الرائد للتعليم المساند

# ملخص من

# كتاب ١٠٠ % في الرياضيات

# ليلة الاختبار

## الثاني عشر الأدبي والشرعي

## حسب المنهاج الفلسطيني الجديد

الفصل الدراسي الأول


الأستاذ

جهاد محمد عدوان

الأستاذة

سالي حامد النحال

# ملخص الوحدة الأولى

متوسط التغير للاقتران

$$ق(س) = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} \text{ ، } س_١ \neq س_٢$$

$$\text{ميل المستقيم القاطع ل} = \text{متوسط التغير} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$\text{معدل التغير أو المشتقة الأولى} = ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(أ + هـ) - ق(أ)}{هـ}$$

**قواعد الاشتقاق:**

١) إذا كان $ق(س) = ص = أ$ فإن $ق'(س) = \frac{دص}{دس} = ٠$

٢) إذا كان $ق(س) = ص = أس + ب$ فإن $ق'(س) = \frac{دص}{دس} = أ$

٣) إذا كان $ق(س) = ص = س^{ن}$ فإن $ق'(س) = \frac{دص}{دس} = ن س^{ن-١}$

٤) إذا كان $هـ(س) = أ.ق(س)$ فإن $هـ'(س) = أ.ق'(س)$

٥) إذا كان $ك(س) = ق(س) \pm هـ(س)$ فإن $ك'(س) = ق'(س) \pm هـ'(س)$

٦) مشتقة حاصل الضرب: $(ق \times هـ)'(أ) = ق(أ) \times هـ'(أ) + هـ(أ) \times ق'(أ)$

بالكلمات: مشتقة حاصل ضرب اقترانين= الاقتران الأول ×مشتقة الثاني +الاقتران الثاني×مشتقة الأول

٧) مشتقة القسمة: $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(أ) = \frac{(هـ(أ) \times ق'(أ)) - (ق(أ) \times هـ'(أ))}{(هـ(أ))^٢}$

وتعني بالكلمات:

$$\text{مشتقة ناتج قسمة اقترانين} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^٢}$$

إذا كان $ق(س)$ معرفاً على الفترة فإن يكون :

١) متزايد في الفترة $[أ ، ب]$، إذا كان $ق'(س) > ٠$ لكل س في الفترة $]أ ، ب[$ .

٢) متناقص في الفترة $[أ ، ب]$، إذا كان $ق'(س) < ٠$ لكل س في الفترة $]أ ، ب[$ .

٣) ثابت في الفترة $[أ ، ب]$، إذا كان $ق'(س) = ٠$ لكل س في الفترة $]أ ، ب[$ .

**ملاحظة:**

أ) تسمى الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ميل المماس (هـ)، إذا كانت الزاوية (هـ) حادة يكون الميل موجباً، وإذا كانت الزاوية (هـ) منفرجة يكون الميل سالباً.

ب) يكون للاقتران ق(س) قيمة قصوى( عظمى او صغرى) محلية عند س = أ، إذا كان:

١) ق´(س) = ٠

٢) يغير ق(س) من سلوكه حول س = أ من التزايد إلى التناقص أو العكس

**تعريف:** $\int$ ق´(س)ءس = ق(س)+جـ، حيث جـ عدد حقيقي

## قواعد التكامل غير المحدد:

١) $\int$ أ.ءس = أس+جـ

٢) $\int$ س^ن^.ءس = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ +جـ

٣) $\int$ (ق ± هـ)(س)ءس = $\int$ ق(س)ءس ± $\int$ هـ(س)ءس

٤) $\int$ ع(س)ءس = $\int$ كق(س)ءس = ك $\int$ ق(س)ءس

**تعريف:** إذا كان ق(س) اقتران قابل للاشتقاق، فإن: $\int$ ق´(س)ءس = ق(س)$\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ = ق(ب) – ق(أ)

**ملاحظة:** مشتقة التكامل المحدود يساوي صفر دائماً.

## خصائص التكامل المحدود:

١) $\int_{\text{ب}}^{\text{ب}}$ ق(س)ءس = صـــفر

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س)ءس = – $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}}$ ق(س)ءس

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س)ءس = $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س)ءس + $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س)ءس

# حلول التمارين العامة من الكتاب المدرسي

## ١)

١) $\text{ق(س)} = \frac{\text{٢}}{\text{س}} = \frac{\text{−٢}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(١)} = \frac{\text{−٢}}{\text{١}^{\text{٢}}} = \text{−٢}$ **د**

