$ − $\frac{160\pi}{3}$ ص

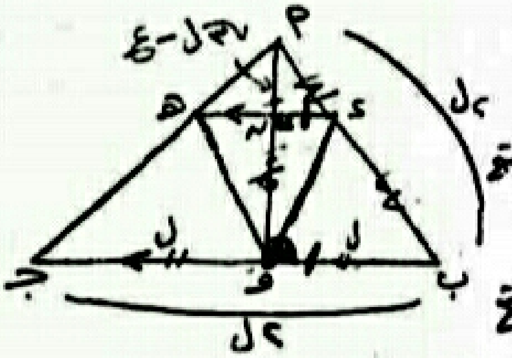
ح̄(ص) = صفر ← $\frac{160\pi}{3}$ ص = $\frac{800\pi}{3}$ بالضرب في $\frac{3}{160\pi}$ ← ص = ٥

ح̿(ص) = − $\frac{160\pi}{3}$ ← ح̿(٥) = − $\frac{160\pi}{3}$ < صفر

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة لأنها وحيدة) للاقتران ح(ص) عندما ص = ٥

أي أن أكبر حجم للجسم الناتج عن الدوران عندما (ص = ٥) $\frac{\text{من}}{④}$ $\frac{2\pi}{3}$ × ٢٠٠ × ٥ = $\frac{2000\pi}{3}$ سم³

٢٠٠٠ م: أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢ل سم، أخذت النقط د، هـ، و على أضلاعه أ ب، أ جـ، ب جـ على الترتيب بحيث كانت القطعة المستقيمة د هـ توازي القاعدة ب جـ، النقطة و هي منتصف ب جـ، أثبت أن أكبر مساحة ممكنة للمثلث د هـ و تساوي $\frac{1}{4}$ مساحة المثلث أ ب جـ.



الحل: في △ أ ب و: (أو)² = (أب)² − (ب و)²

(أو)² = ٤ل² − ل² = ٣ل² ← أو = $\sqrt{3}$ ل

أ م = أ و − م و = $\sqrt{3}$ ل − ع

في △ أ ب جـ: ∵ د هـ ∥ ب جـ ← △ أ د هـ ~ △ أ ب جـ متشابه

$\frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$ ← $\frac{\text{د هـ}}{٢\text{ل}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$ ——— ①

في △ أ ب و: ∵ د م ∥ ب و ← △ أ د م ~ △ أ ب و متشابه

$\frac{\text{أ م}}{\text{أ و}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$ ← $\frac{\sqrt{3}\,\text{ل} - \text{ع}}{\sqrt{3}\,\text{ل}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$ ——— ②

من ①، ②: $\frac{\text{د هـ}}{٢\text{ل}} = \frac{\sqrt{3}\,\text{ل} - \text{ع}}{\sqrt{3}\,\text{ل}}$ بالضرب في ٢ل ← د هـ = $\frac{٢\sqrt{3}\,\text{ل} - ٢\text{ع}}{\sqrt{3}}$ = ٢ل − $\frac{٢\text{ع}}{\sqrt{3}}$

(يتبع)

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[أ علاء]

مساحة ∆ د هـ و = ½ × القاعدة × الارتفاع = ½ د هـ × ع

$م(ع) = \frac{1}{2} \times (2ل - \frac{2ع^2}{\sqrt{3}}) \times ع = لع - \frac{ع^3}{\sqrt{3}}$

$\bar{م}(ع) = ل - \frac{3ع^2}{\sqrt{3}}$

$\bar{م}(ع) = صفر \Leftarrow ل - \frac{3ع^2}{\sqrt{3}} = صفر \Leftarrow \frac{3ع^2}{\sqrt{3}} = ل$ بالضرب × $\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftarrow ع^2 = \frac{\sqrt{3}ل}{3}$

$\bar{\bar{م}}(ع) = \frac{-6ع}{\sqrt{3}} \Leftarrow \bar{\bar{م}}(\frac{\sqrt{3}ل}{3}) = \frac{-6}{\sqrt{3}} < صفر$

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(ع) عندما $ع = \frac{\sqrt{3}ل}{3}$

أي أن مساحة المثلث دهو أكبر ما يمكن عندما $(ع = \frac{\sqrt{3}ل}{3}) = \frac{1}{2}(2ل - \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}ل}{3}) \times \frac{\sqrt{3}ل}{3}$

$= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{9}ل^2}$ — ①

مثلث متساوي الأضلاع

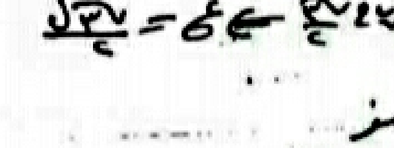
½ مساحة ∆ أ ب جـ = ½ × أب × ب جـ × جا ب = ½ × ٢ل × ٢ل × جا٦٠ = $\frac{ل^2}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}ل^2}{4}}$ — ②

من ①، ②: مساحة أكبر مثلث د هـ و = ½ مساحة ∆ أ ب جـ.

س٢ الأردن: صاحب مزرعة أغنام لديه (٣٦٠) متر من أسلاك الشبك، يريد عمل ٦ حظائر مستطيلة الشكل، ومتساوية المساحة، أوجد أكبر مساحة للحظائر يمكن عملها.

الحل: مساحة الحظائر (المستطيلة) = ٣س × ٢ص = ٦س ص — ①

محيط المستطيلات = ٣٦٠ = ٩س + ٨ص



٩س = ٣٦٠ − ٨ص ÷٩ ⟸ $س = ٤٠ - \frac{٨ص}{٩}$

بالتعويض عن س في ①:

$م = ٦ص(٤٠ - \frac{٨ص}{٩})$

$م(ص) = ٢٤٠ص - \frac{١٦ص^2}{٣}$

$\bar{م}(ص) = ٢٤٠ - \frac{٣٢ص}{٣}$

$\bar{م}(ص) = صفر \Leftarrow ٢٤٠ - \frac{٣٢ص}{٣} = صفر \Leftarrow ص = \frac{٢٤٠ \times ٣}{٣٢} = ٢٢٫٥$

$\bar{\bar{م}}(ص) = -\frac{٣٢}{٣} \Leftarrow \bar{\bar{م}}(٢٢٫٥) = \frac{-٣٢}{٣} < صفر$

∴ للاقتران م(ص) قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) عندما ص = ٢٢٫٥

أي أن أكبر مساحة للحظائر يمكن عملها عندما (ص = ٢٢٫٥) = $٢٤٠ \times ٢٢٫٥ - \frac{١٦}{٣} \times (٢٢٫٥)^2 = ٢٧٠٠م^2$

س٣ الأردن: كرة مصمتة نصف قطرها ٣٠سم حفر بداخلها متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ع سم، ① أثبت أن حجم متوازي المستطيلات يعطى بالعلاقة $ح = ٢٠٠٠ع - \frac{1}{2}ع^3$

② جد أبعاد متوازي المستطيلات ليعطي أكبر حجم ممكن.

(يتبع)

[إثرائي]

الحل: حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع = الطول × العرض × الارتفاع

ح = س × س × ع = س² ع ——— ①

في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب : ص² = ١٠٠ − (½ع)² = ١٠٠ − ¼ ع² ——— ②

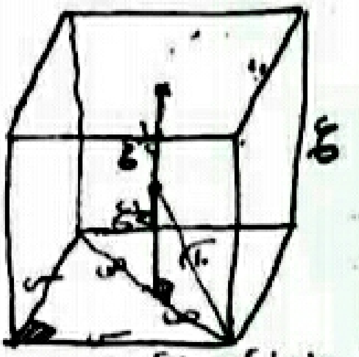
في Δ جـ د هـ القائم الزاوية في د : س² + س² = (٢ص)² ⟸ ٢س² = ٤ص² ÷ ٢

س² = ٢ص² ⟸(من ②) س² = ٢ (١٠٠ − ¼ ع²) = ٢٠٠ − ½ ع² ——— ③

بالتعويض عن س² في ① :

ح = (٢٠٠ − ½ ع²) ع = ٢٠٠ع − ½ ع³ ——— (اقتران)

ح′(ع) = ٢٠٠ − ³⁄₂ ع²



ح′(ع) = صفر ⟸ ٢٠٠ − ³⁄₂ ع² = صفر ⟸ ع² = ٢٠٠×٢ / ٣ = ٤٠٠ / ٣

ع = ٢٠ / √٣ ، ع = −٢٠ / √٣ مرفوضة

ح″(ع) = −٣ع ⟸ ح″(٢٠ / √٣) = −٣ × ٢٠ / √٣ < صفر

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة لأنها وحيدة) للاقتران ح(ع) عندما ع = ٢٠ / √٣ ،

بالتعويض في ③ عن ع = ٢٠ / √٣ : س² = ٢٠٠ − ½ × ٤٠٠ / ٣ = ٤٠٠ / ٣ ⟸ س = ٢٠ / √٣

أي أن أكبر حجم لمتوازي المستطيلات عندما تكون أبعاده ٢٠ / √٣ سم ، ٢٠ / √٣ سم ، ٢٠ / √٣ سم

٢٠٠٤م جد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين مرسوم فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في النقطة (٢ ، ٠) والرأسان الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = ٨ + ٤س − س² ، (قاعدة المثلث توازي محور السينات) ..

