س : استخدم خصائص المحدّدات لإثبات أن :

(P)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ س & ص & ع \\ صاع & ساع & ساص \end{vmatrix} = (س-ص)(ص-ع)(ع-س)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ س & ص & ع \\ صاع & ساع & ساص \end{vmatrix} \quad -س ص_1 + \boxed{ص_2}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & ص-س & ع-س \\ صاع & ساع & ساص \end{vmatrix} \quad -صاع \times ص_1 + \boxed{ص_3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & ص-س & ع-س \\ 0 & ساع-صاع & ساص-صاع \end{vmatrix}$$ بأخذ عوامل مشتركة

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & ص-س & ع-س \\ 0 & -ع(ص-س) & -ص(ع-س) \end{vmatrix} \quad ع ص_2 + ص_3$$

سالب عامل مشترك ودخله جوا القوس ↓

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & ص-س & ع-س \\ 0 & 0 & ع(ع-س)-ص(ع-س) \end{vmatrix}$$

$= (ص-س)[ع(ع-س)-ص(ع-س)]$

$= (س-ص)[ص(ع-س)-ع(ع-س)]$

$= (س-ص)(ع-س)(ص-ع)$ ##

ب)

$$\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix} = (ب-أ)(جـ-أ)(جـ-ب)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix} \quad -ص_1 + ص_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & ب-أ & ب^2-أ^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix} \quad -ص_1 + ص_3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & (ب-أ) & (ب-أ)(ب+أ) \\ 0 & (جـ-أ) & (جـ-أ)(جـ+أ) \end{vmatrix}$$

بأخذ $(ب-أ)$ عامل مشترك من $ص_2$

$(جـ-أ)$ عامل مشترك من $ص_3$

$$= (ب-أ)(جـ-أ) \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & 1 & ب+أ \\ 0 & 1 & جـ+أ \end{vmatrix} \quad -ص_2 + ص_3$$

$$= (ب-أ)(جـ-أ) \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 0 & 1 & ب+أ \\ 0 & 0 & (جـ+أ)-(ب+أ) \end{vmatrix}$$

$$= (ب-أ)(جـ-أ)[جـ+أ-ب-أ]$$

$$= (ب-أ)(جـ-أ)(جـ-ب)$$

//

تطبيقات فيزيائية

١

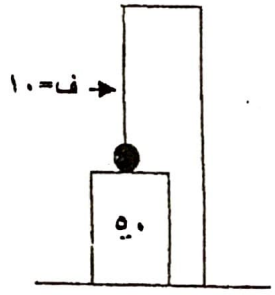
قذف جسم راسيا للاعلى من نقطة (و) على سطح الارض ، وكان ارتفاعه ف بالامتار يعطى بالقاعدة ف= ٣٠ن - ٥ ن^{٢} ، ن الزمن بالثواني :

١) جد السرعة الابتدائية (ع.) للجسم
٢) جد التسارع عند ن= ٢
٣) جد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم
٤) اثبت ان زمن الصعود = زمن الهبوط
٥) جد المسافة الكلية التي قطعها الجسم في الثواني الاربع الاولى

٢

من قمة برج يرتفع عن سطح الارض ٥٠ م ، اطلق جسم رأسيا للاعلى فكانت ازاحته ف بالامتار عن قمة البرج بعد ن ثانية تعطى بالقاعدة : ف = ١٥ن - ٥ن^{٢} ، جد :

١) سرعة هذا الجسم عند ن= ٢ث
٢) الزمن اللازم ليكون الجسم على ارتفاع ١٠ م من قمة البرج
٣) سرعة ارتطام الجسم بسطح الارض



٣

قذف جسم راسيا الى اعلى بحيث ان ارتفاعه عن نقطة القذف معطى بالعلاقة ف = ١٢٨ن - ١٦ ن^{٢} جد:

١) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم
٢) سرعة الجسم عندما يكون قد قطع مسافة ٢٧٢ م

٤

قذف جسم راسيا لاعلى وفق العلاقة ف= ع ن - ٥ ن^{٢} فاذا كانت سرعة الجسم بعد ٦ ث وهو هابط تساوي نصف السرعة الابتدائية جد اقصى ارتفاع

٥ قذف جسم رأسيا من نقطة على سطح الارض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الارض بالامتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران ف (ن) = ٦٤ ن − ١٦ ن^{٢} جد :

١) الزمن اللازم حتى يعود الجسم الى سطح الارض

٢) السرعة التي قذف فيها الجسم

٣) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم

٤) اللحظة التي يكون عندها سرعة الجسم ٣٢ م/ث

٥) سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٦٠ م من سطح الارض

٦) سرعة الجسيم عندما يقطع مسافة ٦٨م

ج/

١	٢	٣	٤	٥	٦
٤	٦٤	٦٤	١	−١٦، ١٦	−١٦

٦ من قمة بناية قذف جسم رأسيا لاعلى حسب العلاقة ف (ن) = ٤٠ ن − ٥ ن^{٢} فاذا وصل الجسم الى الارض بسرعة ٥٠ م / ث جد ارتفاع البناية