٢) $\text{م} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{١٠} - \text{١}}{\text{٢} - \text{−١}} = \frac{\text{٩}}{\text{٣}} = \text{٣}$ **أ**

٣) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}} = \frac{\Delta \text{ص}}{\text{٦}}$

$\Leftarrow \Delta \text{ص} = \frac{\text{٣} \times \text{٦}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٨}}{\text{٢}} = \text{٩}$ **أ**

٤) $(\text{٥} \times \text{٢س}) + (\text{٥س} - \text{١}) \times \text{٢}$

$= \text{١٠س} + \text{١٠س} - \text{٢}$

$= \text{٢٠س} - \text{٢}$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(١)} = \text{٢٠} - \text{٢} = \text{١٨}$ **جـ**

٥) $\text{ق}'\text{(س)} = \frac{[(\text{٦س}) \times (\text{٢} - \text{س})] - [(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{١}) \times \text{−١}]}{(\text{٢} - \text{س})^{\text{٢}}}$

$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{\text{١٢س} - \text{٣س}^{\text{٢}} + \text{١}}{(\text{٢} - \text{س})^{\text{٢}}}$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(٣)} = \frac{\text{٣٦} - \text{٢٧} + \text{١}}{\text{١}} = \text{١٠}$ **جـ**

٦) $(\text{٢ق} \times \text{٣هـ})'(\text{٧})$

$= (\text{٢ق(٧)} \times \text{٣هـ}'\text{(٧)}) + (\text{٣هـ(٧)} \times \text{٢ق}'\text{(٧)})$

$= (\text{٢} \times \text{−٥} \times \text{٣} \times \text{−١}) + (\text{٣} \times \text{٢} \times \text{٢} \times \text{٣})$

$= \text{٣٠} + \text{٣٦} = \text{٦٦}$ **أ**

٧) $\because \text{ق(−١٠)} = \text{٥} \quad \therefore \text{ق}'\text{(−١٠)} = \text{٠}$ **جـ**

٨) $\int \text{ق}'\text{(س).ءس} = \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{جـ}$

$\therefore \text{ق(س)} = \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{جـ}$

$\therefore \text{ق}'\text{(س).ءس} = \text{٦س} - \text{٤}$

$\Leftarrow \text{ق}'\text{(٢)} = \text{٦} \times \text{٢} - \text{٤} = \text{١٢} - \text{٤} = \text{٨}$ **د**

٩) $\int_{\text{١}}^{\text{٩}} (\text{٥س}^{\text{٣}} + \text{٣س} - \text{٢})^{\circ} = \text{جـ}$

$\therefore \text{ق}'\text{(س)} = \text{٠} \Leftarrow \text{ق}'\text{(٨)} = \text{٠}$ **جـ**

١٠) $\because \int_{\text{٥}}^{\text{٧}} \text{٢ن(س).ءس} = \text{٢}\int_{\text{٥}}^{\text{٧}} \text{ن(س).ءس} = \text{٦}$

$\therefore \int_{\text{٥}}^{\text{٧}} \text{ن(س).ءس} = \text{٣}$

$\because \int_{\text{٥}}^{\text{١}} \text{ن(س).ءس} = \text{٤}$

$\Leftarrow -\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{ن(س).ءس} = \text{٤}$

$\therefore \int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{ن(س)ءس} = \text{−٤}$

$\Leftarrow \text{نو} \int_{\text{١}}^{\text{٧}} (\text{٣ن(س)} + \text{٢}).\text{ءس}$

$= \text{٣}\int_{\text{١}}^{\text{٧}} \text{ن().ءس} + \int_{\text{١}}^{\text{٧}} \text{٢} \ldots (**)$

$\Leftarrow \int_{\text{١}}^{\text{٧}} \text{ن(س).ءس}$

$= \int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{ن(س).ءس} + \int_{\text{٥}}^{\text{٧}} \text{ن(س).ءس}$

$= \text{−٤} + \text{٣} = \text{−١}$ **ب**

من معادلة (**)

$\Leftarrow (\text{٣} \times \text{−١}) + \text{٢(٧} - \text{١)}$

$= \text{−٣} + (\text{٢} \times \text{٦}) = \text{−٣} + \text{١٢} = \text{١٩}$

## ٢)

$\because \text{ن(س)} = \text{س}^{\text{٣}} - \text{جـس} - \text{٦}$

$\therefore \text{ن}'\text{(س)} = \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{جـ}$