الحل: نرسم منحنى ق(س) = −س² + ٤س + ٨

الإحداثي السيني لرأس المنحنى = −ب / ٢أ = −٤ / (٢×−١) = ٢ ، ق(٢) = −٤ + ٨ + ٨ = ١٢ ⟸ رأس المنحنى (٢ ، ١٢)

تقطع محور السينات عندما ص = ٠ أي −س² + ٤س + ٨ = صفر ⟸ أ = −١ ، ب = ٤ ، جـ = ٨

س = (−ب ± √(ب² − ٤أجـ)) / ٢أ = (−٤ ± √(١٦ + ٣٢)) / (٢×−١) = (−٤ ± √٤٨) / −٢ ⟸ س = −١,٤٦ أو س = ٥,٤٦

نفرض نقطة (س ، ص) ∈ منحنى ق(س) فهي تحقق معادلته أي ص = −س² + ٤س + ٨ ——— ①

مساحة Δ المطلوب = ½ × القاعدة × الارتفاع

م = ½ × ٢(س − ٢) × ص نعوض عن ص من ① :

م = (س − ٢) (−س² + ٤س + ٨)

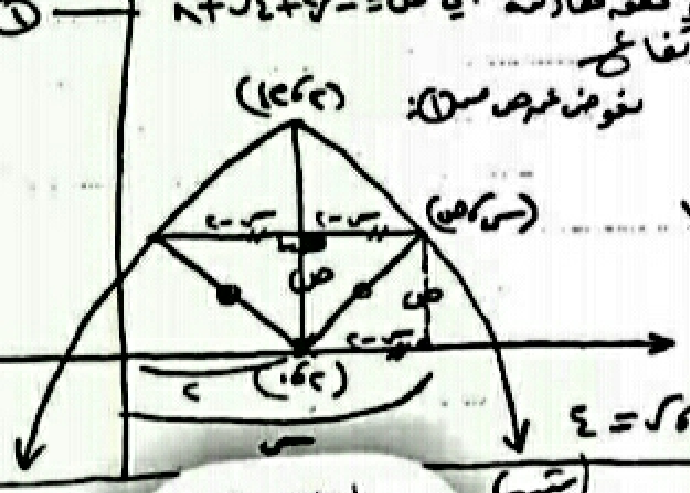
م = −س³ + ٤س² + ~~٨س~~ + ٢س² − ~~٨س~~ − ١٦

م(س) = −س³ + ٦س² − ١٦

م′(س) = −٣س² + ١٢س

م′(س) = صفر ⟸ −٣س² + ١٢س = صفر

−٣س (س − ٤) = صفر ⟸ س = ٠ مرفوضة ، س = ٤



(يتبع)

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[إثراء]

$\overline{\overline{م}}(س) = -٦س + ١٢$

$\overline{\overline{م}}(٤) = -٢٤ + ١٢ = -١٢ < صفر$

إشارة $\overline{\overline{م}}(س)$	― صفر +
	س ٤

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = ٤

أي أن مساحة أكبر مثلث عندما (س = ٤) = −٦٤ + ٩٦ − ١٦ = ١٦

٢٠٠٠ الأردن: أ ب جـ مثلث طول قاعدته ب جـ = ١٢سم وطول ارتفاعه النازل من الرأس أ يساوي ١٦، فرضت نقطة د على ب جـ ثم رسم مستقيم يوازي $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أ ب}$، $\overline{أ جـ}$ في النقطتين هـ، و، احسب طول العمود النازل من د على هـ و لتكون مساحة المثلث هـ د و أكبر ما يمكن.

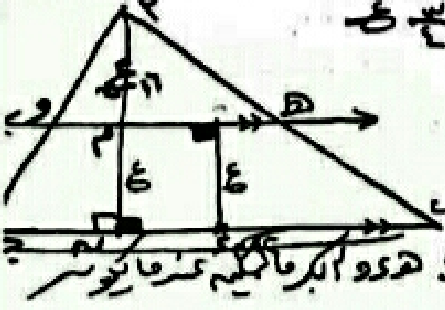
الحل: مساحة △ هـ د و = ½ × القاعدة × الارتفاع = ½ × هـ و × ع ——①

$\overline{هـ و} \parallel \overline{ب جـ}$ ⟸ △ أ هـ و ≈ △ أ ب جـ وينتج أن: $\frac{هـ و}{ب جـ} = \frac{أ هـ}{أ ب}$ ⟸ $\frac{هـ و}{١٢} = \frac{أ هـ}{أ ب}$ ——②

من التوازي △ أ م هـ ≈ △ أ ن ب وينتج أن: $\frac{أ م}{أ ن} = \frac{أ هـ}{أ ب}$ ⟸ $\frac{١٦ - ع}{١٦} = \frac{أ هـ}{أ ب}$ (لاحظ أن الشكل د م ن د مستطيل) ——③

من ② و ③ ينتج أن: $\frac{هـ و}{١٢} = \frac{١٦ - ع}{١٦}$ ⟸ ٤ هـ و = ٤٨ − ٣ع بالقسمة ÷ ٤

⟸ هـ و = ١٢ − $\frac{٣}{٤}$ع



بالتعويض عن هـ و في ①: م = ½ (١٢ − $\frac{٣}{٤}$ع) × ع

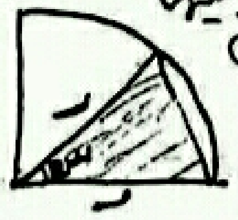
م(ع) = ٦ع − $\frac{٣}{٨}$ع² ⟸ $\overline{م}$(ع) = ٦ − $\frac{٣}{٤}$ع

$\overline{م}$(ع) = صفر ⟸ ٦ − $\frac{٣}{٤}$ع = صفر ⟸ ع = $\frac{٦ \times ٤}{٣}$ = ٨

$\overline{\overline{م}}$(ع) = −$\frac{٣}{٤}$ ⟸ $\overline{\overline{م}}$(٨) = −$\frac{٣}{٤}$

∴ م(ع) لها قيمة عظمى محلية عند ع = ٨ أي أن مساحة المثلث هـ د و أكبر ما يمكن عندما يكون ع = ٨ سم

٢٠٠٣ رسم مثلث داخل ربع دائرة نصف قطرها (ر) بحيث تنطبق قائمة المثلث على نصف قطر الدائرة ويقع رأسه على محيطها، اثبت أن أكبر مساحة لهذا المثلث تساوي ½ ر²



الحل: مساحة المثلث = ½ حاصل ضرب أي ضلعين في جيب الزاوية بينهما

م = ½ × ر × ر × جاس = ½ ر² جاس ——①

$\frac{دم}{دس}$ = ½ ر² جتاس

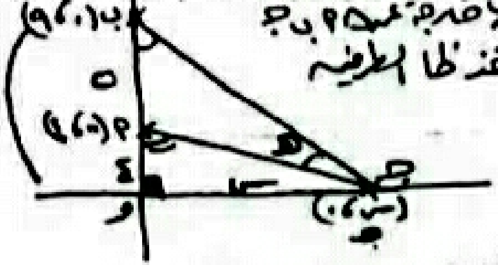
$\frac{دم}{دس}$ = صفر ⟸ ½ ر² جتاس = صفر ⟸ جتاس = صفر ⟸ س = $\frac{\pi}{٢}$

$\frac{د^٢م}{دس^٢}$ = −½ ر² جاس ⟸ $\left.\frac{د^٢م}{دس^٢}\right|_{س=\frac{\pi}{٢}}$ = −½ ر² جا $\frac{\pi}{٢}$ = −½ ر² × ١ < صفر

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ أي أن أكبر مساحة للمثلث عندما (س = $\frac{\pi}{٢}$) $\overset{من ①}{=}$ ½ ر² جا $\frac{\pi}{٢}$ = ½ ر² ——

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى [أ.أراك]

٢٠٠٣م الأردن: أ(٠، ٤)، ب(٠، ٩) نقطتان ثابتتان، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب، جد الإحداثي السيني للنقطة جـ الذي يجعل قياس زاوية أجـب أكبر ما يمكن.



الحل: $\measuredangle \text{جـأو} = \measuredangle \text{أجـب} + \measuredangle \text{أبجـ}$ لأنها خارجية عن △ أبجـ

$\measuredangle \text{أجـب} = \measuredangle \text{جـأو} - \measuredangle \text{أبجـ}$ بأخذ ظا الطرفين

$\text{ظا}\measuredangle \text{أجـب} = \text{ظا}(\measuredangle \text{جـأو} - \measuredangle \text{أبجـ})$

$$= \frac{\text{ظا جـأو} - \text{ظا}\measuredangle\text{أبجـ}}{1 + \text{ظا جـأو} \times \text{ظا}\measuredangle\text{أبجـ}}$$

$$= \frac{\frac{\text{س}}{4} - \frac{\text{س}}{9}}{1 + \frac{\text{س}}{4} \times \frac{\text{س}}{9}} = \frac{9\text{س} - 4\text{س}}{\cancel{36}\left(\frac{36 + \text{س}^2}{\cancel{36}}\right)} = \frac{5\text{س}}{\text{س}^2 + 36}$$

$$\text{قا}^2 \measuredangle \text{أجـب} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \frac{5 \times (\text{س}^2 + 36) - 5\text{س} \times 2\text{س}}{(\text{س}^2 + 36)^2} = \frac{5(\text{س}^2 + 36 - 2\text{س}^2)}{(\text{س}^2 + 36)^2}$$

$$\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \frac{5(36 - \text{س}^2)}{(\text{س}^2 + 36)^2 \times \text{قا}^2 \measuredangle \text{أجـب}}$$

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \text{صفر} \Leftarrow 36 - \text{س}^2 = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = 6$ ، س = −٦ مرفوضة

من الشكل المقابل: يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران هـ(س) عند س = ٦

إشارة $\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$ | + صفر −

٦

سلوك هـ | ↗ ↘

أي أن قياس ∡ أجـب أكبر ما يمكن عندما يكون الإحداثي السيني للنقطة جـ = ٦

حل آخر: نستخدم قاعدة الجيب $\frac{\text{أ}}{\text{جاأ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جاب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جاجـ}}$

$$\frac{5}{\text{جاهـ}} = \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 16}}{\text{جاب}} \Leftarrow \frac{5}{\text{جاهـ}} = \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 16}}{\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + 81}}} = \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 16} \times \sqrt{\text{س}^2 + 81}}{\text{س}}$$

$$\text{جاهـ} = \frac{5\text{س}}{\sqrt{(\text{س}^2 + 16)(\text{س}^2 + 81)}} = \frac{5\text{س}}{\sqrt{\text{س}^4 + 81\text{س}^2 + 16\text{س}^2 + 1296}}$$ (بقسمة البسط والمقام على س)

$$\text{جاهـ} = \frac{5}{\sqrt{\frac{\text{س}^4 + 97\text{س}^2 + 1296}{\text{س}^2}}} = \frac{5}{\sqrt{\text{س}^2 + 97 + \frac{1296}{\text{س}^2}}}$$

$$\text{جتاهـ} \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \frac{5 \times -\left(2\text{س} - \frac{2 \times 1296}{\text{س}^3}\right)}{2\sqrt{\text{س}^2 + 97 + \frac{1296}{\text{س}^2}} \times \left(\text{س}^2 + 97 + \frac{1296}{\text{س}^2}\right)}$$ بالقسمة على جتاهـ

$\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \text{صفر} \Leftarrow 5 \times 2\left(\frac{1296}{\text{س}^3} - \text{س}\right) = \text{صفر} \Leftarrow 10\left(\frac{1296 - \text{س}^4}{\text{س}^3}\right) = \text{صفر}$

$\text{س}^4 = 1296 \Leftarrow \text{س} = \sqrt[4]{1296} = 6$

إشارة $\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$ | + صفر −

٦

سلوك هـ | ↗ ↘

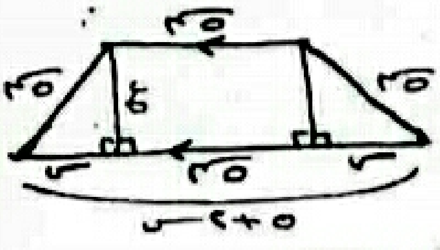
يوجد قيمة عظمى محلية وهي مطلقة للاقتران هـ(س) عند س = ٦ ..