ج/ ٤٥

٧ قذف جسم راسيا لاعلى حسب العلاقة ف= ٤٠ن − ٥ن^{٢}

١) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم

٢) اوجد سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٦٠

٣) متى تصبح سرعة الجسم مساويا لنصف سرعته الابتدائية

٤) متى يعود الجسم الى الارض

٥) اوجد مجموعة قيم ن التي تكون السرعة عندها موجبة

ج/

١	٢	٣	٤	٥
٨٠	±٢٠	٢	٨	]٤٠، ٠[

٨ قذف جسم راسيا لاعلى من قمة برج بحيث المسافة الراسيه التي يقطعها معطاه بالعلاقة ف=١٠ ن − ٥ ن^{٢} جد ارتفاع البرج علما بان اقصى ارتفاع وصله عن سطح الارض ١٥م

ج/ ١٠

٩ يتحرك جسم حسب العلاقة ف= ن^{٣} − ٦ ن^{٢} + ١٢ ن + ٤ بين ان الجسم يتوقف لمرة واحدة فقط دون ان يغير اتجاه الحركة

عماد خليل سالم
Maths Teacher
0599439796

1 $ف = ٣٠ن - ٥ن^٢$

$ع = ٣٠ - ١٠ن$

١) السرعة الابتدائية $ع(٠) = ٣٠ - ١٠ \times ٠$

$= ٣٠$ م/ث

٢) السارع عند $ن = ٢ \Leftarrow ت = -١٠$

$ت = |_{ن=٢} = -١٠$ م/ث^٢

٣) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عندما $ع(ن) = ٠$

$٣٠ - ١٠ن = ٠$

$\frac{٣٠}{١٠} = \frac{١٠ن}{١٠}$ $\quad ن = ٣$ ← زمن الوصول لأقصى ارتفاع

$ف(٣) = ٣٠ \times ٣ - ٥ \times ٣^٢$

$= ٩٠ - ٤٥ = ٤٥$ م

٤) $ف(ن) = ٠ \Leftarrow ٣٠ن - ٥ن^٢ = ٠$

$٥ن(٦ - ن) = ٠$ ازامته

$ن = ٠$ $\quad ن = ٦$ ← زمن وصوله للأرض

زمن الوصول لأقصى ارتفاع $= ٣$

زمن الوصول للأرض $= ٦$

∴ زمن الصعود = زمن الهبوط

٣ ثواني = ٣ ثواني

٥) المسافة الكلية التي قطعها الجسم في ٤ ثواني

$ف(٤) = ٣٠ \times ٤ - ٥ \times ٤^٢$

$= ١٢٠ - ٨٠ = ٤٠$ م

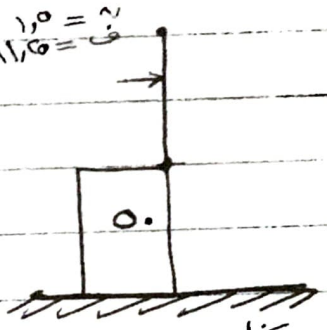
المسافة الكلية $= ٢ \times$ أقصى ارتفاع $- ف(٤)$

$= ٢ \times ٤٥ - ف(٤)$

$= ٩٠ - ٤٠ = ٥٠$ م #

أ. عماد خليل ريان
Maths Teacher
0599493798

٢) $ف = ١٥ن - ٥ن^٢$



$ع(ن) = ١٥ - ١٠ن$

$١٥ - ١٠ن = ٠$

$\frac{١٠ن}{١٠} = \frac{١٥}{١٠}$

$ن = ١,٥$ زمن الوصول لأقصى ارتفاع

(١) $ف(١,٥) = ١٥ \times ١,٥ - ٥(١,٥)^٢$

$= ١١,٢٥$ م

(٢) $ع(ن) = ١٥ - ١٠ن$

$ع(٢) = ١٥ - ١٠ \times ٢ = -٥$ م/ث

$ف(ن) = ١٥ن - ٥ن^٢ = ١٠$

$٥ن^٢ - ١٥ن + ١٠ = ٠$ [÷ ٥]

$ن^٢ - ٣ن + ٢ = ٠$

$(ن - ٢)(ن - ١) = ٠$

وهو هابط $ن = ٢$ ← $ن = ١$ وهو صاعد

(٣) زمن ارتطام الجسم بالأرض $ف(ن) = -٥٠$ م

$١٥ن - ٥ن^٢ = -٥٠$ ⇐ $٥ن^٢ - ١٥ن - ٥٠ = ٠$ صف

⇐ $ن^٢ - ٣ن - ١٠ = ٠$ صف

⇐ $(ن - ٥)(ن + ٢) = ٠$

⇐ $ن = ٥$ ثواني ($ن = -٢$ مرفوضة)