$\because \text{ن}'\text{(٢)} = \text{٠}$

$\therefore \text{ن}'\text{(٢)} = \text{٣} \times (\text{٢})^{\text{٢}} - \text{جـ} = \text{٠}$

$\Leftarrow \text{٣} \times \text{٤} - \text{جـ} = \text{٠} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = \text{١٢}}$

## ٣)

$\text{المتوسط} = \frac{\text{ق(١٨)} - \text{ق(١١)}}{\text{١٨} - \text{١١}} = \frac{\sqrt{\text{١٦}} - \sqrt{\text{٩}}}{\text{٧}}$

$= \frac{\text{٤} - \text{٣}}{\text{٧}} = \frac{\text{١}}{\text{٧}}$

**٤)**

∵ ن(س) = س$^{٣}$ − ١٢س − ٣

∴ ن$'$(س) = ٣س$^{٢}$ − ١٢

∴ ن$'$(س) = ٠ ⟸ ٣س$^{٢}$ − ١٢ = ٠

⟸ ٣س$^{٢}$ = ١٢ ⟸ س$^{٢}$ = ٤

∴ $\boxed{\text{س} = \pm ٢}$

**٥)**

$\int_{ب}^{٥}$ (٢س + ١)ءس = ٢٤

⟸ س$^{٢}$ + س $|_{ب}^{٥}$ = ٢٤ ⟸ (٢٥ + ٥) − (ب$^{٢}$ + ب) = ٢٤

⟸ ٣٠ − ب$^{٢}$ − ب = ٢٤ ⟸ ب$^{٢}$ − ب − ٦ = ٠

⟸ (ب + ٣)(ب − ٢) = ٠

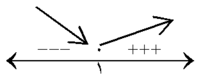
⟸ $\boxed{\text{ب} = -٣}$ ، $\boxed{\text{ب} = ٢}$

**٦)**

أ) هـ(س) = ٤س$^{٢}$ − ٨س + ١

⟸ هـ$'$(س) = ٨س − ٨ = ٠

∴ ٨س = ٨ ⟸ س = ١




هـ(س) متزايد في الفترة [١ ، ∞[

هـ(س) متناقص في الفترة ]−∞ ، ١]

ب) هـ(س) يغير سلوكه من (+)،(−)

يوجد قيمة صغرى عند س = ١

∴ ق(١) = ٤×١ − ٨×١ + ١

= ٤ − ٨ + ١ = −٣

∴ (١، −٣) قيمة صغرى محلية

# ملخص الوحدة الثانية

تعريف: المصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل لأعداد حقيقية على هيئة صفوف عددها (م) وأعمدة عددها (ن) محصورة بين قوسين [ ] وتكون رتبتها م × ن

ملاحظة: يسمى كل عدد في المصفوفة أ مدخلة ويرمز لها بالرمز $أ_{يه}$ حيث (ي) الصف الذي تقع فيه المدخلة ، (هـ) العمود الذي تقع فيه المدخلة .

أنواع المصفوفات:

مصفوفة الصف: هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط و (ن) من الأعمدة ، حيث رتبتها ١ × ن

مصفوفة العمود: هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط و (م) من الصفوف ، حيث رتبتها م×١ .

المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة ، حيث رتبتها ن×ن .

المصفوفة الصفرية: هي المصفوفة التي يكون جميع مدخلاتها أصفار ، ويكون رمزها (و).

المصفوفة الوحدة: هي المصفوفة التي يكون قطرها الأساسي مدخلاته (١) وباقي المدخلات أصفار ، و رمزها (م).

**تعريف:** تتساوى المصفوفتان أ ،ب إذا كان لهما الرتبة نفسها ، وكانت جميع مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

## ملاحظات:

١) عملية الجمع تبديلية ، أي أن $أ + ب = ب + أ$

٢) عملية الجمع تجميعية أي أن $(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)$

٣) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين حيث $أ + ب = ب + أ = و$ ، فإن ب هي النظير الجمعي للمصفوفة أ ، و المصفوفة أ هي النظير الجمعي للمصفوفة ب .

## تعريف:

إذا كانت مصفوفة من الرتبة أ م × ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن × هـ فإن $أ_{م\times ن} \times ب_{ن\times هـ} = جـ_{م\times هـ}$

## ملاحظة هامة:

حتى يجوز ضرب المصفوفات لابد من أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية.

