١٢ المادة التدريبية

في الرياضيات

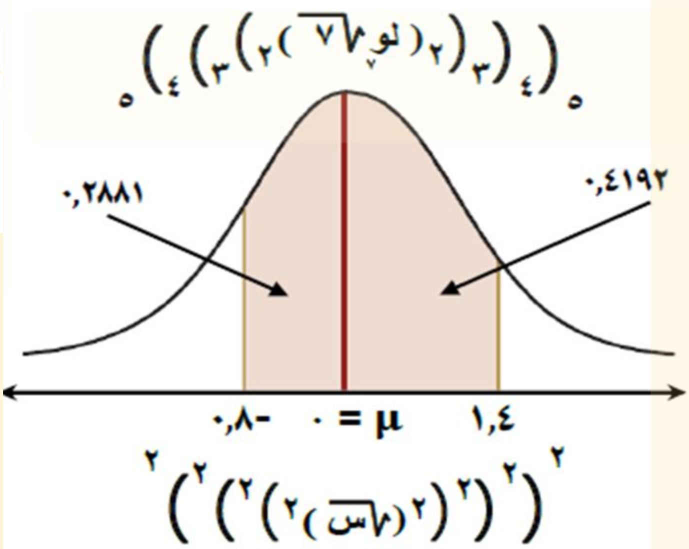
الأدبي والشرعي

جميع الوحدات

المنهاج الجديد
٢٠٢٠-٢٠٢١م

للحصول على أعلى معدل:

- ❈ أسئلة تفـــوق منـوعة على جميـــع الوحـــدات.
- ❈ أسئلة مقالية إثرائيـــــة منوعة لأسئلة الكتاب المدرسي.
- ❈ جميـــــع قوانين وتعريفـــات وملاحــظات وقواعد الكتاب.
- ❈ أسئلة إختيار من متعدد إثرائية منوعة لأسئلة الكتـاب.
- ❈ أسئلة مقالية منوعة وشاملة من إمتحانات وزارية ســابقة.
- ❈ أسئلة إختيار من متعدد شاملة من امتحانات وزارية سابقة.
- ❈ أنماط منوعة من الأسئلة المقالية وأسئـلة اختيار من متعـدد
- ❈ تذكير بـ : قواعد العمليات على الأعداد الصحيحة طرق حل المعادلات البسيطة والتربيعية .



المادة التدريبية للثانـي عشر أدبــي وشرعــي

- ❈ مـادة مساندة لمنهـــاج الرياضيات أدبي وشرعي.
- ❈ أكثر من ٤٠٠ ســؤال مقـــالي.
- ❈ أكثر من ٣٠٠ سـؤال اختيــار من متعـدد.

إعداد وطباعة

أ. عايش أبوعياد

مدرسة السبع الثانوية
٢٠٢٠ــ٢٠٢١ م
العام الدراسي

جوال
٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

فهرس المحتويات

الوحدة الأولى : التفاضل والتكامل

متوسط التغير

❖ **تعريف:**

- التغير في قيمة س = $س_٢ - س_١$ وبالرموز Δ س = $س_٢ - س_١$ ، (Δس تُقرأ دلتا س)
- التغير في قيمة ص = $ص_٢ - ص_١$ وبالرموز Δ ص = $ص_٢ - ص_١$ ، (Δص تُقرأ دلتا ص)
- متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$
- ميل القاطع لمنحنى الاقتران = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

أجب عن الأسئلة التالية :

١ – إذا كانت $س_١ = -١$، $س_٢ = ٥$ ، أجد Δ س .

الحل /

....

....

٢ – إذا كانت $س_١ = ٤$ ، Δ س = ٦ ، أجد $س_٢$.

الحل /

....

....

٣ – ما متوسط تغير ق(س) = $س^٢ + ١$ ، عندما تتغير س من $س_١ = ١$ إلى $س_٢ = ٣$.

الحل /

....

....

٤– ما متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\sqrt{٤س - ٧}$ في الفترة [٢، ٤] .

الحل /

....

....

٥– ما متوسط التغير في الاقتران ق(س) = $\frac{-١٢}{س+١}$ ، عندما تتغير س من ٢ إلى ٥

الحل /

....

....

❈ **لاحظ :**

- Δ س = $س_٢ - س_١$
- $س_٢ = \Delta س + س_١$
- $س_١ = س_٢ - \Delta س$
- متوسط تغير ق(س) $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

❈ **مثال :**

ما متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، عندما تتغير س من $س_١ = ٣$ إلى $س_٢ = ١١$.

الحل /

–نعوض عن قيمتي $س_١$، $س_٢$ مباشرة في المقام .

–نعوض عن قيمتي $س_١$ ، $س_٢$ حسب قاعدة الاقتران ق(س) في البسط .

متوسط تغير الاقتران ق(س)

$= \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{\sqrt{١١-٢} - \sqrt{٣-٢}}{١١ - ٣} = \frac{\sqrt{٩} - \sqrt{١}}{٨} = ...$

٦– إذا علمت أن ق(٥) - ق(- ٢) = ٣٥ ، جد متوسط تغير الاقتران ، عندما تتغير س من $س_١ = -٢$ إلى $س_٢ = ٥$.

الحل /

....

....

٧– إذا كان متوسط تغير الاقتران ν(س) في الفترة [– ٤،٢] يساوي ٣، وكان ν (-٤) =٢، أجد ν (٢) .

....

- **أتذكّر:**

> - متوسط التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ للاقتران ص = ν(س)
> يمثل ميل المستقيم القاطع لمنحنى الأقتران عند النقطتين
> (س١، ص١) ، (س٢، ص٢) .

٨- إذا كان الاقتران ν(س) = ٢س^{٢} -٣ ، وكان س١ = ٢، وكان Δ س = ٣ ، أجد Δص .

....

....

....

٩- إذا كان متوسط تغير الاقتران ν(س) هو $\frac{٢}{٣}$ ، Δ س = ١٥، ص٢ = ٨ ، أجد ص١ .

....

....

....

١٠– إذا كان متوسط التغير في الاقتران ν (س) = س^{٢}+٣ عندما تتغير س من ٢ الى ﻡ يساوي ٦، أجد قيمة الثابت ﻡ .

....

....

....

١١– إذا كان متوسط تغير الاقتران ν(س) = ﻡس ^{٢} - ٥ في الفترة [١،٣] هو ٨ ، أجد قيمة الثابت ﻡ .

....

- **أتذكّر:**

> الميل / م
>
> = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$
>
> = $\frac{ق(س٢) - ق(س١)}{س٢ - س١}$

....

١٢- أجد ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ν(س) في النقطتين ﻡ (١ ،٣) ، ب (٣ ،٩) .

....

....

١٣- إذا كان ν(س) = س^{٢} - ١ ، أجد ميل القاطع المار بالنقطتين (- ٢، ق(–٢)) ، ب (٣ ، ق(٣)) .

....

....

....

١٤- إذا وقعت النقطتان ﻡ (٣ ، - ١٠) ، ب (٥ ، جـ) على المنحنى ص = ν(س) ، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ يساوي ٣ ، فما قيمة / قيم جـ .

....

....

....

١٥- إذا كان هـ(س) = ٣ ق(س) - ٥ ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٧ هو ٤ ، أجد متوسط تغير الاقتران هـ(س) في نفس الفترة .

....

....

❋ أتذكّر:

إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ - ٣س

فإن ق(١) = $١^{٢}$ -٣×١

= ١-٣ = -٢

ق(-٢) = $(-٢)^{٢}$ -٣×-٢

= ٤ + ٦ = ١٠

أكمل ق(٣) = ...

....

....

....

١٦- إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) على الفترة [٣،٥] يساوي ٨ ، أجد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ق(س) + ٢س على الفترة [٣،٥] . (نظامي ٢٠٢٠)

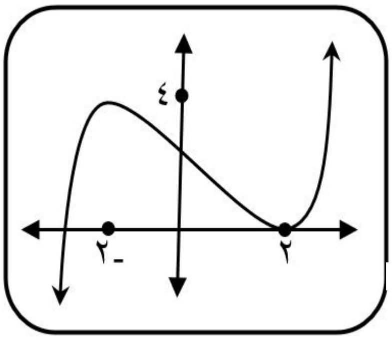
....

....

....

....

....



١٧ - للشكل المقابل ، احسب ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) والذي يمر بالنقطتين أ (٢، ق(٢))، ب (-٢، ق(-٢)) . ....

....

المشتقة الأولى

❖ تعريف :

إذا كان ص = ق(س) معرفاً عند س = أ وكانت $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق(أ + هـ) − ق(أ)}}{\text{هـ}}$ موجودة ، فإن ق(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س = أ وتسمى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س = أ، ويرمز لها بالرمز ق′(س) = أ ، أو $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س} = \text{أ}}$.

❋ تعريف المشتقة الأولى للعلم فقط.

- **لاحظ أن : $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق(٣ + هـ) − ق(٣)}}{\text{هـ}}$ = ق′(٣) .**
- **إذا كان ق′(٢) = ٤ ، ق(٢) = ٣ ، أجد $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق(٢ + هـ) − ق(٢)}}{\text{هـ}}$.**

....

قاعدة (١) إذا كان ص = ق(س) = أ ، أ عدد حقيقي ، فإن ق َ (س) = $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

١ - إذا كان ق(س) = ٢ ، أحسب ق َ (س) .

٢ - إذا كان ص = ١ - ٥ $\sqrt{٥}$ ، أحسب $\frac{ءص}{ءس}$.

قاعدة (٢) إذا كان ص = ق(س) = أ س+ ب : أ ، ب عددان حقيقان فإن ق َ (س) = $\frac{ءص}{ءس}$ = أ

١ - إذا كان ق(س) = ٢س - ٥ ، أحسب ق َ (س) .

الحل /

٢ - إذا كان ق(س) = ١ - س ، أحسب ق َ (س) .

الحل /

٣ - إذا كان ص = س - $\sqrt{٦}$ ، أحسب $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل /

❋ **أتذكّر :**

- $\sqrt[٤]{س^٥}$ = س$^{\frac{٥}{٤}}$
- $\frac{-٤}{\sqrt{س^٣}}$ = -٤ س$^{-\frac{٣}{٢}}$
- $\frac{-١}{\sqrt{س}}$ = - س$^{-\frac{١}{٢}}$
- $\frac{٢}{٥ س}$ = $\frac{٢}{٥}$ س$^{-١}$
- $\frac{٢س}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$ س
- $\frac{١}{٢س^{-١}}$ = $\frac{١}{٢}$ س

قاعدة (٣) إذا كان ق(س) = س^{ن} ، فإن ق َ (س) = ن س$^{ن-١}$

١ - إذا كان ق(س) = س^{٤} ، أحسب ق َ (س) .