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[إثراء]

---

(٥): شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية طول كل منها ٥ سم ، أوجد طول الضلع الرابع لتكون مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن.



الحل: مساحة شبه المنحرف = $\frac{(\text{القاعدة الصغرى} + \text{الكبرى})}{٢} \times \text{الارتفاع}$

$\text{م} = \frac{(٥ + ٥ + ٢\text{س})}{٢} \times \text{ع}$

$\text{م(س)} = (٥ + \text{س}) \sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}$ (بالتعويض عن ع من فيثاغورث)

$\text{م}'(\text{س}) = (٥ + \text{س}) \times \frac{-\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}} + \sqrt{٢٥ - \text{س}^٢} \times ١$

$\text{م}'(\text{س}) = \frac{-٥\text{س} - \text{س}^٢ + ٢٥ - \text{س}^٢}{\sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}} = \frac{-٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢٥}{\sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}}$

$\text{م}'(\text{س}) = \text{صفر} \Leftarrow -٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢٥ = \text{صفر} \times -١ \Leftarrow ٢\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٢٥ = \text{صفر}$

$(٢\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥) = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = \frac{٥}{٢}$ ، $\text{س} = -٥$ مرفوضة

من الشكل المقابل: يوجد قيمة عظمى محلية (ومطلقة) للاقتران م(س) عندما $\text{س} = \frac{٥}{٢}$

إشارة م'(س): + $\frac{٥}{٢}$ −

سلوك م(س): ↗ ↘

أي أن مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن عندما يكون طول الضلع الرابع = ٢,٥ سم

الأردن (٦): جد النقطة على منحنى الاقتران $\text{ق(س)} = \sqrt{٨\text{س}}$ والتي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٤، ٢).

الحل: نفرض أن نقطة (س، ص) على منحنى ق(س) فهي تحقق معادلته أي $\text{ص} = \sqrt{٨\text{س}}$ ـــ ①

المسافة بين النقطة (س، ص) والنقطة (٤، ٢) = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

$\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - ٤)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢}$ بالتعويض من معادلة ①:

$\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - ٤)^٢ + (\sqrt{٨\text{س}} - ٢)^٢} = \sqrt{\text{س}^٢ - \cancel{٨\text{س}} + ١٦ + \cancel{٨\text{س}} - ٤\sqrt{٨\text{س}} + ٤}$

$\text{ف(س)} = \sqrt{\text{س}^٢ - ٤\sqrt{٨\text{س}} + ٢٠}$

$\text{ف}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} - \cancel{١٦} \frac{٨}{٢\sqrt{٨\text{س}}}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\sqrt{٨\text{س}} + ٢٠}} = \frac{\text{س} - \frac{٨}{\sqrt{٨\text{س}}}}{\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\sqrt{٨\text{س}} + ٢٠}} = \frac{\text{س}\sqrt{٨\text{س}} - ٨}{\sqrt{٨\text{س}}\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\sqrt{٨\text{س}} + }}$

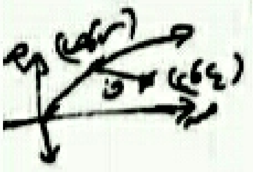
$\text{ف}'(\text{س}) = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}\sqrt{٨\text{س}} - ٨ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}\sqrt{٨\text{س}} = ٨$ بالتربيع

$\text{س}^٢ \times ٨\text{س} = ٦٤ \Leftarrow \text{س}^٣ = ٨ \Leftarrow \text{س} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (ومطلقة) للاقتران ف(س) عندما س = ٢

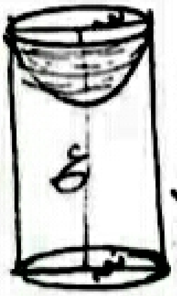
إشارة ف'(س): − صفر + عند ٢

سلوك ف(س): ↘ ↗



أي أقرب نقطة للنقطة (٤، ٢) هي $(٢، \sqrt{٨ \times ٢}) = (٢، ٤)$

٢٠٠٤ الأردن: قطعة خشب على شكل اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٠٠ط سم². حفر في هذه القطعة نصف كرة قطرها مساوٍ لطول قطر قاعدة الاسطوانة. جد طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة التي يجعل حجم الجزء المتبقي من الاسطوانة أكبر ما يمكن.



الحل: المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

م = ٢ط نق × ع

٤٠٠ط = ٢ط نق ع بالقسمة على ٢ط ⟸ نق ع = ٢٠٠ ⟸ ع = $\frac{٢٠٠}{\text{نق}}$

حجم الجزء المتبقي = حجم الاسطوانة - حجم نصف الكرة.

ح = ط نق² ع - $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ ط نق³ = ط نق² × $\frac{٢٠٠}{\text{نق}}$ - $\frac{٢}{٣}$ ط نق³

ح = ٢٠٠ط نق - $\frac{٢}{٣}$ ط نق³

$\frac{\text{دح}}{\text{دنق}}$ = ٢٠٠ط - $\frac{٢}{٣}$ ط × ٣نق² = ٢٠٠ط - ٢ط نق²

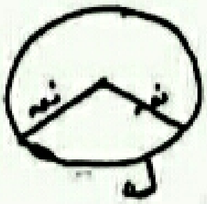
$\frac{\text{دح}}{\text{دنق}}$ = صفر ⟸ ٢٠٠ط - ٢ط نق² = صفر ⟸ نق² = $\frac{-٢٠٠ط}{-٢ط}$ = ١٠٠ ⟸ نق = ١٠

$\frac{\text{د}^2\text{ح}}{\text{دنق}^2}$ = -٤ط نق ⟸ $\frac{\text{د}^2\text{ح}}{\text{دنق}^2}\Big|_{\text{نق}=١٠}$ = -٤ط × ١٠ = -٤٠ط < صفر

∴ يوجد للاقتران ح(نق) قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) عندما نق = ١٠

أي أن حجم الجزء المتبقي أكبر ما يمكن عندما نق قاعدة الاسطوانة = ١٠سم

٢٠٠٥: قطاع دائري محيطه ٢٨سم، أثبت أن مساحته تكون في قيمتها العظمى عندما تكون زاويته المركزية تساوي ٢ راديان.



الحل: مساحة القطاع الدائري = م = $\frac{١}{٢}$ ل نق ——— ①

محيط القطاع الدائري = ٢نق + ل = ٢٨ ⟸ ل = ٢٨ - ٢نق ——— ②

بالتعويض عن ل في ①: م = $\frac{١}{٢}$ (٢٨ - ٢نق) نق

م(نق) = ١٤نق - نق²

م'(نق) = ١٤ - ٢نق

م'(نق) = صفر ⟸ ١٤ - ٢نق = صفر ⟸ نق = $\frac{-١٤}{-٢}$ = ٧

م''(نق) = -٢ ⟸ م''(٧) = -٢ < صفر
من ②:

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(نق) عندما نق = ٧سم، ل = ١٤

أي أن مساحة القطاع أكبر ما يمكن عندما تكون زاويته هـ = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ = $\frac{١٤}{٧}$ = ٢ر

٢٠٠٦ الأردن: يراد صنع صندوق مفتوح من الأعلى من صفيحة مستطيلة من المعدن طولها (٤٨)سم وعرضها (٣٠)سم وذلك بقص مربعات متساوية من زواياها الأربعة وثني الأجزاء البارزة للأعلى، جد أكبر حجم ممكن للصندوق.

(يتبع)

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية ٣ القيم العظمى

[١٢ د]

الحل: حجم الصندوق = مساحة القاعدة × الارتفاع = الطول × العرض × الارتفاع

ح = (٤٨ - ٢س) (٣٠ - ٢س) س —— ①

ح = (٤٨ - ٢س) (٣٠ س - ٢ س²)

ح = ١٤٤٠ س - ٩٦ س² - ٦٠ س² + ٤ س³

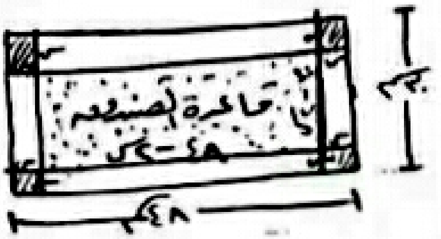
ح(س) = ٤ س³ - ١٥٦ س² + ١٤٤٠ س

ح'(س) = ١٢ س² - ٣١٢ س + ١٤٤٠

ح'(س) = صفر ⇐ ١٢ س² - ٣١٢ س + ١٤٤٠ = صفر بالقسمة على ١٢

س² - ٢٦ س + ١٢٠ = صفر ⇐ (س - ٢٠) (س - ٦) = صفر

س = ٢٠ مرفوضة ، س = ٦



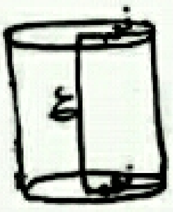
ح''(س) = ٢٤ س - ٣١٢ ⇐ ح''(٦) = ١٤٤ - ٣١٢ = -١٦٨ < صفر

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران ح(س) عندما س = ٦

أي أن أكبر حجم للصندوق عندما (س = ٦) $\underset{①}{=}$ ٢٦ × ١٨ × ٦ = ٢٨٨٨ سم³

٢٠٠٦ / ٣ جد أقل كمية من الصفيح اللازمة لصناعة علبة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين سعتها ١٦ π سم³ .