$|ع|_{ن=٥} = |١٥ - ١٠ \times ٥| = ٣٥$ م/ث

عماد خليل نادر
Maths Teacher
0599456976

(٣) $ف = ١٢٨ن - ١٦ن^٢$

$ع = ١٢٨ - ٣٢ن$

(أ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

$ع(ن) = ٠ \Leftarrow ١٢٨ - ٣٢ن = ٠$

$\frac{٣٢ن}{٣٢} = \frac{١٢٨}{٣٢}$ $\Leftarrow$ $ن = ٤$ زمن الوصول لأقصى ارتفاع

$ف(٤) = ١٢٨ \times ٤ - ١٦(٤)^٢$

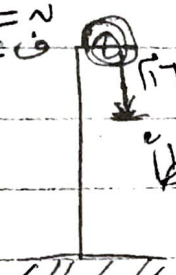
$= ٢٥٦$ م

(ب) سرعة جسم عندما يكون قد قطع مسافة ٢٧٢ م

عندما يكون قاطعاً مسافة ٢٧٢ م يكون هبط ١٦ م

بإضافة ١٦ م التي صعدها ٢٥٦ م يعني يكون هابطاً

ازاحته $ف(ن) = -٢٤٠$ م



$\Leftarrow$ $١٢٨ن - ١٦ن^٢ = -٢٤٠ \Leftarrow ١٦ن^٢ - ١٢٨ن + ٢٤٠ = ٠$

$\Leftarrow$ $\frac{١٦ن^٢}{١٦} - \frac{١٢٨ن}{١٦} + \frac{٢٤٠}{١٦} = \frac{٠}{١٦}$

$\Leftarrow$ $ن^٢ - ٨ن + ١٥ = ٠$

$\Leftarrow$ $(ن - ٥)(ن - ٣) = ٠$

$ن = ٥$ وهو هابط

$ن = ٣$ وهو صاعد مرفوض

$ع(٥) = ١٢٨ - ٣٢ \times ٥$

$ع(٥) = -٣٢$ م/ث

(٤)

$ف = ٩٠ن - ٥ن^٢$ $\Leftarrow$ $ع = ٩٠ - ١٠ن$

$ع(٦) = \frac{١}{٢} ع(٠)$

$\Leftarrow$ $٩٠ - ١٠(٦) = \frac{١}{٢}(٩٠ - ١٠(٠))$ $\Leftarrow$ $٩٠ - ٦٠ = \frac{١}{٢}٩٠ - \frac{١}{٢}٩$ $\Leftarrow$ $\frac{٣}{٢}٩ = ٣٠$ $\Leftarrow$ $٩ = ٢٠$

هو هابط

$ف = ٩٠ن - ٥ن^٢$

$ع = ٩٠ - ١٠ن = ٠$ $\Leftarrow$ $ن = ٩$ زمن الوصول

$ف(٩) = ٩٠ \times ٩ - ٥ \times ٩^٢$

$= ٨١٠ - ٤٠٥ = ٤٠٥$ م

$\ast$

أ. عماد خليل ليان
Maths Teacher
0599437796

⑤ $ف(ن) = ٣٤ن - ١٦ن^{٢}$ أوجد :

$ع(ن) = ٣٤ - ٣٢ن$

① الزمن اللازم ليعود الجسم بالى سطح الأرض .

$ع(ن) = ٠ \Leftarrow ٣٤ - ٣٢ن = ٠$

$\frac{٣٤}{٣٢} = \frac{٣٢ن}{٣٢} \Leftarrow ن = ٢$ ث

زمن الوصول لأقصى ارتفاع ث
زمن الهبوط ٢ ث } ٤ ثواني

حل آخر $ف(ن) = ٠ \Leftarrow ٣٤ن - ١٦ن^{٢} = ٠$

$١٦ن(٣ - ن) = ٠$

$ن = ٠$ $ن = ٣$

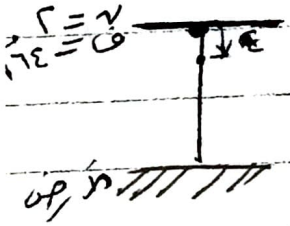
② السرعة الابتدائية عندما $ن = ٠$

$ع(٠) = ٣٤ - ٣٢ \times ٠ = ٣٤$ م/ث

③ أقصى ارتفاع عندما $ن = ٢$

$ف(٢) = ٣٤ \times ٢ - ١٦(٢)^{٢}$

$= ٣٤$ م



④ اللحظة التي يكون عندها سرعة الجسم ٣٢ م/ث

$٣٤ - ٣٢ن = ٣٢$

$\frac{٣٢ن}{٣٢} = \frac{٣٢}{٣٢} \Leftarrow ٣٢ن = ٣٤ - ٣٢$ $\Leftarrow ن = ١$ ثانية

⑤ $ف(ن) = ٣٤ن - ١٦ن^{٢} = ٦٠$

$١٦ن^{٢} - ٣٤ن + ٦٠ =$ صفر $\Leftarrow ٣٤ن - ١٦ن^{٢} + ١٥ = ٠$

$(٥ - ٨ن)(٣ - ٨ن) = ٠$

$ن = \frac{٣}{٨}$ $ن = \frac{٥}{٨}$

⑥ $ف(ن) = ٦٠$ [وهو هابط]