٢ - إذا كان ق(س) = - ٧ س^{٣} ، أحسب ق َ (س) .

٣ - إذا كان ق(س) = ٦- س^{٤} ، أحسب ق َ (٢) .

❖ **أتذكّر:**

ق َ (س) = $\frac{ءص}{ءس}$

ق(س) = ص

قاعدة (٤) **إذا كان** هـ (س) = أ. ق(س) ، **فإن** هـ َ (س) = أ. ق َ (س) حيث أ عدد حقيقي ، ق(س) قابل للاشتقاق

١- إذا كان هـ (س) = -٢ق(س) ، وكان ق َ (٢) = -٥ ، أحسب هـ َ (٢) .

٢- إذا كان ٥ هـ (س) = ق(س) ، وكان ق َ (٧) = ٤٥، أحسب هـ َ (٧) .

تمارين و مسائل

١ - اجد مشتقة الاقتران ق(س) =٢س^{٣} - ١، عندما س = ٤

الحل /

٢ - إذا كان ق(س) = $\frac{٦}{١٩}$ س ، فأجد ق َ(-١١) .

الحل /

٣ - أجد مشتقة الاقتران ق(س) = س^{٤} + س ، عندما س = ٢ .

الحل /

٤- إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ ، فأجد ق َ(١) ؟

الحل /

٥ - أجد مشتقة الاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، عندما س = -١ .

الحل /

٦ - إذا كان ق(س) = $\sqrt[٧]{س^{٢}}$ ، فأجد ق َ(س) .

الحل /

٧ - إذا كان ق(س) = $\frac{-٢}{س^{٣}}$ ، فأجد ق َ(س) عندما س = ١ .

الحل /

٨- إذا كان ق(س) = $\frac{-١}{\sqrt[٧]{س^{٣}}}$ ، فأجد ق َ(س) عندما س = -١ .

الحل /

❄ **أتذكّر:**

- ص = ق(س)
- مشتقة ق(س) هي ق َ(س)
- مشتقة ص بالنسبة ل س هي $\frac{ءص}{ءس}$
- ق َ(١) نفس ناتج $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ١

مثال: للاقتران ص= ق(س) =٣س^{٢} ،جد ق َ(٢)

الحل : (حل أول) : ق َ(س) =٦س

ق َ(٢) = ٦×٢=١٢

(حل ثان) : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س

$\frac{ءص}{ءس}$ عندما $_{س=٢}$ = ٦×٢=١٢

● **أتذكّر:**

- $\frac{١}{س^{-٢}} = س^{٢}$
- $\frac{١}{س^{٢}} = س^{-٢}$
- $\sqrt[٣]{س^{٤}} = س^{\frac{٤}{٣}}$
- $\frac{-٤}{\sqrt[٢]{س^{٥}}} = -٤ س^{-\frac{٥}{٢}}$
- $س^{صفر} = ١$

● **أتذكّر:**

- إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$
  - فإن ق َ(س)= $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$
- إذا كان ق(س)= $\sqrt[٣]{س}$
  - فإن ق َ(س)= $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

٩ - إذا كان ص = ٣ ق(س) ، وكان ق َ (٩) = -٢، أحسب $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٩ .

الحل /

✵ أتذكّر:

- ص = ق(س)
- مشتقة ق(س) هي ق َ (س)
- مشتقة ص بالنسبة ل س هي $\frac{ءص}{ءس}$
- ق َ (٩) نفس ناتج $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٩

١٠ - إذا كان ٢ص = ق(س)، وكان ق َ (٤) = -٦، أحسب $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ٤ .

الحل /

١١ - إذا كان ق(س) = م س^{٣} ، وكان ق َ (٣) = ٥٤ ، أجد قيمة الثابت م .

الحل /

١٢ - إذا كان ق(س) = ب $\sqrt{س}$ ، وكان ق َ (١) = ١٢، أحسب قيمة الثابت ب .

الحل /

١٣ - إذا كان ق(س) =٣س^{٤} + جـ س^{٢} ، وكان ق َ (١) = ٢٢، أحسب قيمة الثابت جـ .

الحل /

قواعد الاشتقاق

قاعدة (١) إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان ك (س) = ق(س) ± هـ (س)
فإن الاقتران ك (س) يكون قابلا للاشتقاق ويكون ك َ (س) = ق َ (س) ± هـ َ (س)

١- إذا كان ق(س) = ٤ س^{٢} ، وكان هـ (س) = ٣ س ، أجد :

١) (ق + هـ) َ (٣) ٢) (ق - هـ) َ (٢) ٣) (٢ ق-٣ هـ) َ (١)

الحل /

٢ -إذا كان ق (س) = ٥ س^{٢} - ٢س - ٣ ، أجد ق َ (٣) .

الحل /

٣ - إذا كان ن(س) = ك (س) - م (س) +٢ ، وكان ك(س) = ٥ س^{٢} + ٢، وكان م (س) = ٢س^{٣} - ٩ ، أجد ن$'$ (-٢)

الحل /

....

....

قاعدة (٢) إذا كان ن(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س = م ،

فإن (ن × هـ)$'$ (س) = ن (س) × هـ$'$ (س) + هـ (س) × ن$'$(س)

= الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

١- استخدم المعطيات في الشكل المقابل لإيجاد (ن × هـ)$'$ (-٢)

ق (-٢)	ن$'$ (-٢)	هـ (-٢)	هـ$'$ (-٢)
٣	-٢	-١	٨

....

❈ أتذكّر :

قاعدة الضرب في الاشتقاق:

= الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

= ن(س)× هـ$'$(س)+ هـ(س)×ن$'$(س)

....

٢ - إذا كان هـ (س) = (س^{٢}+ س - ١) (٢س + ٣) ، فأجد هـ$'$(١).

....

....

....

❄ لاحظ :

مثال / إذا كان ق (س) = س^{٣} ،

هـ (س) = ٣س^{٢} -١،

فأجد (ق× هـ)$'$ (٢)

الحل :

نوجد ق(٢)، ق$'$(٢)، هـ(٢)،هـ$'$(٢).

ق(س) = س^{٣}

ق(٢) = ٢ ^{٣} = ٨

ن$'$ (س) = ٣س^{٢}

ن$'$ (٢) = ٣× ٢ ^{٢} =١٢

هـ (س) = ٣س^{٢}-١

هـ (٢) = ٣×٢^{٢} - ١ = ١١

هـ$'$ (س) = ٦س

هـ$'$ (٢) = ٦×٢ = ١٢

ثم نطبق على القاعدة

= ن(٢)×هـ$'$(٢)+ هـ (٢)×ن$'$(٢)

= ٨×١٢ + ١١× ١٢

= ......

....

٣- إذا كان ن(س) = ٢س^{٣} × هـ (س) ،فأجد ن$'$(٢)، بحيث هـ (٢) = ٣، هـ$'$(٢) = -١،

....

....

....

٤ - إذا كان ن(س) × هـ (س) = ٣س^{٢} ، هـ (٢) = ١ ، هـ$'$ (٢) = -١، فأجد ن$'$ (٢)

....

....

قاعدة (٣) إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س = أ ،

$$\frac{\text{(المقام × مشتقة البسط) − (البسط × مشتقة المقام)}}{\text{(المقام)}^{٢}}$$

فإن $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س}) \times \text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^{٢}}$

١ - إذا كان ق (١) =٤ ، ق' (١) = -٣ ، هـ (١) = -٢ ، هـ' (١) = ٥ ، فأجد : $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(١)$

....

❄ **لاحظ :**

$\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(\text{س})$

بسط

مقام

٢ - إذا كان ق(س) = $\frac{٣\text{س}^{٢}}{٢\text{هـ}(\text{س})}$ وكان هـ (٢) = -١ ، هـ'(٢) = ٦ ، فأجد ق' (٢) .

....

❄ **أتذكّر :**

فاعدة القسمة في الاشتقاق:

$\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(\text{س}) = \frac{\text{(المقام × مشتقة البسط) − (البسط × مشتقة المقام)}}{\text{(المقام)}^{٢}}$

$= \frac{\text{هـ}(\text{س}) \times \text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^{٢}}$

٣- إذا كان ص = $\frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س} + ٤}$ ، فأجد $\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=١}$

....

❄ **أتذكّر :**

مثال : إذا كان ق(س) × هـ(س) = س^{٢} ، بحيث هـ (٣) = ٦ ، هـ' (٣) = ٢ ،أحسب ق' (٣)

الحل : لاحظ ان السؤال لا يمكن حله بقانون الضرب مباشرة الا بمعلومية ق(٣) ، لكن يمكن حله مباشرة عن طريق تحويله الى قسمة .

ق(س) × هـ(س) = س^{٢}

بقسمة الطرفين على هـ (س)

ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{هـ}(\text{س})}$

ق'(س) = $\frac{\text{هـ}(\text{س}) \times ٢\text{س} - \text{س}^{٢} \times \text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^{٢}}$

ق' (٣) = ...

٤ - إذا كان ق(س) = س^{٢} × ل (س) + هـ (س) ، وكان ل (٢) = ٥ ، هـ'(٢) = ٧ ، ل'(٢) = -٣ ، أجد ق' (٢) .

....

٥ - إذا كان ق (١) = ٤ ، ق'(١) = -٣ ، هـ (س) = س^{٢}+٢س .

فأوجد : ١) $\left(\frac{٢\text{ق}}{٣\text{هـ}}\right)'(١)$ ٢) $\frac{٣\text{ق}'(١)}{٤\text{هـ}'(١)}$

....

٦- إذا كان ق ، ك اقترانين حيث ق(١) = ٤ ، ق̀ (١) = ٣، ك̀ (١) = -٣ ، (ق × ك)̀ (١) = ٦ ، أجد ك (١) .