الحل: مساحة الاسطوانة الكلية = مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية لها



م = ٢ π نق² + ٢ π نق ع —— ①

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

١٦ π = π نق² × ع بالقسمة على π نق²

ع = $\frac{١٦\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}\text{نق}^2}$ = $\frac{١٦}{\text{نق}^2}$ —— ②

بالتعويض عن ع في ①: م = ٢ π نق² + ٢ π نق × $\frac{١٦}{\text{نق}^2}$

م(نق) = ٢ π نق² + $\frac{٣٢\pi}{\text{نق}}$ —— ③

م'(نق) = ٤ π نق - $\frac{٣٢\pi}{\text{نق}^2}$ = $\frac{٤\pi\,\text{نق}^3 - ٣٢\pi}{\text{نق}^2}$ = $\frac{٤\pi(\text{نق}^3 - ٨)}{\text{نق}^2}$

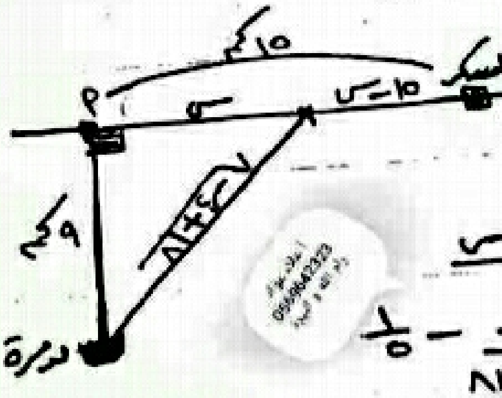
م'(نق) = صفر ⇐ نق³ - ٨ = صفر ⇐ نق³ = ٨ ⇐ نق = $\sqrt[3]{٨}$ = ٢

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(نق) عندما نق = ٢

إشارة م'(نق)	- صفر +
نق	٢
سلوك م(نق)	↘ ↗

أي أن أقل كمية من الصفيح عندما (نق = ٢) $\underset{③}{=}$ ٨ π + ١٦ π = ٢٤ π سم²

سؤال : مدمرة ترسو على بعد ٩ كيلومترات عن أقرب نقطة على الشاطئ وكنا
والمطلوب ارسال جندي من المدمرة إلى معسكر يقع على الشاطئ عند نقطة ب على بعد ١٥ كيلومترا
ماذا كان الجندي يقطع ٥ كيلومترات في الساعة سيرا على الأقدام ويقطع ٤ كيلومترات
الساعة بواسطة قارب ففي أي نقطة على الشاطئ يجب أن يهبط الجندي من القارب
لكي يصل إلى المعسكر في أقصر وقت ؟



الحل : نفرض أنه يهبط عند نقطة على الشاطئ تبعد س كم عن م

∵ الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

ن (زمن وصول الجندي إلى المعسكر) = $\frac{\sqrt{س^{٢}+٨١}}{٤} + \frac{١٥ - س}{٥}$

$\frac{دن}{دس} = \frac{١}{٤} \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+٨١}} - \frac{١}{٥} = \frac{س}{٤\sqrt{س^{٢}+٨١}} - \frac{١}{٥}$

$\frac{دن}{دس} = صفر \Leftarrow \frac{س}{٤\sqrt{س^{٢}+٨١}} - \frac{١}{٥} = صفر \Leftarrow ٥س - ٤\sqrt{س^{٢}+٨١} = صفر$

$٥س = ٤\sqrt{س^{٢}+٨١}$ بالتربيع $\Leftarrow ٢٥س^{٢} = ١٦(س^{٢}+٨١) \Leftarrow س^{٢} = ١٤٤ \Leftarrow س = ١٢$

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران ن(س) عندما س = ١٢

إشارة ن'(س) : − صفر +
١٢
سلوك ن(س) : ↘ ↗

أي أن الجندي يصل في أقصر وقت إذا هبط على مسافة ١٢ كم من م ٣ كم شاطئا .

سؤال : سلك طوله ٣٠ سم مقسم إلى جزئين طول أحدهما س ثني هذا الجزء
على شكل دائرة وثني الجزء الثاني على شكل مربع ، أوجد قيمة س لكي يكون
مجموع مساحتي سطحي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن .

الحل : مجموع مساحتي سطحي الدائرة والمربع = مساحة الدائرة + مساحة المربع

$م = \pi نق^{٢} + ل^{٢}$ —— ①

الجزء الأول من السلك = محيط الدائرة = س $\Leftarrow ٢\pi نق = س \Leftarrow نق = \frac{س}{٢\pi}$

الجزء الثاني من السلك = محيط المربع = ٣٠ − س $\Leftarrow ٤ل = ٣٠ - س \Leftarrow ل = \frac{٣٠ - س}{٤}$

بالتعويض في ① : $م(س) = \frac{س^{٢}}{\cancel{٤}\pi^{٢}} \times \cancel{\pi} + \frac{(٣٠-س)^{٢}}{١٦} = \frac{س^{٢}}{٤\pi} + \frac{(٣٠-س)^{٢}}{١٦}$

$م'(س) = \frac{٢س}{٤\pi} + \frac{٢(٣٠-س) \times -١}{١٦} = \frac{س}{٢\pi} - \frac{٣٠-س}{٨} = \frac{٨س - ٦٠\pi + ٢\pi س}{١٦\pi}$

$م'(س) = صفر \Leftarrow ٨س - ٦٠\pi + ٢\pi س = صفر \Leftarrow س(٨ + ٢\pi) = ٦٠\pi$

$س = \frac{٣٠\pi}{\pi + ٤}$ ، $م''(س) = \frac{١}{٢\pi} + \frac{١}{٨} \Leftarrow م''\left(\frac{٣٠\pi}{\pi+٤}\right) = \frac{١}{٢\pi} + \frac{١}{٨} > صفر$

∴ للاقتران م(س) قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) عندما $س = \frac{٣٠\pi}{\pi + ٤}$

مثال : جد بعدي المستطيل الواقع في الربع الأول والذي مساحته أكبر ما يمكن تنطبق قاعدته الكبرى على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى الاقتران

$ق(س) = ٤س - س^{2} + ٢$.

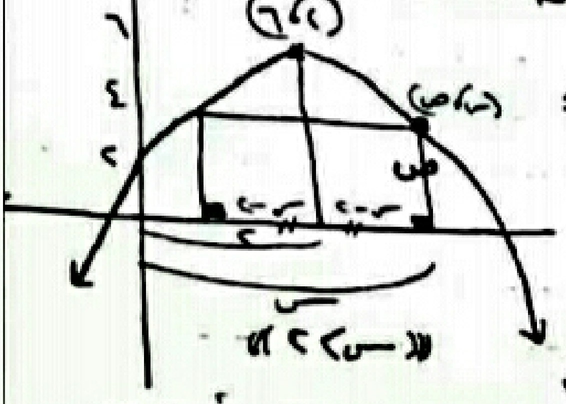
الحل : نرسم منحنى $ق(س) = -س^{2} + ٤س + ٢$ ---

الإحداثي السيني لرأس المنحنى $= \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢×-١} = ٢$ ، $ق(٢) = ٦$ ← رأس المنحنى (٢ ، ٦)

المنحنى يقطع محور السينات عندما ص = ٠ ← $-س^{2} + ٤س + ٢ =$ صفر ← أ = -١ ، ب = ٤ ، جـ =

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-٤ \pm \sqrt{٢٤}}{-٢}$ ← $س \approx -٠,٤$ ، $س \approx ٤,٤$

نفرض نقطة (س ، ص) لرأس المستطيل ∈ منحنى ق(س) منه فهي تحقق معادلته أي $ص = -س^{2} + ٤س + ٢$ ——



م = مساحة المستطيل = الطول × العرض

$م = ٢(س - ٢)\,ص$ بالتعويض عن ص من ①:

$م = (٢س - ٤)(-س^{2} + ٤س + ٢)$

$م = -٢س^{3} + ٨س^{2} + ٤س + ٤س^{2} - ١٦س - ٨$

$م(س) = -٢س^{3} + ١٢س^{2} - ١٢س - ٨$

$م'(س) = -٦س^{2} + ٢٤س - ١٢$

$م'(س) =$ صفر ← $-٦س^{2} + ٢٤س - ١٢ =$ صفر   بالقسمة على -٦

$س^{2} - ٤س + ٢ =$ صفر ← $س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٨}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{٨}}{٢} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢} = ٢ \pm$

$س = ٢ - \sqrt{٢}$ مرفوضة لأن س > ٢

$س = ٢ + \sqrt{٢}$

$م''(س) = -١٢س + ٢٤$ ← $م''(٢ + \sqrt{٢}) = -١٢(٢ + \sqrt{٢}) + ٢٤ \approx -١٦,٩٧ < ٠$ (صفر

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما $س = ٢ + \sqrt{٢}$

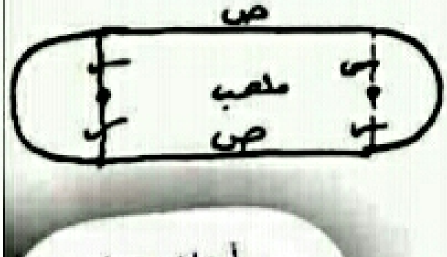
بالتعويض في ① : $ص = -(٢ + \sqrt{٢})^{2} + ٤(٢ + \sqrt{٢}) + ٢$

$ص = -٤ - \cancel{٤\sqrt{٢}} - \cancel{٢} + ٨ + \cancel{٤\sqrt{٢}} + \cancel{٢} = ٤$

∴ مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما يكون بعديه $٢(س - ٢) = ٢(\cancel{٢} + \sqrt{٢} - \cancel{٢}) = ٢\sqrt{٢}$ وعرضه = ص = ٤

تدريب: جد بعدي أكبر مستطيل من حيث المساحة يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران $ق(س) = ٣٦ - س^{2}$.