## تعريف:

١) إذا كانت أ مصفوفة ثنائية مربعة ، فإن محدد المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقي ورمزه

$|أ|$ ، حيث $|أ| = (أ_{١١} \times أ_{٢٢})(أ_{٢١} \times أ_{١٢})$

٢) تسمى المصفوفة التي محددها يسوي صفر بالمصفوفة المنفردة.

٣) إذا كنت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، ك عدد حقيقي ، فإن $|كأ| = ك^٢ |أ|$

**ملاحظة:** المصفوفة المنفردة ليس لها نظير ضربي أي أن محددها يساوي صفراً.

## تعريف هام:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ حيث $|أ| \neq$ صفر فإن $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{٢١} \\ -أ_{١٢} & أ_{١١} \end{bmatrix}$

" أي نقلب القطر الرئيسي ، ونعكس إشارة القطر الفرعي مقسوماً على محدد المصفوفة "

## طريقة النظير الضربي:

١) ترتيب المعادلات على الصورة أ × ع = جـ

٢) نجد النظير الضربي للمصفوفة أ

٣) نضرب طرفي المعادلة ب $أ^{-1}$ من جهة اليمين

## قاعدة كريمر:

تستخدم قاعدة كريمر لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين والتي يمكن كتابته على الصورة أ . ع = جـ حيث أ مصفوفة المعاملات ، ع مصفوفة المتغيرات، جـ مصفوفة الثوابت فإن:

$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|}$ ، $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$ ، حيث أن:

$أ_{س}$ : المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

$أ_{ص}$ :المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

# حلول التمارين العامة للوحدة الثانية

**١**

١١) ٢أ١٢ − ب٢١ = ٢ × ٢ − ٥ = ٤ − ٥ = −١ **د**

:

١٢) من خلال المساواة : س = ٢ ، ص + س = ٣ **ب**

⟸ ص = ٣ − ٢ = ١

∴ (س،ص) = (٢،١)

١٣) $(\text{ب}^{-1})^{-1} = \text{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ **ب**

١٤) |٢س| = ٨ ⟸ $٢^{٢}$ |س| = ٨ ⟸ |س| = ٢ **أ**

⟸ |٣س| = ٩|س| = ٩ × ٢ = ١٨

١٥) ليس لها نظير ضربي= محددها يساوي صفر **د**

∴ $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ هــي الحـل لأن −٨ − −٨ = ٠

١٦) $(\text{ص}^{-1})^{-1} = \text{ص} \Leftarrow \text{ص} = \frac{١}{١}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

⟸ $\text{ص} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \text{جـ} \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ **ب**

⟸ جـ = ١

١٧) ∵ $\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٦}{|\text{أ}|} = ٢$

∴ $|\text{أ}| = \frac{-٦}{٢} = ٣$ **ب**

⟸ $\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٣}{-٣} = ١$

١٨) $\begin{bmatrix} ١ & \text{أ} \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ \\ \text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\text{أ} + \text{ب} \\ ٤ + ٣\text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$

⟸ ٢أ + ب = ٢ ···(١) **ج**

، ٤ + ٣ب = ٤ ⟸ ب = ٠

نعــوض في معادلــة(١) ⟸ ٢أ = ٢ ⟸ أ = ١

١٩) $\text{أ}_{٣\times١} \times \text{ب}_{\text{م}\times\text{ن}} = \text{جـ}_{٣\times٤}$ **أ**

م = ١ ، ن = ٤ ⟸ رتبــة ب = ١ × ٤

٢٠) $\text{س}^{٢} - ١٦ = ٠ \Leftarrow \text{س}^{٢} = ١٦ \Leftarrow \text{س} = \pm٤$

⟸ س = −٤ مطلــوب الســالبة **ب**

**٢**

أ(ب+جـ) = أب + أجـ

$= \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

**٣**

نكون نظام المعادلات :

$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix}$

بفــرض $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

⟸ |أ| = −٤ + ١ = −٣

$|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} -١ & -١ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} = -٢ - -٤ = ٦$

$|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٨ + ١ = ٩$

⟸ $\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{٦}{-٣} = -٢$

$\text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{٩}{-٣} = -٣$

**٤**

نرتب شكل المعادلات :

$س - ص = -١$

$٣س + ٣ص = ٦$

$$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$أ \times ب = جـ$

**نضـــرب مــــن اليـــمين في** $أ^{-١}$

$$\Leftarrow أ^{-١} \times أ \times ب = أ^{-١} جـ \Leftarrow ب = أ^{-١} جـ$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٦}\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$$

$$ب = \frac{١}{٦}\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ \\ ٦ \end{bmatrix} = \frac{١}{٦}\begin{bmatrix} -٣ + ٦ \\ ٣ + ٦ \end{bmatrix}$$

$$ب = \frac{١}{٦}\begin{bmatrix} ٣ \\ ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow س = \frac{١}{٢} \text{ ، } ص = \frac{٣}{٢}$$