٧- إذا كان ق(س) = س٣ × هـ (س) ، فأجد ق̀ (٢) ، إذا كان ق(٢) = ٨ ، هـ̀ (٢) = -١ . (إكمال ٢٠٢٠)

٨- إذا كان $(\frac{ق}{هـ})$̀(٢) = ٣ ، وكان ق (٢) = ٥ ، ق̀ (٢) = -١٢، هـ̀(٢) = - ٣ ، فأجد هـ (٢) .

✵ أتذكّر:

مثال :

- إذا كان ٦س٣ + $\frac{١}{٢}$ ص -٣ = ٠ ،

فأجد $\frac{ءص}{ءس}$ س=٢

- الحل :

أولاً يجب تحويله على الصورة ص = ...

٦س٣ + $\frac{١}{٢}$ ص -٣ =

$\frac{١}{٢}$ ص = - ٦س٣ + ٣ بالضرب في ٢

ص = - ١٢س٣ + ٦

$\frac{ءص}{ءس}$ = ...

$\frac{ءص}{ءس}$ س=٢ = ...

٩- إذا كان -٦س٣ + ٣ص + ١٥ = ٠ ، فأجد $\frac{ءص}{ءس}$ س=٢

١٠ - إذا كان ق(س) = س٣ -أس٢ ، كان ق̀ (١) = ٦، أجد قيمة الثابت أ.

١١- إذا كان ق(س) = س٢ - ٢أس +٣ ، هـ (س) = س٢ -٢، وكان (ق × هـ)̀ (١) = ٨ ، أجد قيمة الثابت أ .

١٢- إذا كان ق(س) = $\frac{س-٤}{ب}$ ، وكان ق̀ (٦) = -٣ ، فما قيمة الثابت ب ، ب ≠ ٠ .

١٣- إذا كان ق (س) = $\frac{جـ س-٥}{٦-٤س}$ ، وكان ق̀ (١) = - $\frac{١}{٢}$ ، فما قيمة الثابت جـ .

تطبيقات على المشتقة

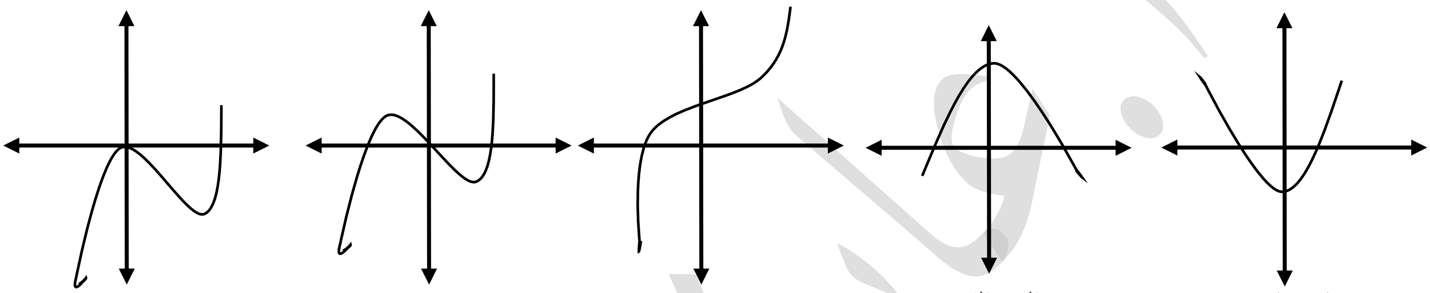
القيم القصوى المحلية للاقتران

- **تعريف:**

- يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [أ، ب]، إذا كان : لكل س٢ > س١ ، فإنَّ:
ق(س٢) > ق(س١) ، لأي عددين س١ ، س٢ ∈ [أ، ب] .
- يكون الاقتران ق(س) متناقصاً على الفترة [أ، ب] . إذا كان: لكل س٢ > س١ ، فإنَّ:
ق(س٢) < ق(س١) ، لأي عددين س١ ، س٢ ∈ [أ، ب] .

١– تأمل الاشكال الأتية وحدد عدد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) ونوع كل قيمة ؟ ماذا تلاحظ ؟

ق(س) = س^٢ ـ١	ق(س) = ـ س^٢ +٢	ق(س) = س^٣ +١	ق(س) = س^٣ ـ س	ق(س) = س^٣ ـ س^٢



عدد القيم القصوى	عدد القيم القصوى	عدد القيم القصوى	عدد القيم القصوى	عدد القيم القصوى
....	....	....	....	....
....	....	....	....	....

٢ـ أ ـ اختر الإجابة الصحيحة:

١) إحدى اشارات ق َ(س) الآتية تُظهر وجود قيمة صغرى للاقتران عند س =٢

أ) ++٠++ (٢) ب) --٠-- (٢) ج) ++٠-- (٢) د) --٠++ (٢)

٢) عدد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^٣ - ٢٧ يساوي ....

أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) صفر

٣) عدد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^٣ – ٢س^٢ + ٥ يساوي ....

أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) صفر

٤) عدد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س - ٢س^٢ يساوي ....

أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) صفر

٥) عندما يصنع المماس لمنحنى ق(س) زاوية منفرجة (مع الاتجاه الموجب لمحور السينات) ، إشارة ميله ....

أ) سالبة ب) موجبة ج) سالبة و موجبة د) لا يمكن تحديدها

٦) عندما يصنع المماس لمنحنى ق(س) زاوية حادة (مع الاتجاه الموجب لمحور السينات) ، إشارة ميله ....

أ) سالبة ب) موجبة ج) سالبة و موجبة د) لا يمكن تحديدها

ب – أجد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق(س) = (-٢ س - ٤) (س+٢) .

....

....

....

❋ أتذكّر:

يكون للاقتران ق(س) المعرف على ح قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند س= أ

إذا كان :

- **ق َ(أ) = صفرًا**
- **يغيّر ق(س) من سلوكه حول س= أ من التزايد إلى التناقص أو العكس .**

٣- عين القيم القصوى المحلية للاقتران ى(س) = $س^٣$ - ١٢ $س^٢$ ، س ∋ ح وحدد نوعها ، ثم أجد فترات التزايد و التناقص للاقتران ى(س)

✵ **أتذكّر :**

خطوات الحل :

١. نجد المشتقة ونساويها بالصفر
٢. نحلل المشتقة ونجد قيم س
٣. نمثل قيم س على خط الاعداد
٤. نكتب على الخط إشارات التزايد والتناقص (+++ - ---)
٥. نكتب القيم القصوى الناتجة ونوجد قيمة ص في كل حالة

✵ **أتذكّر :**

حل المعادلات التربيعية :

- **حل المعادلة** $س^٢$ - ٦س + ٨ = ٠

الحل /
$س^٢$ - ٦س + ٨ = ٠ **بالتحليل الى عاملين**
(س - ٢) (س – ٤) = ٠
(س - ٢) = ٠ ، (س – ٤) = ٠
س = ٢ ، س = ٤
مجموعة الحل = { ٢ ، ٤}

- **حل المعادلة** ٣ $س^٢$ - ١٢ = ٠

الحل /
٣ $س^٢$ -١٢ =٠ بنقل ال ١٢ بعكس الاشارة
٣ $س^٢$ = ١٢ بالقسمة على ٣
$\frac{٣}{٣}$ $س^٢$ = $\frac{١٢}{٣}$
$س^٢$ = ٤
س = -٢ ، س = ٢
مجموعة الحل = { – ٢ ، ٢}

- **حل المعادلة** ٣ $س^٢$ –١٢ س = ٠

الحل /
٣ $س^٢$ - ١٢ س =٠ **بأخذ س عامل مشترك**
س (٣ س - ١٢) = ٠
س = ٠ ، (٣س – ١٢) = ٠
س = ٠ ، ٣س = ١٢
س = ٠ ، س = ٤
مجموعة الحل = { ٠ ، ٤}

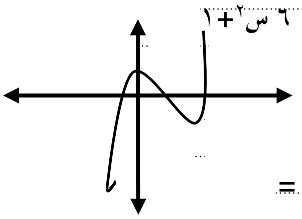
(نظامى ٢٠٢٠)

٤- أجد القيم العظمى والصغرى للاقتران ى(س) = $س^٣$ - ٤٨ س ، ثم أوجد فترات التزايد و التناقص للاقتران ى(س).

٥- أجد القيم العظمى والصغرى للاقتران ى(س) = $س^٢$ (س-٣) + ١ ، ثم أجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ى(س)
(نظامي ٢٠١٩)

✵ **الشكل للتوضيح فقط:**

ى(س) =$س^٣$- ٦ $س^٢$+١



عدد القيم القصوى =
ماذا نستنتج............

٦– أجد القيم العظمى والصغرى ، ثم حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٣س^{٢} + ٨ س + ٢

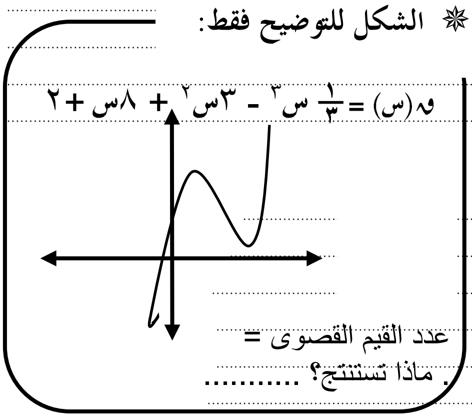
....

....

....

....

✵ الشكل للتوضيح فقط:

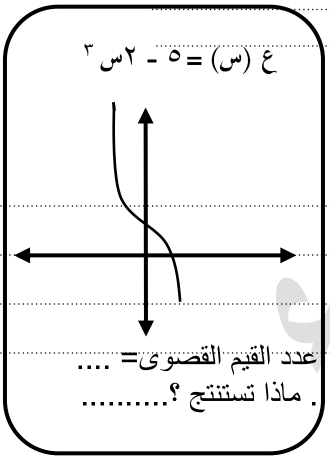


٧- بين أنه لا يوجد للاقتران ع (س) = ٥ - ٢س^{٣} ، أي قيمة قصوى محلية .

....

....

....



٨– إذا كان الاقتران ق(س) = - س^{٢} + ب س -٣، وكان للاقتران ق(س) قيمة عظمى عند س = -٢ . فما قيمة ب .

....

....

....

٩- إذا كان للاقتران ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + ٩ س +١، اقتران له قيمة عظمى محلية عند س = ١ قيمتها ٥ ، أجد قيم الثابتين أ ، ب .

....

....

....

....