سؤال : ملعب على شكل مستطيل ينتهي بنصف دائرتين متساويتين من جهتيه ، فإذا كان محيطه يساوي ٨٠٠ م ، فما أكبر مساحة ممكنة له.



الحل : مساحة الملعب = مساحة المستطيل + مساحة نصفي الدائرتين

$م = ٢س\,ص + \pi س^{2}$ ——— ①

محيط المستطيل $= ٢ص + ٢\pi س = ٨٠٠$ بالقسمة على ٢

$ص + \pi س = ٤٠٠$ ← $ص = ٤٠٠ - \pi س$ ——— ②

(يتبع)

بالتعويض عن ص في ① : $م = ٢س(٤٠٠ - \pi س) + \pi س^٢ = ٨٠٠س - ٢\pi س^٢ + \pi س^٢$

$م(س) = ٨٠٠س - \pi س^٢$

$م'(س) = ٨٠٠ - ٢\pi س$

$م'(س) = صفر \Leftarrow ٨٠٠ - ٢\pi س = صفر \Leftarrow س = \frac{٨٠٠}{٢\pi} = \frac{٤٠٠}{\pi}$

$م''(س) = -٢\pi \Leftarrow م''(\frac{٤٠٠}{\pi}) = -٢\pi < صفر$

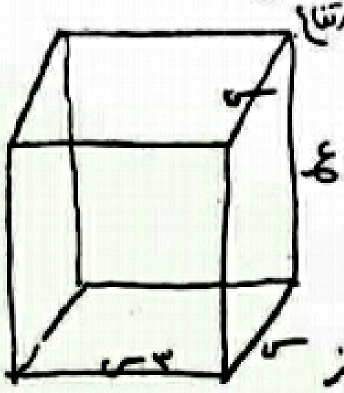
∴ يوجد قيمة عظمى محلية (ومطلقة) للاقتران م(س) عندما $س = \frac{٤٠٠}{\pi}$

أي أن مساحة الملعب أكبر ما يمكن عندما $(س = \frac{٤٠٠}{\pi}) = ٨٠٠ \times \frac{٤٠٠}{\pi} - \pi \times (\frac{٤٠٠}{\pi})^٢$

$= \frac{١٦٠٠٠٠}{\pi}$ وحدة مربعة

سؤال: متوازي مستطيلات طول قاعدته تساوي ٣ أمثال عرضها، فإذا كان مجموع أبعاده الثلاثة ١٨٠ سم، فأوجد هذه الأبعاد التي تجعل حجم المتوازي أكبر ما يمكن.

الحل: حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع = الطول × العرض × الارتفاع



$ح = ٣س \times س \times ع = ٣س^٢ ع$ —— ①

مجموع أبعاده $= ٣س + س + ع = ١٨٠ \Leftarrow ع = ١٨٠ - ٤س$ —— ②

بالتعويض عن ع في ① : $ح = ٣س^٢(١٨٠ - ٤س)$

$ح(س) = ٥٤٠س^٢ - ١٢س^٣$

$ح'(س) = ١٠٨٠س - ٣٦س^٢$

$ح'(س) = صفر \Leftarrow ١٠٨٠س - ٣٦س^٢ = صفر \Leftarrow -٣٦س(س - ٣٠) = صفر$

س = ٠ مرفوضة ، س = ٣٠

$ح''(س) = ١٠٨٠ - ٧٢س \Leftarrow ح''(٣٠) = ١٠٨٠ - ٢١٦٠ = -١٠٨٠ < صفر$

∴ يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ح(س) عندما س = ٣٠

أي أن الحجم أكبر ما يمكن عندما يكون الطول = ٣ × ٣٠ = ٩٠ سم ، العرض = ٣٠ سم ، ع $\underset{②}{=}$ ٦٠

سؤال: أوجد عددين موجبين مجموعهما ١٢ بحيث يكون (أولاً) حاصل ضربهما أكبر ما يمكن (ثانياً) مجموع مكعبيهما أصغر ما يمكن

الحل: (أولاً) نفرض أن العددين س ، ص

حاصل ضرب العددين = العدد الأول × العدد الثاني $\Leftarrow ح = س ص$ —— ①

مجموع العددين $= س + ص = ١٢ \Leftarrow ص = ١٢ - س$ —— ②

بالتعويض عن ص في ① : $ح(س) = س(١٢ - س) = ١٢س - س^٢$

$ح'(س) = ١٢ - ٢س$

$ح'(س) = صفر \Leftarrow ١٢ - ٢س = صفر \Leftarrow س = \frac{١٢}{٢} = ٦$

(يتبع)

تابع (٣−٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[تابع]

$ج''(س) = -٢ \Leftarrow ج''(٦) = -٢ < صفر$

∴ للاقتران ج(س) قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) عندما س = ٦

أي أن حاصل ضرب العددين أكبر ما يمكن عندما العدد الأول = س = $\boxed{٦}$ ، العدد الثاني = ص = ١٢ − ٦ = $\boxed{٦}$

(ثانياً) نفرض أن العددين س ، ص

مجموع مكعبيهما = ج = $س^{٣} + ص^{٣}$ ——— ①

مجموع العددين = س + ص = ١٢ ⟸ ص = ١٢ − س ——— ②

بالتعويض عن ص في ①: $ج(س) = س^{٣} + (١٢ - س)^{٣}$

$ج'(س) = ٣س^{٢} + ٣(١٢ - س)^{٢} \times -١ = ٣س^{٢} - ٣(١٢ - س)^{٢}$

$ج'(س) = ٣س^{٢} - ٣(١٤٤ - ٢٤س + س^{٢}) = \cancel{٣س^{٢}} - ٤٣٢ + ٧٢س - \cancel{٣س^{٢}}$

$ج'(س) = ٧٢س - ٤٣٢ = ٧٢(س - ٦)$

$ج'(س) = صفر \Leftarrow س - ٦ = صفر \Leftarrow س = ٦$

$ج''(س) = ٧٢ \Leftarrow ج''(٦) = ٧٢ > صفر$

∴ للاقتران ج(س) قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) عندما س = ٦

أي أن مجموع المكعبين أصغر ما يمكن عندما يكون العدد الأول = س = $\boxed{٦}$ ، العدد الثاني = ص = $\boxed{٦}$

سؤال: قطاع دائري محيطه ١٦سم ، أوجد طول نصف قطر دائرته عندما تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن.

الحل: مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق ——— ①

محيط القطاع الدائري = ٢نق + ل = ١٦ ⟸ ل = ١٦ − ٢نق ——— ②

بالتعويض عن ل في ①: م = $\frac{١}{٢}$ (١٦ − ٢نق) نق

$م(نق) = ٨نق - نق^{٢}$

$م'(نق) = ٨ - ٢نق$

$م'(نق) = صفر \Leftarrow ٨ - ٢نق = صفر \Leftarrow نق = ٤$

$م''(نق) = -٢ \Leftarrow م''(٤) = -٢ < صفر$

∴ للاقتران م(نق) قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) عندما نق = ٤سم

أي أن مساحة القطاع أكبر ما يمكن عندما نق = ٤سم

سؤال: أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة إذا كانت المساحة الكلية لسطحها تساوي ٢٤π سم².

الحل: حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$ح = \pi نق^{٢} ع$ ——— ①

تابع (٢-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

مثال (٦)

المساحة الكلية للاسطوانة = مجموع مساحتي قاعدتيها + مساحة سطحها الجانبي (للاسطوانة)

$٢٤\pi = ٢\pi\,\text{نق}^{٢} + ٢\pi\,\text{نق}\,\text{ع}$ بالقسمة على ٢π

$١٢ = \text{نق}^{٢} + \text{نق}\,\text{ع} \Leftarrow \text{ع} = \frac{١٢ - \text{نق}^{٢}}{\text{نق}}$ —— ①

بالتعويض عن ع في ①:

$\text{ح}(\text{نق}) = \pi\,\text{نق}^{٢}\left(\frac{١٢ - \text{نق}^{٢}}{\text{نق}}\right) = ١٢\pi\,\text{نق} - \pi\,\text{نق}^{٣}$

$\text{حَ}(\text{نق}) = ١٢\pi - ٣\pi\,\text{نق}^{٢}$

$\text{حَ}(\text{نق}) = \text{صفر} \Leftarrow ١٢\pi - ٣\pi\,\text{نق}^{٢} = \text{صفر} \Leftarrow \text{نق}^{٢} = \frac{١٢\pi}{٣\pi} = ٤ \Leftarrow \text{نق} = ٢$

$\text{حً}(\text{نق}) = -٦\pi\,\text{نق} \Leftarrow \text{حً}(٢) = -٦\pi \times ٢ = -١٢\pi < \text{صفر}$

للاقتران ح(نق) قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) عندما نق = ٢

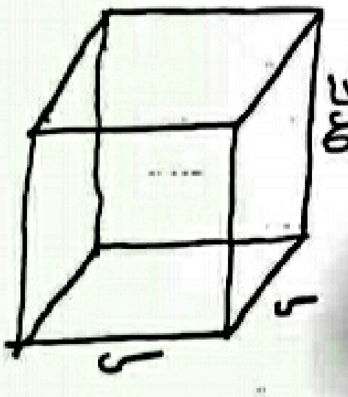
أي أن حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن عندما (نق = ٢سم) $= ١٢\pi \times ٢ - \pi \times ٨ = ١٦\pi\,\text{سم}^{٣}$

سؤال: يراد صنع خزان على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وبدون غطاء بحيث يتسع لأربعة أمتار مكعبة من الماء وتتكلف المادة التي تصنع منها الخزان ١٠ دنانير للمتر المربع، أوجد أبعاد الخزان التي تجعل تكلفته أقل ما يمكن