**٥**

$$٣\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + س^{٢} = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$$

$$٣(٣ - ٢) + س^{٢} = (٤س - ٠)$$

$$٣ + س^{٢} = ٤س$$

$$س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$$

$$(س - ٣)(س - ١) = ٠$$

$$\Leftarrow س = ٣ \text{ ، } س = ١$$

**٦**

$أ \times س = ب$

$$أ^{-١} = \frac{-١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

**نضـــرب مــــن اليـــمين في** $أ^{-١}$

$$\Leftarrow أ^{-١} \times أ \times س = أ^{-١} ب \Leftarrow س = أ^{-١} ب$$

$$س = \frac{-١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١٤ & ٨ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

**بأخـــد عامـــل مشـــترك** $(-٢)$

$$س = \frac{-١}{٢} \times -٢\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٧ & ٤ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\therefore س = \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٧ & ٤ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٧ - ١٢ & -٤ + ٣ \\ -١٤ + ١٦ & ٨ - ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

# ملخص الوحدة الثالثة

**تعريف**: إذا كان $أ \in ح ، ن \in ص^+$ فإن :

$أ^ن = أ \times أ \times أ \times \cdots\cdots\cdots \times أ$ ،حيث أ مكرر كعامل ن من المرات ويقرأ الرمز $أ^ن$

( أ مرفوع للقوة ن ) أو ( أ أس ن ) ،

ويسمى " أ : أساس القوة، ن : القوة أو الأس"

**ملاحظات هامة:**

$أ^{\cdot} = ١$ ، لكل $أ \in ح - \{\cdot\}$

$أ^{-ن} = \frac{١}{أ^ن}$ ، لكل $أ \in ح - \{\cdot\}$ ، $ن \in ص^+$

## قوانين الأسس الصحيحة :

إذا كان م ، ن عددين صحيحين أي $م ، ن \in ص$ ، فإن :

١) $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$ حيث $أ \in ح$

٢) $\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$ حيث $أ \in ح - \{\cdot\}$

٣) $(أ^م)^ن = أ^{م ن}$ حيث $أ \in ح$

٤) $(أ ب)^ن = أ^ن ب^ن$ حيث $أ ، ب \in ح$

٥) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^ن = \frac{أ^ن}{ب^ن}$ حيث $أ ، ب \in ح - \{\cdot\}$

## قواعد هامة :

١) $أ^{م} = أ^{ن} \Leftrightarrow م = ن$ ، حيث $أ \not\in \{-١، ٠، ١\}$

( أي إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس )

٢) إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ ، حيث $أ، ب \not\in \{-١، ٠، ١\}$

إما م= صفر

أو: $أ = ب$ عندما م عدد فردي

$أ = \pm ب$ عندما م عدد زوجي

٣) $أ^{ن} = ١ \Leftarrow \begin{cases} ن = \text{صفر ، حيث } أ \not\in \{٠، ١\} \\ ن = \text{أي عدد ، حيث } أ = ١ \end{cases}$

ملاحظة هامة :

$(-١)^{ن} = \begin{cases} -١ \text{، ن عدد فردي} \\ ١ \text{، ن عدد زوجي} \end{cases}$

**الصورة اللوغاريتمية:**

كل صورة أسية أساسها عدد حقيقي موجب $\neq ١$ يوجد لها صورة أخرى تكافئها تسمى بالصورة اللوغاريتمية

وعموماً فإن :

إذا كانت $أ \in ح^{+} - \{١\}$ فإن $ص = لو_{أ} س \Leftrightarrow س = أ^{ص}$

**قواعد هامة:**

1) $\text{لـو}_{\text{أ}}\text{س} = \text{جـ}$ تكافئ $\text{أ}^{\text{جـ}} = \text{س}$ ، $\text{أ} > ٠ ، \text{س} > ٠ ، \text{أ} \neq ١$

2) $\text{لـو}_{\text{أ}}(\text{س} \times \text{ص}) = \text{لـو}_{\text{أ}}\text{س} + \text{لـو}_{\text{أ}}\text{ص}$

3) $\text{لـو}_{\text{أ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لـو}_{\text{أ}}\text{س} - \text{لـو}_{\text{أ}}\text{ص}$