✵ أتذكّر:

تسمى الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند أي نقطة (س ، ص) زاوية ميل المماس (هـ).

فإذا كانت الزاوية (هـ) حادة يكون الميل موجبًا.

و إذا كانت الزاوية (هـ) منفرجة يكون الميل سالبًا

١٠- إذا كان للاقتران ق(س) = أس^{٣} + ٦س + ب ، قيمة صغرى محلية عند س = ١، ويمر منحنى الاقتران ق(س) بالنقطة (٢ ، - ٣) فما قيم الثابتين أ ، ب .

....

....

....

....

....

نماذج من امتحانات وزارية سابقة (قواعد الاشتقاق)

١. **جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) = $\sqrt{٣س+٤}$ ، عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٠ الى س$_{٢}$ = ٤ .**

٢. **أوجد متوسط تغير الاقتران: ص = ق(س) = $\sqrt{س}$ ، عندما تتغير س من ٩ الى ٤ .**

٣. **ما متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) = $\frac{١٨}{س}$ ، عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٢ الى س$_{٢}$ = ٦ .**

٤. **إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٣ س ، وكان س$_{١}$ = ٥ ، وكان Δ س = ٣ ، فأوجد Δص .**

٥. **إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) = أس^{٢} – ٤ س على الفترة [١،٣] يساوي ٢أ ، فأجد قيمة الثابت أ .**
(إكمال ٢٠٢٠)

٦. **إذا كان هـ (س) = ٢ق(س) - ٧ ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى٧ هو٥ ، أجد متوسط تغير الاقتران هـ (س) في نفس الفترة.**

٧. **إذا كان هـ (س) = ٣ق(س) +٢س ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من -١ إلى٣ هو٤، أجد متوسط تغير الاقتران هـ (س) في نفس الفترة.**

٨. **إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ الى ٥ هو -٦ وكان ك (س) = ٢س – ٥ ق(س) ، أجد متوسط تغير الاقتران ك (س) في الفترة [١،٥]**

٩. **أوجد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) = (س^{٣}+ ٥) (٤ س - ٣ س^{٢}) ، عندما س = -١ .**

١٠. **جد مشتقة الاقتران ق(س) = (س +١)^{٢} ، عندما س = ٢ .**

١١. **إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} + ٢}$ ، فأجد ق$'$ (-١)**

١٢. **إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٣ س}{٥ س}$ ، س $\neq$ صفر ، فأجد ق$'$ (٢).**

١٣. أ) إذا كان ص = $\frac{٢}{س^{٢}}$ + $\sqrt{س}$ ، أجد $\frac{ءص}{ءس}$ ، س > صفر

ب) إذا كان ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} - $\sqrt{س}$ ، أجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١ ، س > صفر

١٤. ١- إذا كان ق(س) = هـ (س) × (س^{٢} + ١) ، وكان هـ (٢) = ١ ، هـ$'$ (٢) = ٣ ، فاحسب ق$'$ (٢) .

٢- إذا كان ق(س) = $\frac{هـ(س)}{٣س - ٢}$ فأجد ق$'$ (١) ، علماً بأن هـ (١) = ٢ ، هـ$'$ (١) = ٣ .

١٥. **إذا كان ق (٢) = ٣ ، ق$'$ (٢) = ٤ ، هـ (س) = س^{٢} + ٢ ، فأجد (ق × هـ)$'$ (٢) .**

١٦.	إذا كان ق(س) = ٦$\sqrt{\text{س}}$ هـ(س) ، أجد ق$'$(٤) علماً بأن هـ(٤) = ٣، هـ$'$(٤) = -٢
١٧.	إذا كان ق(س) = ٢$\sqrt{\text{س}}$ - س^{٢} × هـ(س) ، فجد ق$'$(١) ، علماً بأن هـ(١) = ٢ ، هـ$'$(١) = -٣ .
١٨.	إذا كان الاقتران ق(س) = ٦ س + $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{هـ(س)}}$ ، جد ق$'$(١) علماً بأن هـ(١) = ٢ ، هـ$'$(١) = -١,
١٩.	إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{هـ(س)}}$ - $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ ، جد ق$'$(١) علماً بأن هـ(١) = ١ ، هـ$'$(١) = -٢,
٢٠.	١- إذا كان ق(س) = ٦س^{٣} + $\frac{١}{٣}$ س - $\sqrt{\text{س}}$ ، فأجد ق$'$(١) . ٢- إذا كان ق(س) = ٢هـ(س) + س^{٢} ، وكان ق$'$(٥) = ١٢ ، فأجد هـ$'$(٥)
٢١.	١- إذا كان ق(س) = ٢س^{٣} × هـ(س) ، فأجد ق$'$(٢) ، بحيث هـ(٢) = ٢ ، هـ$'$(٢) = -١ . ٢- إذا كان (ق ÷ هـ)$'$(٩) = ٣ ، ق(٩) = ٥ ، ق$'$(٩) = -١٢ ، هـ(٩) = -٣، فأجد هـ$'$(٩)
٢٢.	إذا كان ق(س) = أ س^{٢}+ ٣ س - ٥ ، وكان ق$'$(١) = ٥ ، فأجد قيمة الثابت أ .
٢٣.	إذا كان للاقتران ق(س) = س^{٣}- أ س^{٢} - ٩ س + ب ، قيمة صغرى محلية عند س=١ تساوي٣ أجد الثابتين أ، ب .
٢٤.	إذا كان الاقتران ق(س) = أس^{٢} + ٤ س + ٣ ، وكان للاقتران ق(س) قيمة عظمى عند س = ٢. فما قيمة أ ؟
٢٥.	إذا كان الاقتران ق(س) = أس^{٢}- ٤س + ب ، قيمة صعري محلية عند س = ٢ ، وكان ق(٢) = ٠ ، فما قيم الثابتين أ ، ب .
٢٦.	إذا كان للاقتران ق(س) = س^{٣} +أس^{٢}+ ب س ، قيمة عظمى محلية عند س = ١، و قيمة صغري محلية عند س = ٢، أجد قيم الثابتين أ ، ب .
٢٧.	أجد القيم القصوى للاقتران ق(س) = ٢ + ٦ س – س^{٢} ، ثم حدد فترات التزايد والتناقص.
٢٨.	إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} – ٩س ، فأجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) ، ثم حدد فترات التزايد والتناقص. (إكمال ٢٠٢٠)
٢٩.	أجد القيم العظمى والصغرى للاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٢س^{٢} – ٥ س-٥ ، ثم حدد فترات التزايد والتناقص.
٣٠.	أجد القيم المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - ٤س + ٥ ، ثم حدد فترات التزايد والتناقص.
٣١.	عين القيم القصوى للاقتران ق(س) = – س^{٢} + ١٠ س + ٥ ، ثم حدد فترات التزايد والتناقص.
٣٢.	أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = - ٣ س + س^{٣} ، ثم حدد فترات التزايد والتناقص.
٣٣.	بين أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = ٣ + ٢ س^{٣} ، س ∈ ح ، أي قيمة قصوى محلية .
٣٤.	بين أنه لا يوجد للاقتران ق(س) = - س^{٣} + ٥ ، س ∈ ح ، أي قيمة قصوى محلية .

١) إذا كانت س ١ = -٣ ، س ٢ = ٥ ، فإنَّ Δ س = ...

أ) ٢ ب) - ٨ ج) ٨ د) – ٢

٢) إذا كانت س ١ = ٤ ، Δ س = ٦، فإنَّ س ٢ = ...

أ) ٢ ب) -٢ ج) ١٠ د) – ١٠

٣) إذا كانت س ٢ = ٤ س ١ ، Δ س = ١٢ ، فإنَّ س ٢ = ...

أ) ٤ ب) ٣ ج) ١٦ د) – ١٦

٤) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) هو $\frac{٤}{٣}$ ، وكانت Δ س = ١٢ ، فإنَّ Δص = ...

أ) ٣٦ ب) ٩ ج) ١٦ د) – ١٦

٥) إذا كان ص = ق(س) = ٥س-١، وتغيرت س من س ١ = ٢ إلى س ٢ = ٣,٨، فإنَّ Δص = ...

أ) $\frac{٥}{٢}$ ب) -٦ ج) ٩ د) ١,٨

٦) متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) = $\sqrt{\text{س}-٣}$ عندما تتغير س من $\text{س}_١$ = ٧ الى $\text{س}_٢$ = ٤ يساوي

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ٣ ج) - $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٣}$

٧) إذا كان الاقتران ق(س) = ٢س ، وكان $\text{س}_١$ = ٢، وكان Δ س = ٤ ، فإن Δص = ...

أ) ٢ ب) ٤ ج) ٦ د) ٨

٨) إذا كان الاقتران ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١،٤] يساوي

أ) ١ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{٣}$

٩) ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في النقطتين أ (-١، ٣) ، ب (٢ ، ٩)

أ) -٣ ب) ٢ ج) ٣ د) -٢

١٠) ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣ $\text{س}^٢$ - ٢، عند س ١ = -١ ، س ٢ = ٢

أ) -٣ ب) ٣ ج) ١٠ د) ٩

١١) ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٢، عند ص ١ = -١، ص ٢ = ٢ .

أ) -٢ ب) $\frac{٤}{٣}$ ج) $\frac{١}{٢}$ د) - $\frac{١}{٢}$

١٢) إذا علمت أن ق(٣) – ق(١) = –١٦، ما متوسط تغير الاقتران ق(س)عندما تتغير س من س ١ = ١ الى س ٢ = ٣ هو

أ) - ٨ ب) ٢ ج) ٨ د) ١٦ (نظامي ٢٠١٩)

١٣) إذا كان ق (-٤) = ٢، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [– ٤، ٢] يساوي ٣، فإنَّ ق (٢) = ...

أ) ٢٠ ب) ٢٦ ج) ١٦ د) ١٨

١٤) إذا علمت أن ق(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، ما متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س ١ = $\frac{١}{٢}$ الى س ٢ = ٢ ....