الحل:

التكاليف = ت = مساحة الخزان الكلية × تكلفة المتر المربع

$\text{ت} = (\text{س}^{٢} + ٤\text{س}\,\text{ع}) \times ١٠$ —— ①



حجم المتوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع = الطول × العرض × الارتفاع

$٤ = \text{س} \times \text{س} \times \text{ع} \Leftarrow \text{ع} = \frac{٤}{\text{س}^{٢}}$ —— ②

بالتعويض عن ع في ①:

$\text{ت} = \left(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} \times \frac{٤}{\text{س}^{٢}}\right) \times ١٠$

$\text{ت}(\text{س}) = ١٠\text{س}^{٢} + \frac{١٦٠}{\text{س}}$

$\text{تَ}(\text{س}) = ٢٠\text{س} - \frac{١٦٠}{\text{س}^{٢}} = \frac{٢٠\text{س}^{٣} - ١٦٠}{\text{س}^{٢}} = \frac{٢٠(\text{س}^{٣} - ٨)}{\text{س}^{٢}}$

$\text{تَ}(\text{س}) = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}^{٣} - ٨ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}^{٣} = ٨ \Leftarrow \text{س} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران ت(س) عندما س = ٢

إشارة تَ(س): − صفر +

٢

سلوك ت(س): ↘ ↗

أي أن تكلفة صنع الخزان أقل ما يمكن عندما يكون طول قاعدة الخزان = س = ٢ متر، عرضها = ٢ متر،

$\text{ع} = \frac{٤}{٤} = ١\,\text{متر}$

سؤال: معدل تغير مساحة المربع بالنسبة لمحيطه عندما يكون محيطه ٢٤سم يساوي

أ) ٣ سم²/سم ب) ٤ سم²/سم ج) ٦ سم²/سم د) ١٢ سم²/سم

الحل: مساحة المربع = م = س × س —— ①

محيط المربع = ٤ × س ⇐ س = $\frac{\text{محيط المربع}}{٤}$ = $\frac{ل}{٤}$

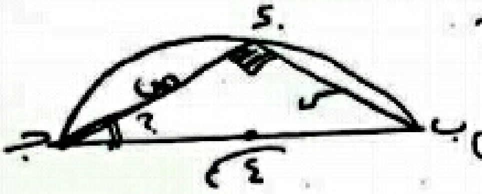
بالتعويض عن س في ①: م = $\frac{ل}{٤} \times \frac{ل}{٤}$ = $\frac{ل^2}{١٦}$

$\frac{دم}{دل} = \frac{٢ل}{١٦}$ ⇐ $\frac{دم}{دل}\Big|_{ل=٢٤} = \frac{٢ \times ٢٤}{١٦}$ = ٣ سم²/سم

سؤال: يمثل الشكل المجاور نصف دائرة طول قطرها ب جـ = ٤ سم، د نقطة تتحرك على محيط نصف الدائرة لترسم مثلث قائم هو ب د جـ، جد قياس الزاوية ب جـ د التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

الحل: مساحة المثلث ب د جـ = ½ × القاعدة × الارتفاع

م = ½ س ص —— ①



من نظرية فيثاغورس: ص² = ١٦ − س² ⇐ ص = $\sqrt{١٦ - س^2}$ —— ②

بالتعويض عن ص في ①:

م = ½ س $\sqrt{١٦ - س^2}$ = ½ $\sqrt{١٦س^2 - س^4}$

لاحظ س = $\sqrt{س^2}$ عندما س ≥ ٠ !

م‵(س) = ½ × $\frac{٣٢س - ٤س^3}{٢\sqrt{١٦س^2 - س^4}}$ = $\frac{٤س(٨ - س^2)}{٤\sqrt{١٦س^2 - س^4}}$

م‵(س) = صفر ⇐ س = صفر مرفوضة ، ٨ − س² = صفر ⇐ س = $\sqrt{٨}$ ، س = $-\sqrt{٨}$ مرفوضة

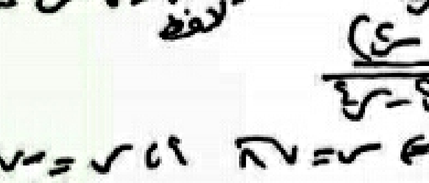
من الشكل المقابل: يوجد قيمة عظمى محلية (ومطلقة) للاقتران م(س) عندما س = $\sqrt{٨}$ أي أن مساحة Δ ب د جـ أكبر ما يمكن

إشارة م‵(س)	+ $\sqrt{٨}$ −
سلوك م(س)	↗ ↘

عندما يكون قياس جـ = ٤٥° لأن جا جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\sqrt{٨}}{٤}$ = $\frac{٢\sqrt{٢}}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ق∠جـ = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$

سؤال: أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٤ سم، ب جـ = ٩ سم، رسم مستقيم يمر بالنقطة جـ ويقطع امتداد أ د في هـ، وامتداد أ ب في و، جد أصغر مساحة ممكنة للمثلث أ هـ و.



الحل: مساحة Δ أ هـ و = ½ × القاعدة × الارتفاع

م = ½ (س + ٩)(٤ + ص) —— ①

(يتبع)

ص ١٢٧

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى

[ذ٢ ١٨]

في Δ هـ أ و : ء جـ // أ و ⟸ Δ هـ ء جـ ≈ Δ هـ أ و ويتحول:

$\frac{٤+ص}{٤} = \frac{٩+س}{س}$ ، بالضرب في ٤

$٤+ص = \frac{٣٦+٤س}{س} \Leftarrow ص = \frac{٣٦}{س} + \cancel{٤} - \cancel{٤} = \frac{٣٦}{س}$ — ①

بالتعويض عن ص في ① :

$م = \frac{١}{٢}(٩+س)(٤+\frac{٣٦}{س}) = (س+٩)(٢+\frac{١٨}{س})$

$م(س) = ١٨ + ٢س + \frac{١٦٢}{س} + ١٨ = ٣٦ + ٢س + \frac{١٦٢}{س}$

$م'(س) = ٢ - \frac{١٦٢}{س^٢} = \frac{٢س^٢ - ١٦٢}{س^٢} = \frac{٢(س^٢ - ٨١)}{س^٢}$

$م'(س) = صفر \Leftarrow س^٢ - ٨١ = صفر \Leftarrow س = ٩$ ، أو $س = -٩$ مرفوضة

من الشكل المقابل: يوجد قيمة صغرى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عند س = ٩

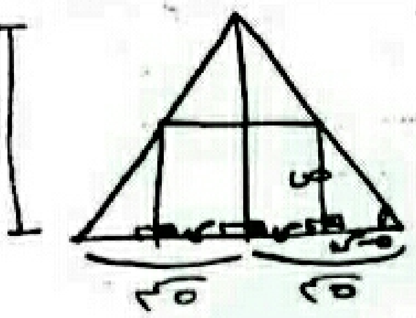
إشارة م′(س) : − صفر +
٩
سلوك م(س) : $\searrow \quad \nearrow$

أي أن مساحة Δ هـ أ و أصغر ما يمكن عندما (س = ٩) $= ٣٦ + ١٨ + \frac{١٦٢}{٩} = ٧٢$ سم²

أ علاء عواد
0569642323
رام الله و البيرة
مع تمنياتي لكم جميعا
بالتوفيق والتفوق

تابع (٣-٦) تطبيقات عملية على القيم القصوى [الحلول]

سؤال: مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ١٠سم وارتفاعه ١٢سم يراد رسم مستطيل داخله حيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث ويقع الرأسان الآخران على ساقيه أوجد بعدي المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن.



الحل: مساحة المستطيل = الطول × العرض

$م = ٢س ص$ —— ①

من تشابه المثلثات ~ : $\frac{ص}{١٢} = \frac{٥-س}{٥}$ بالضرب في ١٢

$ص = \frac{١٢}{٥}(٥-س)$ —— ②

بالتعويض عن ص في ①: $م = ٢س \times \frac{١٢}{٥}(٥-س)$

$م(س) = ٢٤س - \frac{٢٤}{٥}س^٢$

$م'(س) = ٢٤ - \frac{٤٨}{٥}س$

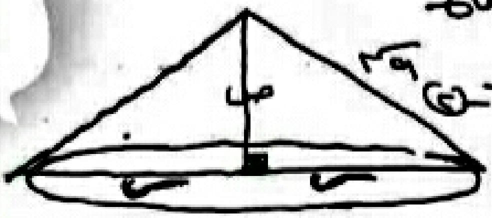
$م'(س) = صفر \Leftarrow ٢٤ - \frac{٤٨}{٥}س = صفر \Leftarrow س = \frac{٢٤ \times ٥}{٤٨} = \frac{٥}{٢}$

$م''(س) = -\frac{٤٨}{٥} \Leftarrow م''(\frac{٥}{٢}) = -\frac{٤٨}{٥} < صفر$

∴ يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران م(س) عندما $س = \frac{٥}{٢}$

أي أن مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما يكون بعديه ٢س = ٥سم ، ص = ٦سم

سؤال: مثلث قائم الزاوية طول وتره ٩سم وطول كل من ضلعي القائمة س ، ص جد أبعاد أكبر حجم للمخروط الناتج عن الدوران.