4) $\text{لـو}_{\text{أ}}\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن} \times \text{لـو}_{\text{أ}}\text{س}$ ، $\text{س} > ٠$

5) $\text{لـو}_{\text{أ}}\text{أ} = ١$ ، $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$

6) $\text{لـو}_{\text{أ}}١ = \text{صفر}$ ، $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$

**تعريف :**

المتسلسلة $\left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}\right)$ تمثل مجموع حدود المتتالية $(\text{ح}_{\text{ر}})$ المقابلة لها ، ويرمز لها بالرمز $\left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}\right)$ ، ويعبر $\text{جـ}_{\text{ن}}$ عن مجموع حدودها ، أ ي أن المتسلسلة هي عملية جمع حدود المتتالية .

**تعريف : المتتالية الحسابية:**

هي المتتالية التي يكون فيها الفرق بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقداراً ثابتاً دائماً.

ويسمى هذا المقدار الثابت "أساس المتتالية" ، ويرمز له بالرمز ء

أي أن $\text{ء} = \text{ح}_{\text{ن}+١} - \text{ح}_{\text{ن}}$ لكل $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

**تعريف : الحد النوني للمتتالية الحسابية:**

إذا كان لدينا المتتالية ١ ، ٣ ، ٥ ، ... الحد الأول في المتتالية ١ ويرمز له بالرمز أ

والفرق بين الحد الثاني والحد الأول = ٣− ١ = ٢ ويسمى أساس المتتالية ويرمز له بالرمز ء

ويكون $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{ء}$

حيث : أ : ترمز لقيمة الحد الأول من المتتالية الحسابية

$د$ : أساس المتتالية الحسابية　　$ن$ : رتبة ( ترتيب ) الحد　　$ع_ن$ : قيمة الحد

وإذا كان $ع_ن = ل$ ( حيث ل هو الحد الأخير) ، فإن $ل = أ + (ن - ١) د$

فمثلاً / $ع_٨ = أ + (٨ - ١) د \Leftarrow ع_٨ = أ + ٧ د$

## ما الفرق بين المتتالية و المتسلسلة الحسابية ؟!

**المتتالية الحسابية:**

هي المتتالية التي يكون فيها الفرق بين كل حد من حدودها والحد الذي يسبقه مباشرة مقدار ثابت يسمى أساس المتتالية ويرمز له بالرمز $د$ وتوضع علامة ( ، )بين الحدود

**المتسلسلة الحسابية :**

هي مجموع حدود المتتالية الحسابية

## الصورة العامة للمتسلسلة الحسابية :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $أ$ | + | $(أ + د)$ | + | $(أ + ٢د)$ | + | ............ | + | $(أ + (ن - ١)د)$ |
| $\downarrow$ | | $\downarrow$ | | $\downarrow$ | | | | $\downarrow$ |
| $ع_١$ | | $ع_٢$ | | $ع_٣$ | | | | $ع_ن$ |
| الحد الأول | | الحد الثاني | | الحد الثالث | | | | الحد النوني |

## أتعلم :

مجموع أول $ن$ حداً من حدود متسلسلة حسابية حدها الأول $أ$ وأساسها $د$ ، يعطى بالقانون :

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}\left(٢أ + (ن-١)\times د\right)$$

### نتيجة

يمكن إيجاد مجموع أول $ن$ حداً من حدود متسلسلة حسابية حدها الأول $أ$ وحدها الأخير $ل$ بالقاعدة:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}\left(أ + ل\right)$$

## تمارين عامة

س١) أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة:

| السؤال | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|
| الاجابة | د | - | ب | - |
| السؤال | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ |
| الاجابة | ب | ج | د | ج |

١) م.ح ا = ٣ ، ع١٠ = ٢١ ، جـ١٠ = ...

$ع_{١٠} = ٢١ \Leftarrow ا + ٩ء = ٢١$

$\Leftarrow ٣ + ٩ء = ٢١ \Leftarrow ٩ء = ٢١ - ٣ = ١٨$

$\Leftarrow ء = \frac{١٨}{٩} = \boxed{٢}$ بالقسمة على (٩)

$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢ا + (ن-١)ء]$

$جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٢×٣ + (١٠-١)×٢]$

$= ٥[٦ + ٩×٢] = \boxed{١٢٠}$

حل آخر:

عدد الحدود = ١٠

∴ الحد العاشر=ل=٢١

$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[ا + ل]$

$جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٣ + ٢١]$

$= ٥ × ٢٤ = ١٢٠$

٣) $\sum_{ر=١}^{٥} (-١)^ر$

$= (-١)^١ + (-١)^٢ + (-١)^٣ + (-١)^٤ + (-١)^٥$

$= \cancel{-١} + \cancel{١} \cancel{-١} + \cancel{١} - ١ = -١$

٥) متسلسلة حسابية

جـ١٦ = ٣٢ ، ء = -٢ ، ا = ...