أ) - $\frac{٣}{٢}$ ب) -٢ ج) -١ د) ١ (اكمال ٢٠١٩)

أتذكّر:

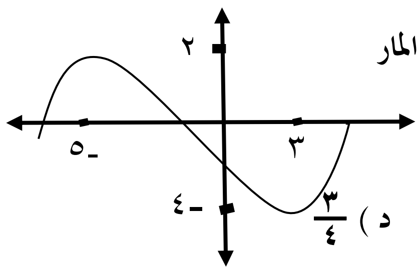
- Δ س = $\text{س}_٢$ - $\text{س}_١$
- $\text{س}_٢$ = Δ س + $\text{س}_١$
- $\text{س}_١$ = $\text{س}_٢$ - Δ س
- متوسط تغير ق(س)

$$= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

١٥) **إذا كان الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} -٢ ، فإنَّ ميل القاطع المار بالنقطتين ﺃ (-١، ق(-١)) ، ب (٢، ق(٢)) = ...**

ﺃ) ١٢   ب) ٦   ج) -٦   د) ٣   (نظامي ٢٠٢٠)

١٦) **يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) على الفترة [–٥، ٣] ، فإنَّ ميل القاطع المار بالنقطتين ﺃ (-٥ ، ق(-٥)) ، ب (٣، ق(٣))**



ﺃ) $\frac{٤}{٣}$ ب) - $\frac{٤}{٣}$ ج) -$\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{٣}{٤}$

١٧) **إذا كان الاقتران ص = ق(س) = س^{٢} وتغيرت س من س$_{١}$ = ٢ الى س$_{٢}$ = ٥ ، فإنَّ $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = ...**

ﺃ) ٧   ب) ٥   ج) ٢   د) ٣

١٨) **إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ =٢ الى س$_{٢}$ = ٤ هو٢، وكان ق (٤) = ٦، فإنَّ ق (٢) ...**

ﺃ) ٤   ب) ٢   ج) ١٠   د) -٢

١٩) **إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١،٤] هو-١٢، وكان هـ(س) =٤ق(س) - ٧ ، فإنَّ متوسط تغير الاقتران هـ(س) في نفس الفترة = ...**

ﺃ) ١٢   ب) ٤٨   ج) -١٢   د) -٤٨

٢٠) **إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) في الفترة [– ٣،١] هو ١٠، وكان هـ(س) = $\frac{١}{٢}$ ق(س) + ٣ ، فإنَّ متوسط تغير الاقتران ق(س) في نفس الفترة = ...**

ﺃ) ٥   ب) ٢٠   ج) -٢٠   د) -٥

٢١) **إذا وقعت النقطتان ﺃ (٣ ، -١٠) ، ب (٥ ، ج) على منحنى الاقتران ص = ق(س) ، وكان متوسط التغير الاقتران عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ يساوي ٣ ، فإنَّ قيمة / قيم ج هي ....**

ﺃ) ٦   ب) ٤   ج) -٤   د) -٦

٢٢) **إذا كانت النقطتان ﺃ (-٢ ، ٤) ، ب (٣ ، ٩) نقطتان على منحنى الاقتران ص = ق(س) ، فإنَّ متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من س$_{١}$ = - ٢ الى س$_{٢}$ = ٣ هو :**

ﺃ) ٥   ب) - ١   ج) ١   د) ١٣

٢٣) **إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = ﺃ س^{٢}- س في الفترة [٠،٣] يساوي ٥ ، فإنَّ قيمة ﺃ = ...**

ﺃ) ٢   ب) ٣   ج) ٤   د) ٥

٢٤) **إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = س^{٢}+٣ ، عندما تتغير س من س$_{١}$= ٢ الى س$_{٢}$ = ﺃ هو٦، فإنَّ قيمة الثابت ﺃ = ..**

ﺃ) ٢   ب) ١   ج) ٤   د) – ٤

٢٥) **إذا كان الاقتران ق(س)= ﺃ س^{٣} ، و كان ق‵ (٢) = ٦٠ ، فما قيمة الثابت ﺃ ....**   (نظامي ٢٠١٩)

ﺃ) ١٢   ب) -١٥   ج) ٥   د) ٢٠

٢٦) **إذا كان ق (٣) =٢، ق (٥) = ٨ ، فإنَّ متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من٣ إلى٥ هو .....**

ﺃ) ٢   ب) ٥   ج) ٣   د) ٧

(٢٧ **إذا كان الاقتران ق(س) = ١-٣س ، وزادت س من س$_{١}$= ٣ بمقدار٢، فإنَّ متوسط تغير الاقتران ق(س) =** .....

أ) -٢ ب) ٢ ج) -٣ د) ٣

(٢٨ **إذا كان ق(س) = س^{٢}+ ٥ س ، فإنَّ متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من صفر إلى ٤ =** ....

أ) ٩ ب) ٤ ج) ٣٦ د) – ٩

(٢٩ **إذا كان ق′ (٣) = ١٠، ق (٣) = ٥ ، فإنَّ** نهـــا$_{هـ\leftarrow ٠}$ $\frac{ق\,(٣+ هـ) - ق(٣)}{هـ}$ = ...

أ) ١٠ ب) ٥ ج) - ٥ د) - ١٠

(٣٠ **إذا كان ق(س) = π س – ١ ، فإنَّ ق′ (٣) =** ....

أ) ٣ ب) - ١ ج) صفر د) π

(٣١ **إذا كان هـ (س) =٣ ق(س) ، وكان هـ′ (٢) = ٦ ، فإنَّ ق′ (٢) =** .... (نظامي ٢٠٢٠)

أ) -٢ ب) ٢ ج) ١٨ د) ١٢

(٣٢ **إذا كان هـ (س) = ٥ ق(س) + ٣ س + ١، وكان ق′ (٢) = –١ ، فإنَّ هـ′ (٢) =** ....

أ) -٢ ب) ٨ ج) -١ د) ٢

(٣٣ **إذا كان ق(س) = أ س^{٤} –١ ، و كان ق′ (٢) = ١٦ ، فإنَّ قيمة أ =** ....

أ) -٢ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) - $\frac{١}{٢}$

(٣٤ **إذا كان ق(س) = ك (س) –٣ هـ (س) +٥ ، وكان ك (س) = ٢س^{٢}+١ كانت هـ (س) = ٢س–٣ ، فإنَّ ق′ (–٢) =** ..

أ) ١٤ ب) -١٤ ج) ٢ د) -٢

(٣٥ **إذا كان ق(س) ، ك (س) اقترانين قابلين للاشتقاق بحيث ق (١) = ٥ ، ق′ (١) =٣، ك (١) = ٤ ، ك′(١) = ٦ ،**
فإنَّ (ق× ك)′ (١) = ...

أ) ١٨ ب) ٣٨ ج) ٣٩ د) ٤٢

(٣٦ **إذا كانت ق(س) = ٣ س^{٤}+ ب س^{٢} ، وكان ق′ (١) = ٢٢ ، فإنَّ قيمة ب =** ....

أ) -٥ ب) ١١ ج)١٢ د) ٥

(٣٧ إذا كان ق (٤) = ٣، ق′ (٤) = ٦ ، هـ (٤) = ٣ ، (ق × هـ)′(٤) = **١٢** ، **فإن هـ′ (٤) =** ....

أ) -١٠ ب) ١٠ ج)٢ د) -٢ (اكمال ٢٠٢٠)

(٣٨ **إذا كان ق (٧) = - ٥ ، ق′ (٧) = ٣ ، هـ (٧) =٢ ، هـ′ (٧) = -١ ، فما قيمة (٢ق ×٣هـ)′ (٧)** ....

أ) ٦٦ ب) ٦ ج) -٦ د) -١٨ (نظامي ٢٠١٩)

(٣٩ **إذا كانت ق(س) = (٢س +١)^{٢} ، فإنَّ ق′ (-١) =** ....

أ) ٤ ب) -٤ ج) ٨ د) -٨

(٤٠ **إذا كانت ق(س) =** $\frac{س + ١}{٣س - ٧}$ ، س ≠ -$\frac{٧}{٣}$ ، **فإنَّ ق′ (١) =** ....

أ) -$\frac{١}{٤}$ ب) -$\frac{٥}{٨}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) -$\frac{١}{٢}$ (اكمال ٢٠٢٠)

٤١) إذا كان ق(س) = $\frac{\text{٢س+١}}{\text{هـ(س)}}$ ، هـ(س) ≠ صفر، وكان هـ(٣) =١، هـَ (٣) = - ٢، فإنَّ قَ (٣) = ..

أ) ٤ ب) -١٢ جـ) ١٦ د) -٣

٤٢) إذا كانت ص = ٥ س^{٤} ، فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ س = -١ = ... (اكمال ٢٠١٩)

أ) -٢٠ ب) -٥ جـ) ٥ د) ٢٠

٤٣) إذا كانت ص = (س^{٢} +٣س +٢) (٥س +١) ، فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ س=٢ = ...

أ) ١٤٧ ب) ٣٧ جـ) ١٢٧ د) ١٣٧

٤٤) إذا كان ٢ق(س) +٣هـ(س) = - ٢س ، وكان هـَ (٢) = ٤ ، فإنَّ قَ (٢) = ...

أ) - ٧ ب) -٥ جـ) ٥ د) ٧

٤٥) إذا كان هـ(س) = س + ق(س) ، وكان هـَ (٢) =٤ ، فإنَّ قَ (٢) = ...

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٥

٤٦) إذا كان ق(س) =٣ هـ(س) + س ، هـَ (٢) = -١، فإنَّ قَ (٢) = ...

أ) ١ ب) -٢ جـ)١١ د) - ١

٤٧) إذا كان ق(س) = س^{٢} ل(س) ، وكان لَ (٣) = ٢ ، ل(٣) = -$\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ ، فإنَّ قَ (٣) = ... (اكمال ٢٠١٩)

أ) -١ ب) ١٢ جـ) ١٩ د) ١٧

٤٨) إذا كان ق(س) = س^{٣}ل(س) + هـ(س) ، ل(٢) =٥، هـَ (٢) = ٧، لَ (٢) = -٣، فإنَّ قَ (٢) = ...

أ) -٤٣ ب) -٣٤ جـ) ٣٤ د) ٤٣

٤٩) إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٣} ، فإنَّ قَ (- ٢) = ...

أ) - ٨ ب) -١٢ جـ) ١٢ د) ٨

٥٠) إذا كانت ص = ٢ س^{٢} - ٥ س + ١ ، فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ س=٢ = ...

أ) - ٣ ب) ١ جـ) -٢ د) ٣

٥١) إذا كان الاقتران ق(س) = ٥$\sqrt{\text{س}}$ ، فإنَّ قَ (س) = ...