$ع(\frac{٥}{٨}) = -١٦$ ، $ع(\frac{٣}{٨}) = ١٦$

سرعة الجسم عندما يقطع مسافة ٦٨ م تكون -١٦ م/ث

أ. عماد خليل ابيات
Math Teacher
0598405988

(٦) $ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^٢$

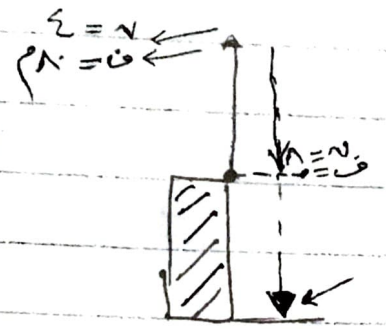
$ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$

$ع(ن) = ٠$

$٤٠ - ١٠ن = ٠ \Leftarrow \frac{٤٠}{١٠} = \frac{١٠ن}{١٠} \Leftarrow ن = ٤$

$ف(٤) = ٤٠ \times ٤ - ٥(٤)^٢$

$= ٨٠م$



الحل

$ع(ن) = -٥٠م$

$٤٠ - ١٠ن = -٥٠$

$-١٠ن = -٩٠ \Leftarrow ن = ٩$ ثانية

$ف(٩) = ٤٠ \times ٩ - ٥(٩)^٢$

$= ٣٦٠ - ٤٠٥ = -٤٥م$

∴ ارتفاع البرج $= ٤٥م$

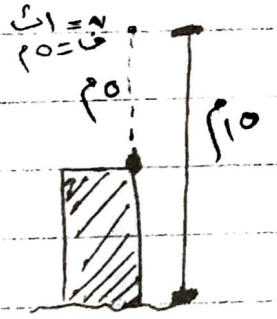
(٨) $ف = ١٠ن - ٥ن^٢$

$ع = ١٠ - ١٠ن = ٠$

$١٠ن = ١٠ \Leftarrow ن = ١$

$ف(١) = ١٠(١) - ٥(١)^٢ = ٥م$

∴ ارتفاع البرج $= ١٥ - ٥ = ١٠م$



(٩) $ف = ن^٣ - ٦ن^٢ + ١٢ن + ٤$

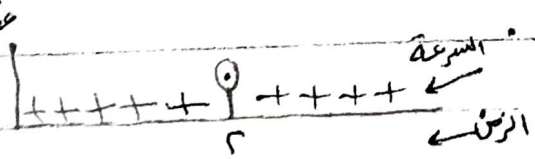
$ع = ٣ن^٢ - ١٢ن + ١٢ = ٠ \quad [\div ٣] \Leftarrow ن^٢ - ٤ن + ٤ = ٠$

$(ن - ٢)(ن - ٢) = ٠$

$ن = ٢$

∴ الجسم توقف مرة واحدة

دون أن يغير من اتجاه الحركة وذلك لأن السرعة كانت موجبة وبقيت موجبة



(٧) قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف = ٤٠ن − ٥ن²

(١) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

ع = ع₀ − ١٠ن = ٠

٤٠ = ١٠ن

ن = ٤

ف = ٤٠ × ٤ − ٥(٤)²

= ١٦٠ − ٨٠ = ٨٠ م

(٢) أوجد سرعة الجسم على ارتفاع ٦٠ م.

ف(ن) = ٦٠

٤٠ن − ٥ن² = ٦٠ ⇐ ٥ن² − ٤٠ن + ٦٠ = ٠ [÷٥]

⇐ ن² − ٨ن + ١٢ = ٠

⇐ (ن − ٦)(ن − ٢) = ٠

⇐ ن = ٦ ن = ٢

وهو هابط وهو صاعد.

ع(٢) = ٤٠ − ١٠ × ٢ = ٢٠ م/ث

ع(٦) = ٤٠ − ١٠ × ٦ = −٢٠ م/ث

(٣) متى تصبح سرعة الجسم = ½ ع₀.

ع = ½ ع₀

٤٠ − ١٠ن = ½ [٤٠ − ١٠ × ٠]