$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢ا + (ن-١)ء]$

$جـ_{١٦} = \frac{١٦}{٢}[٢ا + (١٦-١)×-٢]$

$٣٢ = ٨(٢ا - ٣٠)$ بالقسمة على (٨)

$\frac{٣٢}{٨} = ٢ا - ٣٠$

$٤ = ٢ا - ٣٠$

$٢ا = ٣٤$ بالقسمة على (٢)

$ا = \frac{٣٤}{٢} = \boxed{١٧}$

٦) لـو٣ (٢٣٤×٨١)

$= لـو_٣ (٣^٥ × ٣^٤)$

$= لـو_٣ (٣^٩)$

$= ٩ لـو_٣ ٣$

$= ٩ × ١ = \boxed{٩}$

٧) $٦٤ = \left(\frac{١}{٣٢}\right)^{١-\text{س}}$

$\because ٣٢ = ٢^{٥} \quad \therefore \frac{١}{٣٢} = \frac{١}{٢^{٥}} = ٢^{-٥}$

$\because ٦٤ = ٢^{٦}$

$\therefore ٢^{٦} = \left(٢^{-٥}\right)^{١-\text{س}}$

$\therefore ٢^{٦} = ٢^{-٥+٥\text{س}}$

$\Leftarrow ٦ = -٥ + ٥\text{س}$

$\Leftarrow ٥\text{س} = ٦ + ٥ = ١١$

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{١١}{٥}}$

٨) $\text{لو}_{٢٧} (٣)^{٣\text{س}-١} = ٥$

$\Leftarrow (٣)^{٣\text{س}-١} = ٢٧^{٥}$

$\Leftarrow (٣)^{٣\text{س}-١} = (٣^{٣})^{٥}$

$\Leftarrow (٣)^{٣\text{س}-١} = (٣)^{١٥}$

$\Leftarrow ٣\text{س} - ١ = ١٥$

$\Leftarrow ٣\text{س} = ١٦$

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{١٦}{٣}}$

---

س٢)

$\text{ع}_{٢} + \text{ع}_{٩} = ٢٥$

$(\text{أ} + \text{ء}) + (\text{أ} + ٨\text{ء}) = ٢٥$

$٢\text{أ} + ٩\text{ء} = ٢٥ \;\ldots\ldots \boxed{١}$

$\text{ع}_{٣} + \text{ع}_{٧} = ٢٠$

$(\text{أ} + ٢\text{ء}) + (\text{أ} + ٦\text{ء}) = ٢٠$

$٢\text{أ} + ٨\text{ء} = ٢٠ \;\ldots\ldots \boxed{٢}$

بطرح ٢ من ١

$\boxed{\text{ء} = ٥}$ بالتعويض في ١

$٢\text{أ} + ٩ \times ٥ = ٢٥$

$٢\text{أ} + ٤٥ = ٢٥$

$٢\text{أ} = ٢٥ - ٤٥ = -٢٠$

$\boxed{\text{أ} = -١٠}$

∴ المتسلسلة : (−١٠) + (−٥) + (٠)

+ (٥) + (١٠)

س ٤)

$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ن}(٢\text{ن} + ١)$ ، أ = ... ، ء = ...

$\text{ن} = ١ \therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = ١(٢ \times ١ + ١) = ٣$

$\Leftarrow \text{ع}_{١} = \text{أ} = ٣$

$\text{ن} = ٢ \therefore \text{جـ}_{٢} = ٢(٢ \times ٢ + ١) = ١٠$

$\Leftarrow \text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢} = ١٠$

$\therefore \text{أ} + (\text{أ} + \text{ء}) = ١٠$

$\therefore ٣ + ٣ + \text{ء} = ١٠ \Leftarrow \boxed{\text{ء} = ٤}$

س٥)

١١٥٠٠، ١١٥٥٠، ١١٦٠٠، ...