أ) $\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ ب) $\frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ جـ) ١٠ س$^{\frac{٣}{٢}}$ د) $\sqrt{\text{١٠}}$ س

٥٢) إذا كان الاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ ، فإنَّ قَ (-١) = ... (نظامي ٢٠٢٠)

أ) - $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ب) $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ جـ) -١ د) ١

٥٣) إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{\text{٨}}{\text{س}^{٢}}$ ، س ≠ صفر ، فإنَّ قَ (-٢) = ... (اكمال ٢٠٢٠)

أ) –٢ ب) ٢ جـ) صفر د) ٤

٥٤) إذا كان ٣ص + ٦ س = ٥ ، فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ =...............................

أ) ٢ ب) -٢ جـ) -٦ د) ٦

٥٥) إذا كان الاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، فإنَّ ق´(-٢٧) = ...

أ) $-\frac{٢}{٩}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) $\frac{٢}{٩}$ د) $\frac{٢}{١٧}$

٥٦) إذا كان هـ(س) = ٣ $س^{٢}$ - أ $س^{٣}$ ، وكان هـ´(-١) = ٦، فإنَّ قيمة الثابت أ = .. (اكمال ٢٠٢٠)

أ) صفر   ب) -٢   ج) -٤   د) ٤

٥٧) إذا كان الاقتران ق(س) = $س^{٢}$ + ٨ ، و كان هـ(س) = ٢ - ٢ س ، فإنَّ قيمة $\frac{ق´(٣)}{هـ´(٣)}$ = ... (اكمال ٢٠١٩)

أ) -٣   ب) -٦   ج) $\frac{٥}{٨}$ د) $\frac{-١٧}{٤}$

٥٨) إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ + ٧ ، فإنَّ ($س^{٢}$ × ق(س))´(-٢) = ...

أ) - ٢٠   ب) -٦٠   ج) ٢٠   د) ٦٠

٥٩) إذا كان ل(س) = ٢ق(س) –٤ هـ(س) ، وكان ق´(٢) = ٣ ، هـ´(٢) = –٤ ، فإنَّ ل´(٢) = ...

أ) - ٢٠   ب) -١٠   ج) ٧   د) ٢٢

٦٠) إذا كان الاقتران ق(س) = أ $س^{٢}$ +٤ س ، وكان ق´(١) = صفر، فإنَّ قيمة الثابت أ = ...

أ) ٢   ب) - ٤   ج) صفر   د) -٢

٦١) إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{٣}{س^{٢}}$ + ٥ س ، س ≠ صفر ، فإنَّ ق´(-١) = ...

أ) ١١   ب) - ١   ج) ٦   د) ١

٦٢) إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{جـ}{س-٣}$ ، وكان ق´(٤) = ١٢، فإنَّ قيمة الثابت جـ = ...

أ) -٣   ب) ٣   ج) ١٢   د) - ١٢

٦٣) ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^{٢}$ – ٣ س + ١ ، عند $س_{١}$ = ٠ ، $س_{٢}$ = ٢ ....

أ) -١   ب) - $\frac{١}{٢}$ ج) ١   د) $\frac{١}{٢}$

٦٤) ميل القاطع لمنحنى الاقتران ص = $\frac{-٢}{\sqrt{س}}$ ، عند $س_{١}$ = ١ ، $س_{٢}$ = ٤ هو ....

أ) ١   ب) -١   ج) $\frac{١}{٣}$ د) - $\frac{١}{٢}$

٦٥) إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{٥}{س^{٢}-١}$ ، فإنَّ ق´(٢) = ...

أ) $\frac{٤}{٩}$ ب) ١٥   ج) - $\frac{٢٠}{٩}$ د) $\frac{٥}{٣}$

٦٦) إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢}\sqrt{س}$ ، فإنَّ ق´(٤) = ...

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) - $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{٨}$

٦٧) **إذا كان ق(س) = م س^{٢} + ٥ س -٢ ، وكان ق َ(١) = ١١، فإنَّ قيمة الثابت م = ..**

م) ٨ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

٦٨) **إذا كان للاقتران ق(س) ، قيمة عظمى محلية عند النقطة (-١٠،٥) ، فإنَّ قيمة ق َ (-١٠) هي ....** (اكمال ٢٠١٩)

م) ١٠ ب) -١٠ ج) ٥ د) صفر

٦٩) **إذا كان للاقتران ق(س) ، قيمة صغرى محلية عند النقطة (-٢،٣) ، فإنَّ قيمة ق َ (- ٢) – ق (- ٢) = ...**

م) ٣ ب) -٣ ج) -٥ د) صفر

٧٠) **إذا كان للاقتران ق(س) = $\frac{م}{س}$ - س^{٢} ، قيمة صغرى محلية عند س =١ ، فإنَّ قيمة الثابت م = ..**

م) ٢ ب) -٢ ج) -$\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$

٧١) **الاقتران ق(س) = - ٣ س^{٢}- ١٢ س - ٥ ....**

م) متزايد في الفترة [– ٢،∞[ومتناقص في الفترة]– ∞، – ٢]

ب) متزايد في الفترة [٢،∞[ومتناقص في الفترة]– ∞،٢]

ج) متزايد في الفترة]– ∞، – ٢] ومتناقص في الفترة [– ٢،∞[

د) متزايد في الفترة]– ∞،٢] ومتناقص في الفترة [٢،∞[

٧٢) **قيمة ب التي تجعل للاقتران ق(س) =- س^{٢}+ ب س -٣ ، قيمة عظمى محلية عند س = -٢ هي ....**

م) ٢ ب) -٢ ج) ٤ د) -٤

٧٣) **إحدى اشارات ق َ(س) الآتية تظهر وجود قيمة عظمى للاقتران ق(س) عند س = ٥ ....**

أ) ++٠++ (٥)   ب) --٠-- (٥)   ج) ++٠-- (٥)   د) --٠++ (٥)

٧٤) **عدد القيم المحلية القصوى للاقتران ق(س) = ٢ س^{٣} + ٢ ، هي ....** (نظامي ٢٠١٩)

م) ٣ ب) ٠ ج) ٢ د) ١

٧٥) **فترة التناقص للاقتران ق (س) = س^{٣}- ٢٧س ، هي ....**

م)]– ∞، – ٣] ب) [– ٣،٣] ج) [٣،∞[د) [٣،∞[∪]– ∞، – ٣]

٧٦) **فترة التزايد للاقتران ق(س) = س^{٢}- ٢س - ٢، هي ....**

م) [٢،٣] ب) [٠،١] ج) [١،∞[د)]– ∞،٢]

٧٧) **قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) = س^{٣}– ٣س^{٢} قيمة محلية قصوى هي ....**

م) ٣، ٦ ب) ٠ ، ٦ ج) ٠ ، ٣ د) ٢ ، ٠

٧٨) **أحد الاقترانات الآتية عدد قيمه المحلية القصوى هو صفر ....**

م) ق(س) =٥س^{٢}– ٣س^{٣} ب) ق(س) =٥ –١٠س^{٢} ج) ق(س) = $\frac{٣س^{٢}}{٥}$ د) ق(س) = س^{٣}+١

إعداد و طباعة : أ.عايش أبوعياد للاستفسار جوال ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

التكامل غير المحدود

❖ **أتذكّر:**

● **التفاضل /**
هو إيجاد مشتقة الاقتران المُعطى :
ق (س) ⟵ ق َ (س)

● **التكامل /**
هو إرجاع المشتقة للاقتران الأصلي:
ق َ (س) ⟵ ق (س)

عملية التكامل عملية عكسية للتفاضل

الاقتران ق(س) ⟵ **عملية تفاضل** ⟵ المشتقة الأولى ق َ (س)

الاقتران العام ق ق(س) ⟶ **عملية تكامل** ⟶ المشتقة الأولى ق َ (س)

س^{٢} + عدد حقيقي ⟵ **عملية تفاضل** ⟵ ٢ س

س^{٢} + جـ ⟶ **عملية تكامل** ⟶ ٢ س

تعريف : إذا كان ق(س) اقتراناً مشتقته الأولى ق َ (س) فإن التكامل غير المحدود للاقتران ق َ (س) بالنسبة لـ س يساوي ق(س) + جـ و يرمز لعملية التكامل بالرمز ∫ وبصورة عامة فإن :

∫ ق َ (س) ؤ س = ق(س) + جـ ، جـ عدد حقيقي.

إذا كان ق(س) = ٣ س^{٢} ، **فإن ق َ (س) =** ٦س

ويكون : ق(س) = ∫ ق َ (س) ؤ س = ∫ ٦ س ؤ س = ٣س^{٢} + جـ

أكمل : إذا كان ق(س) = **٣س^{٢}** + ٢س ، **فإن ق َ (س) =** ....

قاعدة(١) : ∫ أ ؤ س = أ س + جـ ، حيث أ ، جـ عددان حقيقيان

أوجد التكامل المطلوب :

١) ∫ ٥ ؤ س = ...

٢) ∫ -١ ؤ س = ...

٣) ∫ ($\sqrt{٦}$ - ٧) ؤ س = ...

٤) ∫ $\frac{١}{٨}$ ؤ س = ...

قاعدة (٢) : ∫ س^{ن} ؤ س = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ، حيث ن ، جـ عددان حقيقيان ن ≠ -١

أجد التكامل المطلوب :

١) ∫ س^{٢} ؤ س = ...

٢) ∫ ٤س^{٣} ؤ س = ...

٣) ∫ -٧ س^{٦} ؤ س = ...

٤) ∫ - س ؤ س = ...

٥) ∫ -٢ س$^{-٣}$ د س = ...

٦) $\int \sqrt{س}\ ءس =$ ....

٧) $\int \sqrt[3]{س^{2}}\ دس =$ ....

❖ **أتذكّر :**

- $\sqrt[3]{س^{2}} = س^{\frac{2}{3}}$
- $\frac{-4}{\sqrt[2]{س^{3}}} = -4\ س^{-\frac{3}{2}}$
- $\frac{-1}{\sqrt{س}} = -\ س^{-\frac{1}{2}}$
- $\frac{2}{5\ س} = \frac{2}{5}\ س^{-1}$
- $\frac{2س}{5} = \frac{2}{5}\ س$
- $\frac{1}{2س^{-1}} = \frac{1}{2}\ س$

٨) $\int س^{\frac{3}{4}}\ ءس =$ ....