−١٠ن = ٢٠ − ٤٠

١٠ن = ٢٠

ن = ٢ ث

(٤) بعد ٨ ثواني

ف(ن) = ٠ ⇐ ٤٠ن − ٥ن² = ٠

٥ن(٨ − ن) = ٠

ن = ٠ ن = ٨

(٥) الزمن الذي تكون فيه السرعة موجبة]٠, ٤[

أسئلة مهمة في الاثباتات الضمنية (5 درجات) تجميع

١	إذا كان ص = (قاس + ظاس)^{٧} ، أثبت أن $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٧ ص قاس .
٢	إذا كان س+ ص = ظاص ، أثبت أن ص$''$ = −٢ص$'$ (١ + ص$'$) ظتاص
٣	إذا كان س ص = ١ ، أثبت أن $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} \times \frac{ع^{٢} س}{ع ص^{٢}}$ = ٤
٤	إذا كان ص = جاس + جتاس أثبت أن ص $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ + ١ = − جا٢س
٥	اذا كانت ص= ظتا س + قتاس ، اثبت ان : $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ = ص^{٢} قتاس
٦	اذا كانت س = جتا ص ، اثبت ان : $\frac{ص''}{(ص')^{٢}}$ = − ظتاص
٧	اذا كانت س+ص +جاص = ٣ ، اثبت ان : $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = \frac{\text{جاص}}{(١+\text{جتاص})^{٣}}$
٨	اذا كانت س = ظاص ، اثبت ان : $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = \frac{-٢س}{(١+س^{٢})^{٢}}$
٩	اذا كانت ص = ٥ + ٤ جا٢س + ٣ جتا٢س ، فبرهن أن : ص$''$ + ٤ص = ٢٠
١٠	جاص = ظاس ، اثبت ان ظا ص = $\frac{ص''}{٢قا^{٢}س + (ص')^{٢}}$
١١	اذا كان ص= (قاس + ظا س)^{٧} اثبت ان $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٧ ص قا س

أ.عماد خليل ريان 0599493798 Maths Teacher
أ.عماد خليل ريان 0599493798 Maths Teacher

١٢	اذا كان ص= ظتا٢س اثبت ان ص$''$ - ٨ص (ص^{٢} + ١) = ٠
١٣	س = جا ص اثبت ان $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$
١٤	اذا كان ص = $\frac{\text{جاس قاس}}{١ + \text{س ظاس}}$ اثبت ان $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{(١ + \text{س ظاس})^{٢}}$
١٥	اذا كان ص = $\frac{١ + \text{ظاس}}{١ - \text{ظاس}}$ اثبت ان $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢}{١ - \text{جا٢س}}$
١٦	اذا كان ص = قا٢س ، اثبت ان ص$''$ – ٨ص^{٣} + ٤ص = ٠
١٧	اذا كان ص – س = جتاص ، اثبت ان (ص$'$)^{٢} = - ص$''$ (قاص + ظاص)
١٨	اذا كان ص = $\sqrt{\frac{١ + \text{جاس}}{١ - \text{جاس}}}$ اثبت ان $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{١ - \text{جاس}}$
١٩	اذا كان ص – س ص = جاس ، اثبت ان ص$''$ + ص = $\frac{٢ص'}{١ - س}$
٢٠	اذا كان ظا (بس ص) = ص اثبت ان $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص + ص^{٣}}{١ + (١ + ص^{٢}) - س}$
٢١	أوجد معدل تغير $\sqrt{٤س^{٢} - ١}$ بالنسبة الى $\frac{س}{٢س + ١}$ عندما س=١

عماد خليل ليان
Maths Teacher
0599493798

حلول الاثباتات الضمنية

أ. عماد ربيان
94937798

١) $ص = ن(قا س + ظا س)^{ن-١} \times (قا س ظا س + قا^{٢} س)$

$ن(قا س + ظا س)^{ن-١} \times قا س (ظا س + قا س)$

$= ن(قا س + ظا س)^{ن} قا س$

$= ن ص قا س$ #

---

٢) $ص + ١ = ص قا^{٢} ص$ ..... ① $\Leftarrow$ $قا^{٢} ص = \frac{ص + ١}{ص}$

$ص'' = قا^{٢} ص \times ص' + ص \times ٢ قا ص \times قا ص ظا ص \times ص'$

$ص'' - قا^{٢} ص ص' = ٢ (ص)^{٢} قا^{٢} ص ظا ص$

$ص'' [١ - قا^{٢} ص] = ٢ (ص)^{٢} قا^{٢} ص ظا ص$

$ص'' \times - ظا^{٢} ص = ٢ (ص)^{٢} قا^{٢} ص ظا ص$

from ① $\Leftarrow$ $ص'' \times - ظا ص = ٢ (ص)^{٢} \left(\frac{ص + ١}{ص}\right)^{٢}$

$ص'' = -٢ ص (ص + ١) ظتا ص$ *

تذكر
$١ + ظا^{٢} ص = قا^{٢} ص$

$ظتا ص = \frac{١}{ظا ص}$

(٥) أثبت أن $\frac{د^٢ص}{دس^٢} \times \frac{د^٢س}{دص^٢} = ٤$

(٣) $س ص = ١$

الحل

$ص = \frac{١}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^٢}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{+١ \times ٢س}{س^٤}$

① $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٢}{س^٣}$

$س = \frac{١}{ص}$

$\frac{دس}{دص} = \frac{-١}{ص^٢}$

② $\frac{د^٢س}{دص^٢} = \frac{٢}{ص^٣}$

$س ص = ١$

∴ من ① ، ② ينتج $\frac{د^٢ص}{دس^٢} \times \frac{د^٢س}{دص^٢} = \frac{٢}{س^٣} \times ص^٣ = \frac{٤}{(س ص)^٣} = ٤$