الحل: حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$ح = \frac{١}{٣}\pi س^٢ \times ص$ —— ①

من نظرية فيثاغورس: $ص^٢ = ٨١ - س^٢ \Leftarrow ص = \sqrt{٨١ - س^٢}$ —— ②

بالتعويض عن ص في ①:

$ح = \frac{١}{٣}\pi س^٢\sqrt{٨١-س^٢}$

$ح = \frac{١}{٣}\pi\sqrt{س^٤(٨١-س^٢)}$ « لاحظ $س^٢ = \sqrt{س^٤}$ عندما $س \geq صفر$ »

$ح(س) = \frac{١}{٣}\pi\sqrt{٨١س^٤ - س^٦}$

$ح'(س) = \frac{١}{٣}\pi \times \frac{٣٢٤س^٣ - ٦س^٥}{٢\sqrt{٨١س^٤-س^٦}} = \frac{\cancel{\pi}س^٣(٥٤-س^٢)}{\cancel{\pi}\sqrt{٨١س^٤-س^٦}}$

$ح'(س) = صفر \Leftarrow س = صفر$ مرفوضة ، $٥٤ - س^٢ = صفر \Leftarrow س = \sqrt{٥٤}$ ، $س = -\sqrt{٥٤}$ مرفوضة

من الشكل المقابل: يوجد قيمة عظمى محلية (وهي مطلقة) للاقتران ح(س) عندما $س = \sqrt{٥٤}$ أي أن حجم المخروط أكبر ما يمكن لما يكون طول نصف قطر قاعدته $س = \sqrt{٥٤}$ سم وارتفاعه $ص = \sqrt{٢٧}$ سم

إشارة ح'(س) : + + + | − − −

سلوك ح(س) ↗ $\sqrt{٥٤}$ ↘

تطبيقات على القيم القصوى :

١- قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠ م. أوجد بعديها لتكون مساحتها أكبر مايمكن .
البعدان (١٥٠ ، ١٥٠)

٢- قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٤٠٠ م^{٢} . ما أقل محيط ممكن للقطعة ؟
المحيط =٨٠م

٣- عددان موجبان مجموعهما ٢٠ . جد العددين بحيث أولا: مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن
العددان (١٠ ، ١٠)

ثانيا: حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن.
العددان $\left(\frac{٢٠}{٣} ، \frac{٤٠}{٣}\right)$

٤- جد الإحداثي السيني للنقطة التي عندها ميل المماس لمنحنى $ق(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س^{٢} - ٤$ أقل مايمكن .
س=٣

٥- يتحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة $ف = ن^{٤} - ١٢ن^{٣} + ٨ن^{٢} - ٦ن + ٣٠$ ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني.

جد أقل تسارع لهذا الجسم .
التسارع= −٩٢م/ث^{٢}

٦- جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يكون أحد بعديه منطبقا على محور السينات ورأساه الآخران يقعان على منحنى الاقتران $ص = ١٢ - س^{٢}$.
س=٢، المساحة=٣٢ وحدة مربعة

٧- جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يكون أحد بعديه منطبقا على محور السينات ورأساه الآخران يقعان على منحنى الاقتران $ق(س) = ٨ - س^{٢} + ٤س$.
س=٤، المساحة=٣٢ وحدة مربعة

٨- أ ب جـ د مستطيل يقع رأساه أ ، ب على منحنى $ق(س) = ٢س^{٢}$ ، ورأساه جـ ، د على منحنى $هـ(س) = ٣٦ - س^{٢}$. جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن .
س=٢، البعدان ٤ ، ٢٤

٩- أ ب جـ د مستطيل يقع رأساه ب ، جـ على محور السينات منحنى ، والرأس أ في الربع الأول على منحنى $هـ(س) = ١٢ - \frac{س^{٢}}{٤}$ والرأس د في الربع الثاني على منحنى $ق(س) = ١٢ - س^{٢}$. جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل.
المساحة=٤٨ وحدة مربعة

١٠- مثلث متساوي الساقين مرسوم فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في نقطة الأصل والرأسان الآخران على منحنى الاقتران $ق(س) = ٢٧ - س^{٢}$.

جد أكبر مساحة لهذا المثلث .
س=٣، المساحة=٥٤ وحدة مربعة

١١- جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات وجميع رؤوسه على منحنى الاقتران $ق(س) = ٩ - س^{٢}$.
س=١، المساحة= ٣٢وحدة مربعة

١٢- جد أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم .
المساحة= ٢٠٠وحدة مربعة

١٣- قطاع دائري محيطه ٢٠م ،جد نصف قطر دائرته لتكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن .
نق=٥

١٤- مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٨سم وارتفاعه ١٠سم ، يراد اقتطاع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث والرأسان الآخران على ساقي المثلث. جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن . (البعدان ٤ ، ٥

١٥- جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) بحيث يصنع مع المحورين في الربع الأول مثلثا مساحته أصغر ما يمكن . (٢ص+٣س−١٢=٠

١٦- جد ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم والتي يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم نصف قطره ٥سم،وارتفاعه ٩سم. (الارتفاع=٣سم

١٧- برهن أن أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط .

١٨- جد نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ٩سم بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن . (نصف القطر= $\sqrt{٧٢}$ سم

١٩- جد ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التي يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها $٣\sqrt{٣}$ سم. (الارتفاع=٦سم)

٢٠- قطعة خشب على شكل أسطوانة دائرية مساحتها الجانبية ٤٠٠π سم^٢ . حفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساو لطول قطر قاعدة الأسطوانة . جد طول قطر قاعدة الأسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة أكبر ما يمكن . (نق = ١٠ سم)

٢١- مستطيل طول قطره ١٠سم ، إذا دار المستطيل دورة كاملة حول أحد أضلاعه فاحسب أكبر حجم ممكن للأسطوانة الناتجة . الحجم= $\frac{٢٠٠٠\pi}{٣\sqrt{٣}}$ سم^٣

٢٢- لوح من الصفيح على شكل مستطيل محيطه ٣٦سم،طوله س سم وعرضه ص سم . إذا حوّل هذا اللوح إلى أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ص ومحيط قاعدتها س فجد قيمتي س ، ص اللتان تجعلان حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن . (س=١٢ ، ص=٦)

٢٣- مثلث قائم الزاوية طول وتره ٩سم وطول كل من ضلعي القائمة س ، ص سم .إذا دار المثلث دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة فما أكبر حجم ممكن للمخروط الناتج؟ الحجم= $٥٤\sqrt{٣}\pi$ سم^٣

٢٤- إذا دارت صفيحة على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه ٤٠ سم دورة كاملة حول قاعدتها فما أكبر حجم ممكن للجسم الناتج؟ الحجم= $\frac{٢٠٠٠\pi}{٣}$

٢٥- قطاع دائري زاويته المركزية بالتقدير الدائري هـ ونصف قطر دائرته نق حوّل إلى مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ر وارتفاعه ع. ما قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن؟ هـ= $٢\pi\sqrt{\frac{٢}{٣}}$

٢٦- صفيحة مستطيلة الشكل مساحتها ٥٠ سم^٢ يراد طباعة إعلان عليها فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١سم ، وفي كل من الجانبين ٢سم .جد بعدي الورقة لتكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن . س=٥ ، ص=١٠

٢٧- جد النقطة على منحنى ق(س) = $\sqrt{٨س}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٤، ٢) النقطة (٢ ، ٤)

٢٨- بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة (٨ ، ٠) باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٤سم/ث ، وفي نفس اللحظة بدأت نقطة أخرى الحركة على محور السينات من النقطة(٠ ، ١٠) على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢سم/ث. متى يكون البعد بين النقطتين أقل ما يمكن ؟ (ن = ٠،٦)

٢٩- لدى رجل حقل مستطيل يريد إحاطته بسياج ثم قسمه إلى ثلاثة أقسام بسياجين يوازيان أحد أضلاعه، فإذا كان لديه ١٠٠٠م من السياج فأوجد أكبر مساحة يمكن إحاطتها بالسياج. المساحة=٣١٢٥٠م^٢

٣٠- أ ب جـ د شبه منحرف فيه ثلاثة أضلاع متساوية طول كل منها ٢٠سم. جد طول الضلع الرابع لشبه المنحرف الذي يجعل مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن. (طول الضلع الرابع=٤٠سم)

٣١- مثلث طولا ضلعين فيه ٥سم ، ٧سم والزاوية المحصورة بينهما قياسها هـ. جد قياس هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن. هـ= $\frac{\pi}{٢}$

٣٢- دائرة قطرها $\overline{أب}$ طوله ٤سم، ابتدأت النقطة ب الحركة على الدائرة من ب باتجاه أ. جد قياس ∢أبجـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن. هـ= $\frac{\pi}{٤}$

٣٣- قطاع دائري محيطه ٢٠م، فجد نصف قطر دائرته بحيث تكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن. نق=٥سم

٣٤- مستقيم يمر بالنقطة جـ(١ ، ٢) ويقطع محور السينات في النقطة أ (س ، ٠) ومحور الصادات في ب (٠ ، ص) حيث س>٠، ص>٠. جد أقل مساحة ممكنة للمثلث أ ب و حيث و نقطة الأصل. س=٢، المساحة=٤سم

٣٥- صندوق بلا غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل حجمه ٣٢سم^{٣}، جد أبعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة في صنعه أقل ما يمكن. الأبعاد ٤،٤،٢سم

٣٦- يراد صنع صندوق من الخشب الرقيق بدون غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل. جد أكبر حجم ممكن للصندوق بحيث تبلغ تكاليف صناعته ١٤٤ دينارا علما بأن تكلفة المتر المربع الواحد من الخشب ٣ دنانير. الحجم= ٣٢سم^{٣}

٣٧- احسب أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين يمكن صنعها من صفيحة معدنية مساحتها ٦٠٠π سم^{٢}. الحجم= ٢٠٠٠π سم^{٣}

٣٨- جد أقل كمية من المعدن اللازم لصنع مكيال للزيت على شكل أسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين سعتها ٢٠٠٠π سم^{٣}. الكمية= ٦٠٠π سم^{٢}

٣٩- خزان ماء أسطواني الشكل سعته ٣٠٠٠π م^{٣} يكلف المتر المربع من القاعدة ٤ دنانير ومن الجوانب ديناران، غطاء الخزان على شكل نصف كرة جوفاء يكلف المتر المربع منها دينار واحد، ما أبعاد الخزان لتكون كلفة صنعه أقل ما يمكن؟ نق=١٠، ع=٣٠

٤٠- يراد إقامة سياج حول قطعة أرض على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة، فإذا كانت تكلفة المتر الواحد من السياج على الجانبين المستقيمين ٤ دنانير وعلى الأجزاء المنحنية ٩ دنانير، ما أكبر مساحة ممكنة يمكن إحاطتها بسياج تكلفته ٤٠٠ دينار؟ المساحة= $\frac{١٢٥٠}{\pi}$ م^{٢}