٩) $\int س^{-2}\ ءس =$ ....

١٠) $\int \frac{-2}{س^{5}}\ ءس =$ ....

١١) $\int \frac{-\frac{3}{2}}{س^{-2}}\ ءس =$ ....

قاعدة (٣)

إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل فإن $\int$ (ق(س) ± هـ (س)) ء س = $\int$ ق(س) ء س ± $\int$ هـ (س) ء س

أجد التكامل المطلوب :

١) $\int (س + س^{2})\ ءس =$ ....

٢) $\int (س^{2} - س - 1)\ ءس =$ ....

قاعدة (٤)

إذا كان ق(س) قابلا للتكامل و كان هـ (س) = ك × ق(س) حيث ك عدد حقيقي ، ك ≠ صفر

فإن $\int$ هـ (س) ء س = $\int$ ك . ق(س) ء س = ك $\int$ ق(س) ء س .

١) $\int 2س\ ءس =$ ....

٢) $\int 5\ س^{4}\ ءس =$ ....

٣) $\int -\frac{1}{2} س^{-5}\ ءس =$ ....

تمارين ومسائل

أجد التكاملات الاتية:

١) $\int$ س$^{-١}$ ء س

٢) $\int$ (٥ س^{٤} - ٢س^{٣}) ء س

٣) $\int$ (٣ س$^{\frac{١}{٢}}$ - ٩) ء س

٤) $\int$ (٢٤ س^{٣} -٤ س^{٥}- ٦س^{٧} - ١) ء س =

٥) $\int$ (س$^{-٣}$ + س$^{-٥}$) ء س ، س $\neq$ ٠

٦) $\int$ (س + $\frac{١}{س^{٢}}$) ء س ، س $\neq$ ٠

٧) $\int$ س (٢س - ١) ء س

٨) $\int$ ($\frac{١}{س^{٢}}$ + ٥) ء س ، س $\neq$ ٠

٩) $\int$ (س + ٢) (س + ١) ء س

١٠) $\int$ (س $\sqrt{س}$) ء س

١١) $\int$ (س^{٢} $\sqrt{س}$) ء س

❖ أتذكّر:

تحليل المقدار الثلاثي:
- س^{٢} + ٥س+ ٦ = (س+٣) (س +٢)
- س^{٢} – ٥س+ ٦ = (س -٣) (س - ٢)
- س^{٢} + ٥س - ٦ = (س+٦) (س - ١)
- س^{٢} – ٥س - ٦ = (س - ٦) (س+١)

تحليل الفرق بين مربعين:
- س^{٢} - ٤ = (س - ٢) (س + ٢)
- س - ٤ = ($\sqrt{س}$ - ٢) ($\sqrt{س}$ + ٢)

تحليل مجموع المربعين:
- س^{٢} + ٤ ← لا يمكن تحليله في " ح "

تحليل الفرق بين مكعبين:
- س^{٣} - ٨ = (س - ٢) (س^{٢} + ٢س + ٤)

تحليل مجموع المكعبين:
- س^{٣} + ٨ = (س+٢) (س^{٢} - ٢س + ٤)

التحليل بإخراج العامل المشترك:
- س^{٢} + ٢س = س (س + ٢)
- س^{٣} – س = س (س^{٢} - ١)
- = س (س - ١) (س + ١)

مفكوك مربع مجموع حدين:
- (س+٢)^{٢} = س^{٢} + ٤ س + ٤

= مربع الأول**+**٢×الأول×الثاني**+**مربع الثاني

مفكوك مربع فرق بين حدين:
- (س-٣)^{٢} = س^{٢} – ٦ س + ٩
- = مربع الأول **-**٢×الأول×الثاني**+**مربع الثاني

خاصية توزيع الضرب على الجمع :
- س^{٣} (س - س$^{-١}$+ س$^{-٢}$)

= س^{٣} س - س^{٣} س$^{-١}$+ س^{٣} س$^{-٢}$)

= س$^{٣+١}$ - س$^{٣+-١}$ س$^{-١}$+ س$^{٣+-٢}$)

= س^{٤} - س^{٢} + س

جمع وضرب الجذور:
- $\sqrt{س}$ + $\sqrt{س}$ = ٢$\sqrt{س}$
- $\sqrt{س}$ × $\sqrt{س}$ = س
- $\sqrt{س}$ + $\sqrt{س}$ + $\sqrt{س}$ = ٣$\sqrt{س}$

١٢) $\int (س^{٤} - \sqrt{س})\ ءس$

١٣) $\int (\frac{-٢}{س^{٤}} - س^{-٣} + س^{-٢})\ ءس$ ، $س \neq ٠$

١٤) $\int (\frac{س^{٢} - ١}{س - ١})\ ءس$ ، $س \neq ٢$

✵ **لاحظ** :

مثال :

- أجد $\int (\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣})\ ءس$ ، $س \neq ٣$
- **الحل** :

أولًا يجب التخلص من صورة الكسر = ...

$\int (\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣})\ ءس$

$= \int (\frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣})\ ءس$

$= \int (س + ٣)\ ءس$

= ....

١٥) $\int (\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٥})\ ءس$ ، $س \neq ٥$

١٦) $\int (٦س^{-٤} + \frac{٢}{س^{٥}})\ ءس$

١٧) $\int (٤س^{٣} - \frac{٣}{٥س^{٢}})\ ءس$ ، $س \neq ٠$ **(نظامي ٢٠٢٠)**

١٨) $\int (\frac{٢}{س^{٢}} + \sqrt{س})\ ءس$ ، $س \neq ٠$ (إكمال ٢٠٢٠)

١٩) $\int (\sqrt{س} - \frac{٣}{س^{٢}})\ ءس$ ، $س \neq ٠$ (نظامي ٢٠١٨)

٢٠) ∫ (س^٣/٢ ∛س) ى س

....

٢١) إذا كان ك (س) = ∫ س (٤ س – ٢) ى س ، فأجد كَ (١)

....

٢٢) إذا كان ∫ قَ(س) ى س = ٣ س^٢ – ٥س + جـ ، فأجد قَ (س)

....

❖ أتذكّر :

- ق(س) = ص
- قَ (س) = ىص/ىس

٢٣) إذا كان ∫ قَ(س) ى س = ٢س^٣ + ١/٢ ب س + جـ ، وكان قَ(١) = –٥ ، فما قيمة الثابت ب ؟

....

٢٤) إذا كان ص = ∫(٣س^٢ + ٢س) ى س ، أجد ىص/ىس عند س =١

....

السؤال الثاني :

إذا كان قَ(س) = ٢س - ٥ ، وكان ق(٢) = ٨ ،

فأجد قاعدة الاقتران ق(س) .

....

❖ أتعلم :

حل نشاط (٥) صفحة ٢٧ :

أجد قاعدة الاقتران ق(س) والذي مشتقته

قَ (س) = ∜س^٣ ، ق(١) = ١

الحل :

ق(س) = ∫ قَ (س) ى س = ∫ ∜س^٣ ى س

= ∫ س^٣/٤ ى س

ق(س) = ٤/٧ س^٧/٤ + جـ

ق(١) = ٤/٧(١)^٧/٤ + جـ = ١

جـ = ١ - ٤/٧ = ٣/٧

اذن قاعدة الاقتران ق(س) = ٤/٧ س^٧/٤ + ١

نماذج من امتحانات وزارية سابقة	
١)	إذا كان قَ(س) = ٤ س + ٣ س^٢ ، فأجد قاعدة الاقتران علماً بإن ق(١) = -٤ .
٢)	أجد قاعدة الاقتران ق(س) ، علماً بأن قَ(س) = ٤ س^٣ +١، وأن ق(٢) = ١٢ .
٣)	إذا كان مَ(س) = ٣س^٢ - ٦ ، وكان م (٢) = ٨ ، فأجد قاعدة الاقتران م (س) .
٤)	إذا كان قَ(س) = –٢ / س^–٣ ، أجد قاعدة الاقتران ق (س) ، علماً بأنه علما بانه يمر بنقطة الأصل.
٥)	أجد قاعدة الاقتران ق(س) ، علماً بان قَ(س) = ١ / ∜س^٣ ، ويمر بالنقطة (١،١) .
٦)	أجد قاعدة الاقتران ق(س) ، علماً بان ق(٠) = ٩ ، قَ(س) = ∛س^٢ .

التكامل المحدود

تعريف : إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإنَّ $\int_{أ}^{ب}$ ق َ(س) ء س = ق(س) $\Big|_{أ}^{ب}$ = ق(ب) – ق(أ)

حيث أ الحد الأدنى ، ب الحد الأعلى : أ ، ب عددان حقيقيان .

السؤال الأول : أجد التكامل المطلوب:

١) $\int_{١}^{٢}$ ٤ س ء س

....

٢) $\int_{١}^{٣}$ (٦س^{٢} – ٥) ء س

....

٣) $\int_{٢}^{١}$ (٢س + ١٢س^{٢}) ء س

....

٤) $\int_{١}^{٢}$ (٦ س^{٥} – ٤ س) ء س

....

٥) $\int_{١}^{٤}$ (١ - ٢س) ء س

....

٦) إذا كان ق (١) = ٨ ، ق (٥) = ٦ ، فإنَّ $\int_{١}^{٥}$ ق َ(س) ء س = ...

٧) إذا كان ق (٤) = ٥ ، ق (١) = –٣ ، فإنَّ $\int_{١}^{٤}$ $\frac{١}{٢}$ ق َ(س) ء س = ...

....

❖ أتذكّر :

قواعد العمليات على الأعداد الصحيحة:

١. مجموع عددين صحيحين موجبين هو عدد صحيح موجب
٢. مجموع عددين صحيحين سالبين هو عدد صحيح سالب
٣. مجموع عددين صحيحين أحدهما موجب والاخر سالب يكون عددا صحيحا موجبا أو سالبا حسب كون المكسب الذي يعبر عنه العدد الموجب أكبر أم الخسارة التي يعبر عنها العدد السالب أكبر
٤. حاصل ضرب عددين صحيحين موجبين هو عدد صحيح موجب
٥. حاصل ضرب عددين صحيحين أحدهما موجب والاخر سالب هو عدد صحيح سالب
٦. حاصل ضرب عددين صحيحين سالبين هو عدد صحيح موجب
٧. حاصل ضرب عددين صحيحين أحدهما او كلاهما صفر هو الصفر

❖ لاحظ :

التفاضل /
هو إيجاد مشتقة الاقتران المُعطى :
ق (س) ⟵ ق َ (س)

- **التكامل /**
هو إرجاع المشتقة للاقتران الأصلي:
ق َ (س) ⟵ ق (س)

٨) إذا كان $ق(س) = \int (٢س^٢ - ٣)\, ء س$ ، فما قيمة $قَ(٢)$.