أ. عماد خليل ريان
Maths Teacher
0599493798

---

(٤) $ص = جاس + جتاس$ أثبت أن $\frac{د^٢ص}{دس^٢} + ١ = -جا^٢$

الحل

$ص' = جتاس - جاس$

$ص'' = -جاس - جتاس$ [× ص]

$ص ص'' = جاس + جتاس \times -١ (جاس + جتاس)$

$ص ص'' = -(جاس + جتاس)^٢$

$ص ص'' = -[جا^٢س + جتا^٢س + ٢ جاس جتاس]$

$ص ص'' = -١ - ٢ جاس جتاس$

$ص ص'' + ١ = -جا ٢س$ #

$جا^٢س + جتا^٢س$

$جا ٢س = ٢ جاس جتاس$

⑤ ص = ظتا س + قتا س

الحل

ص' = −قتا² س − قتا س ظتا س

ص'' = −٢ قتا س × −قتا س ظتا س − [قتا س × −قتا² س + ظتا س × −قتا س ظتا س]

ص'' = ٢ قتا² س ظتا س + قتا³ س + قتا س ظتا² س

ص'' = قتا س [٢ قتا س ظتا س + قتا² س + ظتا² س]

ص'' = قتا س [ظتا س + قتا س]²

ص'' = قتا س [ص]² ⇦ ص'' = ص² قتا س #

---

⑥ إذا كان س = جتا ص أثبت أن $\frac{ص''}{(ص')^2} = -ظتا ص$

الحل

١ = −جا ص ص'

٠ = −جا ص ص'' + ص' × −جتا ص ص'

٠ = −جا ص ص'' − جتا ص (ص')²

$\frac{جا ص ص''}{-جتا ص} = \frac{-جتا ص (ص')^2}{-جتا ص}$

$-ظا ص ص'' = (ص')^2$ ⇦ $\frac{ص''}{(ص')^2} = \frac{١}{-ظا ص}$

$\boxed{\frac{ص''}{(ص')^2} = -ظتا ص}$ #

⑦ إذا كانت $س + ص + جاص = ٣$ أثبت أنّ

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{جاص}{(١ + جتاص)^{٣}}$$

الحل

$$١ + ص_{ن} + جتاص\ ص_{ن} = ٠ \Leftarrow ص_{ن} = \frac{-١}{(١ + جتاص)}$$

$$٠ + ص_{ن} + جتاص\ ص_{ن} + ص_{ن} \times -جاص\ ص_{ن} = ٠$$

$$ص_{ن} [جتاص + ١] - جاص (ص_{ن})^{٢} = ٠$$

$$ص_{ن} [جتاص + ١] = جاص (ص_{ن})^{٢}$$

$$ص_{ن} = \frac{جاص \times ١}{(١ + جتاص)^{٣}} \Leftarrow ص_{ن} = \frac{جاص}{(١ + جتاص)^{٣}}$$

عماد خليل ريان
Maths Teacher
0599493798

⑧ إذا كانت حس = ظاص أثبت أن $\frac{د^2ص}{د س^2} = \frac{-2س}{(1+س^2)^2}$

الحل نشتق الطرفين

$1 = قأص \cdot ص' \Leftarrow ص' = \frac{1}{قأص}$ ---①

$ص'' = قأص \cdot ص' + ص' \times 2 قاص \cdot قاص ظاص ص'$

$ص'' = \frac{-2 قأص ظاص (ص')^2}{قأص}$

$ص'' = -2 ظاص (ص')^2$ ---②

نوّض من ①

$ص'' = -2 ظاص (\frac{1}{قأص})^2 \Leftarrow ص'' = -2 ظاص \times (\frac{1}{ظاص+1})^2$

$ص'' = \frac{-2س}{(س^2+1)^2}$

حس = ظاص

من سؤال

ليان Maths Teacher 0599433798

أ.عماد خليل ليان Maths Teacher 0599433798

---

⑨ إذا كانت ص = ٥ + ٤ جا٢س + ٣ جتا٢س فبرهن أنّ : ص'' + ٤ص = ٢٠

الحل $ص' = 8 جا٢س \cdot جتا٢س - 6 جا٢س جتا٢س$ ---①

$ص'' = -16 جا٢س جتا٢س - 12 جتا٢س جا٢س$ ---②

$\therefore ص'' + 4ص = 20 + 16 جا٢س جتا٢س + 12 جتا٢س جا٢س - 16 جا٢س جتا٢س - 12 جتا٢س جا٢س$

$ص'' + 4ص = 20$

#

(١٠) جاص = ظاس أثبت أن ظاص = $\frac{ح}{٢قأس + (ح)^٢}$

الحل جتاص ح = قأس ⇦ ح = $\frac{قأس}{جتاص}$

جتاص ح + (ح)^٢ × جاص = ٢قاس ظاس

جتاص ح + (ح)^٢ × جاص = ٢قأس ظاس

$\frac{جتاص ح}{جتاص} - \frac{ظاس (ح)^٢}{جتاص} = \frac{٢قأس جاص}{جتاص}$ [÷ جتاص

ح − ظاص (ح)^٢ = ٢قأس ظاص

ح = ٢قأس ظاص + ظاص (ح)^٢

ح = ظاص [٢قأس + (ح)^٢]