أ) $\text{أ} = ١١٥٠٠ ،\ \text{د} = ٥٠ ،\ \text{ن} = ٦$

$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}$

$\therefore \text{ع}_{٦} = ١١٥٠٠ + (٦ - ١) \times ٥٠$

$= ١١٥٠٠ + ٥ \times ٥٠ = ١١٧٥٠$

**∴الراتب خلال السنة السادسة = ١١٧٥٠ ديناراً**

ب) $\text{أ} = ١١٥٠٠ ،\ \text{د} = ٥٠ ،\ \text{ن} = ١٠$

$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{١٠}{٢}\left[٢ \times ١١٥٠٠ + (١٠ - ١) \times ٥٠\right]$

$= ٥\left[٢٣٠٠٠ + ٤٥٠\right] = ١١٧٢٥٠$

**مجموع ما تقاضاه خلال ١٠ سنوات**

**= ١١٧٢٥٠ ديناراً**

---

س٦:

أ) $٢(١٦٩)^{٢\text{س}+٧} = ٢٦$

$\therefore (١٦٩)^{٢\text{س}+٧} = ١٣$

$(١٣)^{٢(٢\text{س}+٧)} = ١٣$

$(١٣)^{٤\text{س}+١٤} = ١٣^{١}$

$\Leftarrow ٤\text{س} + ١٤ = ١$

$٤\text{س} = -١٣$

$\text{س} = -\frac{١٣}{٤}$

**مجموعة الحل** $\left\{-\frac{١٣}{٤}\right\}$

ب) $(٩)^{\text{س}+٤} = (٢٧)^{٤\text{س}}$

$\therefore (٣^{٢})^{\text{س}+٤} = (٣^{٣})^{٤\text{س}}$

$(٣)^{٢\text{س}+٨} = ٣^{١٢\text{س}}$

$٢\text{س} + ٨ = ١٢\text{س}$

$\Leftarrow ١٢\text{س} - ٢\text{س} = ٨$

$١٠\text{س} = ٨$

$\text{س} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

**مجموعة الحل** $= \left\{\frac{٤}{٥}\right\}$

س٧)

أ) $\text{لـو}_{٥}(٢٥)^{٢س-٣} = \text{لـو}_{٨}(٦٤)^{س}$

$\text{لـو}_{٥}(٥^{٢})^{٢س-٣} = \text{لـو}_{٨}(٨^{٢})^{س}$

$\text{لـو}_{٥}(٥)^{٤س-٦} = \text{لـو}_{٨}(٨)^{٢س}$

$(٤س-٦)\text{لـو}_{٥}\,٥ = ٢س\,\text{لـو}_{٨}\,٨$

$(٤س-٦)\times ١ = ٢س\times ١$

$٤س-٦ = ٢س$

$٤س-٢س = ٦$

$٢س = ٦$

$\boxed{س = ٣}$

مجموعة الحل= $\{٣\}$

ب) $\frac{س\,\text{لـو}_{١٠}(٠٫٠٠٠١)}{\text{لـو}_{١٠٠}(١٠٠٠٠٠٠)} = -١$

$\frac{س\,\text{لـو}_{١٠}(١٠^{-٤})}{\text{لـو}_{١٠٠}(١٠٠^{٣})} = -١$

$\frac{-٤س\,\text{لـو}_{١٠}\,١٠}{٣\,\text{لـو}_{١٠٠}\,١٠٠} = -١$

$\frac{-٤س\times ١}{٣\times ١} = -١$

$-٤س = -٣$

$س = \frac{-٣}{-٤} = \boxed{\frac{٣}{٤}}$

مجموعة الحل = $\left\{\frac{٣}{٤}\right\}$

س٨)

$س^{٢}\text{لـو}_{٨}(٦٤)+س\,\text{لـو}_{٣}(٢٤٣)-\text{لـو}_{٥}(١٢٥)=٠$

$س^{٢}\text{لـو}_{٨}(٨^{٢})+س\,\text{لـو}_{٣}(٣^{٥})-\text{لـو}_{٥}(٥^{٣})=٠$

$٢س^{٢}\text{لـو}_{٨}\,٨+٥س\,\text{لـو}_{٣}\,٣-٣\,\text{لـو}_{٥}\,٥=٠$

$٢س^{٢}\times ١+٥س\times ١-٣\times ١=٠$

$٢س^{٢}+٥س-٣=٠$

$(٢س-١)(س+٣)=٠$

$٢س-١=٠ \Leftarrow ٢س=١ \Leftarrow \boxed{س=\frac{١}{٢}}$

أو $س+٣=٠ \Leftarrow \boxed{س=-٣}$

مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٢}،\ -٣\right\}$