٤١- إذا كانت تكلفة (س) من الوحدات التي ينتجها مصنع شهريا هي (٣س+٩٥٠) وكان سعر الوحدة الواحدة (٣٠-٥، ١٠ س)، فجد عدد الوحدات (س) اللازم إنتاجها ليكون الربح أكبر ما يمكن. س=٩

٤٢- وجد مصنع أن التكلفة الكلية بالدينار للإنتاج الأسبوعي لغرفة نوم عددها س تقدر بالاقتران ك(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٨٠س + ٥٠٠ فإذا بيعت كل غرفة نوم بسعر ٢٨٠٠ دينار، فما الإنتاج الأسبوعي للمصنع الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن؟ الإنتاج=٣٢ غرفة

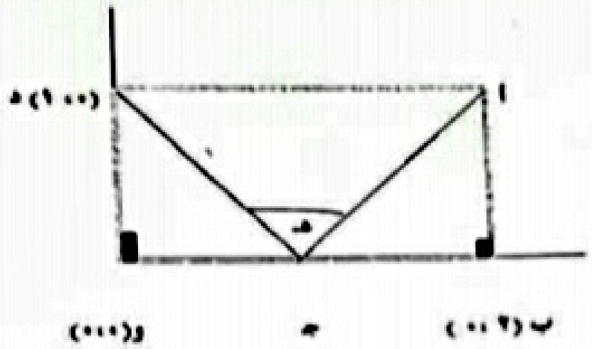
٤٣- يبيع مصنع (س) من سلعة ما بسعر ٣٠ دينار لكل وحدة، فإذا كان الربح اليومي يعطى بالعلاقة ٤٠س − س^{٢} − ١٠٠ فجد عدد الوحدات اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة اليومية أقل ما يمكن؟ س=٥

٤٤- اتفقت إحدى المدارس مع شركة سياحية على تسيير رحلة إلى القدس بأن يدفع كل طالب ٦٥ دينار إذا كان عدد الطلاب ١٠٠ طالب، وإذا زاد عدد الطلاب عن ١٠٠ فإن الشركة تخفض نصف دينار عن كل مشترك جديد. جد عدد المشتركين ليكون إيراد الشركة أكبر ما يمكن. ١٦٥ طالب

٤٥- أ ب و د مستطيل (كما هو موضح بالشكل)

ما طول جـو ليكون قياس هـ أكبر ما يمكن ؟

(طول جـو = ١)

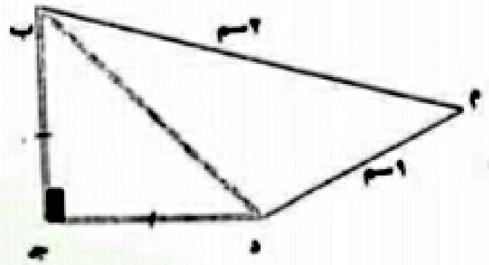


٤٦- في الشكل : جـ د = ب جـ ، زاوية جـ قائمة ، م ب ثابت وطوله = ٢سم ، م د يدور في مستوى الشكل وطوله ثابت = ١سم

جد قياس زاوية ب م د

ليكون مساحة الشكل الرباعي

أكبر ما يمكن .



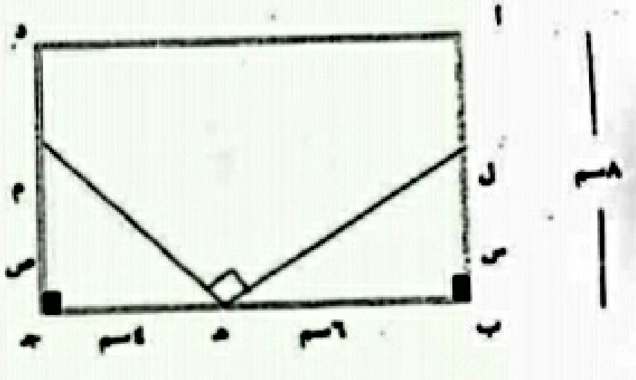
(١٣٥°)

٤٧- أ ب جـ د مستطيل ، أ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٠سم ، هـ ب = ٦سم ، ل ب = س ، م جـ = ص ، زاوية ل هـ م قائمة (كما بالشكل)

ما قيمة كل من س، ص

ليكون مساحة الشكل أ ل هـ م د

أكبر ما يمكن؟



(س = ٤ ، ص = ٦)

٤٨- أ ب جـ د مستطيل

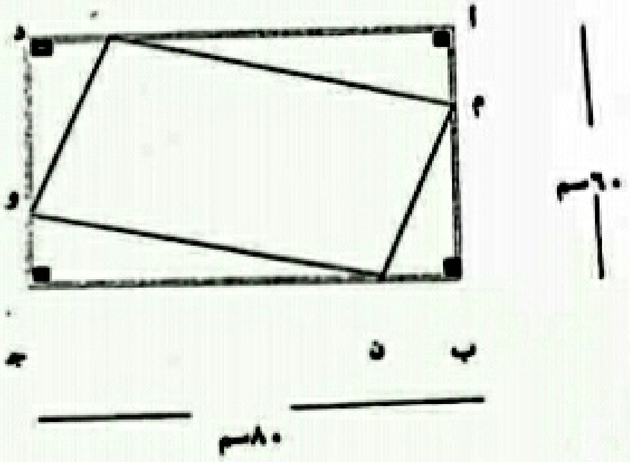
أب=٦٠سم ، ب جـ=٨٠سم

م هـ و ل متوازي الأضلاع

ب هـ= س (كما بالشكل)

جد س التي تجعل مساحة متوازي الأضلاع

أكبر ما يمكن علما بأن م ب = ٢ ب هـ؟



(٢٧،٥سم)

٩) نقطتان ثابتتان ، جـ نقطة متحركة على محور السينات الموجب . جد الإحداثي السيني للنقطة جـ الذي يجعل قياس زاوية أ جـ ب أكبر

٤٩- أ(٠ ، ٤) ، ب(٠ ، ٩)

ما يمكن.

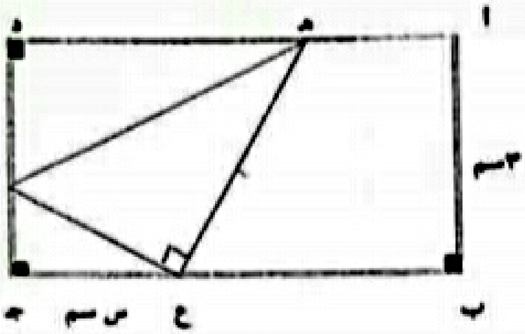
س=٦

٥٠- في الشكل: أ ب جـ د مستطيل

أ ب=٣سم ، طويت الزاوية أ د جـ وفق الخط و هـ حتى انطبق الرأس د على المستقيم ب جـ

في النقطة ع: ع جـ = س سم

جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث و جـ ع .



(س = $\sqrt{٣}$ ، المساحة= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

٥١- أ ب جـ د مستطيل (كما بالشكل)

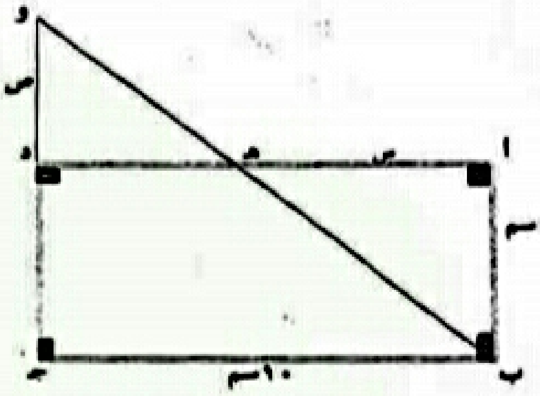
أ ب= ٤سم ، ب جـ= ١٠سم

مد الضلع جـ د على استقامته إلى و

وصل ب و فقطع أ د في هـ

أ هـ=س ، د و= ص

جد قيمتي س ، ص لتكون مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، أ هـ ب أصغر ما يمكن.



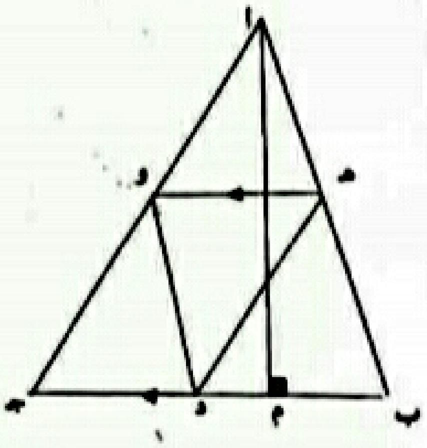
(س = ٥$\sqrt{٢}$ ، ص = ٤($\sqrt{٢}$ − ١))

٥٢- أ ب جـ مثلث فيه ب جـ = ١٢سم ، الارتفاع أم=١٦سم

هـ و يوازي ب جـ

ما طول العمود النازل من د على هـ و لتكون

مساحة المثلث د هـ و أكبر ما يمكن ؟



(طول العمود= ٨سم)

مع تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق والتفوق والنجاح الباهر

تحياتي لكم جميعا اخوكم أ علاء عواد
ماجستير في الرياضيات البحته
مدير مركز عمر التعليمي رام الله و البيرة
معلم الرياضيات في مدرسة ذكور عين يبرود الثانوية
محاضر في جامعة القدس المفتوحة
لمختلف مساقات الرياضيات
معلم الرياضيات في قناة I teacher الكترونيه
دورات تعليمية الكترونيه ودورات تعليمية
لطلبة التوجيهي لمجموعات
ولقاءات خاصة لطلبة التوجيهي في مدينتي رام الله و البيرة
للحجز والاستفسار : أ علاء عواد 0569642323
او زوروا صفحتنا على الفيس بوك
/ رام الله والبيره/أ علاء عواد

مركز براديس
رام الله مقابل مدرسة
الفرندز الاساسيه
عمارة مطعم كاستلو /
الطابق الثالث

Paradise Center
شركة براديس للإستشارات والتدريب