∴ ظاص = $\frac{ح}{٢قأس + (ح)^٢}$ #

١١ إذا كان ص = (قا س + ظا س)^٧ أثبت أن $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ٧ ص قا س (١)

الحل

ص' = ٧ (قا س + ظا س)^٦ (قا س ظا س + قا^٢ س)

= ٧ (قا س + ظا س)^٦ قا س (قا س + ظا س)

= ٧ (قا س + ظا س)^٧ قا س

= ٧ ص قا س

#

---

١٢ إذا كانت ص = ظتا^٢ س أثبت أن صً − ٨ ص (ص^٢ + ١) = ٠

الحل

ص' = − قتا^٢ س × ٢

صً = − ٤ قتا^٢ س × − قتا^٢ س ظتا^٢ س × ٢

صً = + ٨ قتا^٢ س ظتا^٢ س

صً = ٨ (ظتا^٢ س + ١) ظتا^٢ س

صً = ٨ ص (ص^٢ + ١)

∴ صً − ٨ ص (ص^٢ + ١) = صفر #

---

١٣ إذا كان س = جا ص أثبت أن $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \frac{١}{١ - س^{٢}}$

الحل

١ = جتا ص ص'

ص' = $\frac{١}{\text{جتا ص}}$

ص' = $\frac{١}{\sqrt{\text{١ − جا}^{٢}\text{ ص}}}$

ص' = $\frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

ص' = $\frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ لأن س = جا ص

أ. عماد خليل ريان
Maths Teacher
0599493798

(١٤) إذا كان $ص = \frac{جاس قاس}{1+س ظاس}$ اثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{(1+س ظاس)(جاس \times قاس ظاس + قاس جتاس) - جاس قاس (س قاس + ظاس)}{(1+س ظاس)^2}$

الحل

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{(1+س ظاس)(ظاس + 1) - ظاس (س قاس + ظاس)}{(1+س ظاس)^2}$$

$$= \frac{(1+س ظاس) قاس - س ظاس قاس - ظاس}{(1+س ظاس)^2}$$

$$= \frac{قاس + س ظاس قاس - س ظاس قاس - ظاس}{(1+س ظاس)^2}$$

$$= \frac{قاس - ظاس}{(1+س ظاس)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+س ظاس)^2} \quad \#$$

أ. عماد خليل ريان
Maths Teacher
0599495398

(٩)

إذا كان ص = $\frac{1+\text{ظا}س}{1-\text{ظا}س}$ أثبت أن $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \frac{٢}{1-\text{جا}٢س}$

الحل

$$ص' = \frac{(1-\text{ظا}س)\times\text{قا}^{٢}س + (1+\text{ظا}س)\times\text{قا}^{٢}س}{(1-\text{ظا}س)^{٢}}$$

$$= \frac{٢\text{قا}^{٢}س - \text{ظا}س\,\text{قا}^{٢}س + \text{ظا}س\,\text{قا}^{٢}س}{(1-\text{ظا}س)^{٢}}$$

$$= \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}س\,(1-٢\text{ظا}س+\text{ظا}^{٢}س)}$$

$$= \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}س - ٢\,\text{جتا}س\times\frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س} + \frac{\text{جا}^{٢}س}{\text{جتا}^{٢}س}\times\text{جتا}^{٢}س}$$

$$= \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}س + \text{جا}^{٢}س - ٢\,\text{جا}س\,\text{جتا}س} = \frac{٢}{1-\text{جا}٢س}$$

#

تذكر

$\text{جا}^{٢}س + \text{جتا}^{٢}س = 1$

$\text{جا}٢س = ٢\,\text{جا}س\,\text{جتا}س$

$\text{قا}س = \frac{1}{\text{جتا}س}$

أ. عماد خليل ريان
Maths Teacher
0599437698

[redacted]

١٠) إذا كان ص = $\text{قا}٢س$ أثبت أن

$ص'' - ٨ص^{٣} + ٤ص = ٠$

الحل

$\because ص = \text{قا}٢س$

$ص' = \text{قا}٢س\,\text{ظا}٢س \times ٢$ ⟸ $ص' = ٢\,\text{قا}٢س\,\text{ظا}٢س$

$ص'' = ٢\,\text{قا}٢س \times \text{قا}^{٢}٢س \times ٢ + \text{ظا}٢س \times ٢\,\text{قا}٢س\,\text{ظا}٢س \times ٢$

$ص'' = ٤\,\text{قا}^{٣}٢س + ٤\,\text{قا}٢س\,\text{ظا}^{٢}٢س$

$ص'' = ٤\,\text{قا}^{٣}٢س + ٤\,\text{قا}٢س(\text{قا}^{٢}٢س - 1)$

$ص'' = ٤ص^{٣} - ٤\,\text{قا}٢س$

$ص'' = ٨ص^{٣} - ٤ص$

$\therefore ص'' - ٨ص^{٣} + ٤ص = صفر$

#

أ. عماد خليل ريان
Maths Teacher
0599437698

١٧ إذا كان ص = جتاس ، أثبت أن ص'' = -ص (قاس + ظاس)

الحل

ص' - ١ = -جاس ص

ص'' = -جاس ص' + ص' × -جتاس ص

$\frac{ص'' + جاس ص''}{-جتاس} = \frac{(ص')^2 \times -جتاس}{-جتاس}$

$(ص')^2 = \frac{ص'' (١ + جاس)}{-جتاس}$

$(ص')^2 = -ص'' \left(\frac{١}{جتاس} + \frac{جاس}{جتاس}\right)$

$(ص')^2 = -ص'' (قاس + ظاس)$ #

---

١٨ $ص = \sqrt{\frac{١ + جاس}{١ - جاس}}$ أثبت أن $\frac{ص}{ص'} = \frac{١}{١ - جاس}$

الحل

بالضرب في مرافق البسط

$ص = \sqrt{\frac{١ + جاس}{١ - جاس} \times \frac{١ - جاس}{١ - جاس}}$

$ص = \sqrt{\frac{(١ - جاس)^2}{(١ - جاس)^2}}$

$ص = \frac{جتاس}{١ - جاس}$

$ص = \frac{جتاس}{١ - جاس}$

$ص' = \frac{(١ - جاس) \times -جاس - جتاس \times -جتاس}{(١ - جاس)^2}$

$ص' = \frac{-جاس + جا^2 س + جتا^2 س}{(١ - جاس)^2}$

$ص' = \frac{(١ - جاس)}{(١ - جاس)^2} = \frac{١}{١ - جاس}$ #

١٩ إذا كان ص ـ س ص = جتا س أثبت أن ص'' + ص = $\frac{٢ص'}{١ - س}$

الحل

ص'' ـ س ص'' ـ ص = جتا س

ص'' ـ س ص'' ـ ص' = ـ جتا س

ص'' (١ ـ س) ـ ٢ ص' = ـ جتا س

ص'' (١ ـ س) ـ ٢ ص' = ـ (ص ـ س ص)

ص'' (١ ـ س) ـ ٢ ص' = ص (س ـ ١) [÷ (١ ـ س)]

ص'' = $\frac{٢ص'}{١ - س}$ ← ص

ص'' + ص = $\frac{٢ص'}{١ - س}$

أ. عماد خليل ريان
Maths Teacher
0599493798

---

٢٠ إذا كان ظا (س ص) = ص أثبت أن $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص + ص^٣}{١ - س (١ + ص^٢)}$

الحل

قا^٢ (س ص) × (س ص' + ص) = ص'

س ص' قا^٢ (س ص) + ص قا^٢ (س ص) = ص'

س ص' قا^٢ (س ص) ـ ص' = ـ ص قا^٢ (س ص)

ص' (س قا^٢ (س ص) ـ ١) = ـ ص قا^٢ (س ص)

ص' (س [ظا^٢ (س ص) + ١] ـ ١) = ـ ص (ظا^٢ (س ص) + ١)

ص' (س (ص^٢ + ١) ـ ١) = ـ ص (ص^٢ + ١)

ص' (س ص^٢ + س ـ ١) = ـ ص^٣ ـ ص

ص' = $\frac{ـ ص^٣ ـ ص}{س ص^٢ + س ـ ١}$

ص' = $\frac{ـ (ص^٣ + ص)}{س ص^٢ + س ـ ١}$

ص' = $\frac{ص^٣ + ص}{١ ـ س (ص^٢ + ١)}$

أ. عماد خليل ريان
Maths Teacher
0599493798

٢١ أوجد معدل تغير $\sqrt{٤س^٢ - ١}$ بالنسبة الى $\frac{س}{١+س^٢}$ عندما $س = ١$

الحل بفرض $ص = \sqrt{٤س^٢ - ١}$

$$ع = \frac{س}{١+س^٢}$$

نريد مشتقة ص بالنسبة الى ع .

$$\frac{دص}{دس} = \frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}} = \frac{٨س}{٢\sqrt{٤س^٢ - ١}}$$

$$\frac{دع}{دس} = \frac{٢(١+س^٢) - ٢س \times ٢س}{(١+س^٢)^٢} = \frac{١}{(١+س^٢)^٢}$$

$$\therefore \frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \times \frac{دس}{دع}$$

$$= \left| \frac{دص}{دع} \right|_{س=١} = \frac{٨س}{٢\sqrt{٤س^٢ - ١}} \times \frac{(١+س^٢)^٢}{١}$$

$$= \frac{٨ \times ١}{٢\sqrt{٤(١)^٢ - ١}} \times \frac{(١+١^٢)^٢}{١} = \frac{٣٦}{٣\sqrt{٧}}$$

#