٩) إذا كان $ل(س) = \int_{١}^{٣} (٣س^٢ + ٢س)\, ء س$ ، فما قيمة $لَ(١)$.

١٠) إذا كان $ص = \int_{١}^{٢} (٣س^٢ + ٢)\, ء س$ ، فما قيمة $\int ص\, ء س$

١١) إذا كان $\int قَ(س)\, ء س = \frac{١}{س^٢} + جـ$ ، فإنَّ $\int_{-٢}^{١} قَ(س)\, ء س$ ....

١٢) إذا كان $ق(س) = \int (٢س - ١)(س^٢ - ٣س + ٤)\, ء س$ ، فما قيمة $قَ(١)$.

١٣) إذا كان $ص = ق(س) = \sqrt{س} + \int_{١}^{٣} (\frac{١}{س^٢ + ١})\, ء س$ ، فما قيمة $قَ(١)$

١٤) إذا كان $\int عَ(س)\, ء س = ٣س^٢ - ٨س + جـ$ ، فأوجد ١) $\int_{١}^{٣} عَ(س)\, ء س$ ٢) قيمة جـ علما بأن $ع(٣) = ١$

❖ **أتذكّر :**

- نتيجة التكامل المحدود تساوي عدداً حقيقياً، ومشتقته = صفرا
- $\frac{ءص}{ءس} \int_{ب}^{أ} قَ(س)\, ء س = صفر$

  $\frac{ءص}{ءس} \int_{١}^{٢} س^٢\, ء س = صفر$
- $\frac{ءص}{ءس} \int قَ(س)\, ء س = قَ(س)$

  $\frac{ءص}{ءس} \int س^٢\, ء س = س^٢$
- **مشتقة التكامل المحدود تساوي صفرًا دائمًا.**
- **تنطبق جميع قواعد التكامل غير المحدود على التكامل المحدود**

أتعلم: إذا كان $ص = \int_{١}^{٢} س^٢\, ء س$ ، فإنَّ $\frac{ءص}{ءس} = صفر$ ، تأكد من الحل.

نستنتج أن مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر دائماً ، لماذا ؟

١) إذا كان $\int_{٣}^{ب} ب\, ء س = ١٠$ ، فما قيمة الثابت ب .

٢) إذا كان $\int_{١}^{أ} (٢س + ١)\, ء س = ٤$ ، فما قيمة الثابت أ .

٣) **إذا كان** $\int_{١}^{٤} \frac{جـ}{\sqrt{س}}$ ء س = -٤ ، **فما قيمة / قيم الثابت جـ ؟** (نظامي ٢٠١٨)

....

....

....

٤) **إذا كان** $\int_{صفر}^{ب}$ (س + ٢) ء س = ٦ ، **فما قيمة / قيم الثابت ب ؟**

....

....

....

٥) **إذا كان** $\int_{١}^{٢}$ (٢س + ب) ء س = $\int_{٢}^{١}$ (٢ب) ء س ، **فما قيمة / قيم الثابت ب ؟**

....

....

٦) **إذا كان** $\int$ عَ(س) ء س = $س^{٢}$ −٢س + جـ ، و كان $\int_{-١}^{ب}$ عَ(س) ء س = ١٢ ، **فما قيمة / قيم الثابت ب ؟**

....

....

٧) **إذا كان ق (٥) = ١ ، ق (٣) = ٦ ، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل** $\int_{٥}^{٣}$ (٢أ + قَ(س)) ء س = ١٧

....

....

خصائص التكامل المحدود

جد ١) $\int_{٥}^{٥}$ ٣$س^{٢}$ ء س ، **ماذا تستنتج ؟**

....

تعلم إذا كان ص = $\int_{ب}^{ب}$ ق(س) ء س = صفر ، **حيث ب عدد حقيقي**

٢) $\int_{٣}^{٣}$ س (٣س - ١) ء س = ...

تعلم إذا كان ص = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ء س = **-** $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) ء س

٣) **إذا كان** $\int_{١}^{٢}$ ٢ قَ(س) ء س = ٤ ، أجد $\int_{٢}^{١}$ (**٣** قَ (س) + ٢) ء س.

....

....

٤) **إذا كان** $\int_{-١}^{١}$ ق(س) ء س =١٣ ، وكان $\int_{١}^{-١}$ هـ (س) ء س=٧، أجد $\int_{-١}^{١}$ (**٢**ق(س) – هـ (س) + **٣** $س^{٢}$) ء س.

....

....

اتعلم $\int_{أ}^{ب} ق'(س)\, ءس = \int_{أ}^{ج} ق(س)\, ءس + \int_{ج}^{ب} ق(س)\, ءس$ **خاصية الإضافة .**

إذا كان $\int_{٢}^{٥} ٤\, ق'(س)\, ءس = ٢٠$ ، $\int_{٣}^{٢} ق'(س)\, ءس = -١٢$ ، فأجد $\int_{٣}^{٥} ٣\, ق'(س)\, ءس$.

❖خاصية الإضافة:

- $\int_{٢}^{٥} = \int_{٢}^{\cancel{٤}} + \int_{\cancel{٤}}^{٥}$
- $\int_{١}^{٦} = \int_{١}^{٤} + \int_{٤}^{٦}$
- $\int_{٨}^{٢} = \int_{٨}^{٥} + \int_{٥}^{٣} + \int_{٣}^{٢}$
- $\int_{٣}^{٧} = \int_{٣}^{٤} - \int_{٧}^{٤}$

❖ أتذكّر :

❋ خاصية الضرب في صفر:

ضرب أي عدد في صفر يساوي صفر

- ١٥ × ٠ = ٠
- ٠ × ٣ = ٠
- ٠ × ٠ = ٠

❋ خاصية القسمة على صفر:

القسمة على صفر عملية غير معرفة

- ١٥ ÷ ٠ = لا يوجد ناتج
- ٠ ÷ ٣ = ٠
- ٠ ÷ ٠ = لا يوجد ناتج

تمارين ومسائل

السؤال الأول: أجد التكامل المطلوب :

١) $\int_{٠}^{٢} (٢س - ١)\, ءس$ ، س ≠ ٠

٢) $\int_{١}^{٢} س(٢ - ٣س^{٢})\, ءس$

٣) $\int_{٤}^{٩} \left(\frac{٣}{\sqrt{س}}\right) ءس$ ، س ≠ ٠

٤) $\int_{١}^{٨} \left(\sqrt[٣]{س} + ٢\right) ءس$

٥) $\int_{١}^{٤} \left(١ - \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس$ ، س ≠ ٠

٦) $\int_{١}^{٤} \left(\sqrt{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}} \right) \text{ءس} ، \text{س} \neq ٠$ ....

٧) $\int_{١}^{٠} \left(\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} \right) \text{ءس} ، \text{س} \neq ٢$ ....

❖ **أتذكّر :**

- $\text{س}^{٢} - ٤$
  مقدار على صورة فرق بين مربعين يمكن تحليله
  $\text{س}^{٢} - ٤ = (\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)$
- $\text{س}^{٢} + ٤$
  مقدار على صورة مجموع مربعين لا يمكن تحليله في ح
- $\text{س}^{٣} + ٨$
  مقدار على صورة مجموع مكعبين يمكن تحليله
  $\text{س}^{٣} + ٨ = (\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤)$
- $\text{س}^{٣} - ٨$
  مقدار على صورة فرق بين مكعبين يمكن تحليله
  $\text{س}^{٣} - ٨ = (\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)$

٨) $\int_{١}^{٢} \left(\frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢} \right) \text{ءس} ، \text{س} \neq ٢$

٩) $\int_{١}^{٢} \left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} \right) \text{ءس} ، \text{س} \neq ٠$ ....

١٠) $\int_{١}^{٤} \left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{-٢}{\text{س}^{٣}} \right) \text{ءس} ، \text{س} \neq ٠$ ....

١١) إذا كان $\int_{٢}^{٥} ٣\,\text{ق(س)}\,\text{ءس} = ١٥$ ، فأجد $\int_{٥}^{٢} (٤\,\text{ق(س)} + ٢\text{س} - ٢)\,\text{ءس}$

السؤال الثاني :

١– إذا علمت أنَّ : $\int_{1}^{5}$ ق(س) ءس = ٤ ، $\int_{1}^{3}$ ٢ ق(س) ءس = ١٢ ، فأجد $\int_{5}^{3}$ ٢ ق(س) ءس.

٢- إذا كان $\int_{3}^{5}$ ٤ق(س) ءس = ١٦ ، $\int_{1}^{5}$ ق(س) ءس = ٨ ، فأجد $\int_{3}^{1}$ (ق(س) –٢ س) ءس.

٣- إذا كان $\int_{1}^{5}$ ق(س) ءس = ٤ ، $\int_{1}^{2}$ ٢ق(س) ءس = ١٠، فأجد $\int_{5}^{2}$ (٤ ق(س) +٢ س) ءس.

٤- إذا كان $\int_{-1}^{5}$ ق(س) ءس = ٣ ، $\int_{2}^{5}$ (ق(س) +٢) ءس = ١٣ ، فأجد $\int_{2}^{-1}$ ٤ق(س) ءس (نظامي٢٠٢٠)

٥- إذا كان $\int_{1}^{7}$ (٣ق(س) + ٢) ءس = ٢٤ ، $\int_{5}^{7}$ ٢ق(س) ءس = ٦ ، فأجد $\int_{1}^{5}$ ق(س) ءس. (إكمال٢٠٢٠)

نماذج من امتحانات وزارية سابقة (التكامل المحدود والتكامل غير المحدود)

١. إذا علمت أنَّ : $\int_{١}^{٥}$ ق (س) د س = ٤ ، $\int_{١}^{٣}$ ٢ ق (س) د س = ١٢ ، فأجد $\int_{٥}^{٣}$ ق (س) د س

٢. إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ ٢ ق(س) د س = ١٠ ، $\int_{٢}^{٣}$ ق (س) د س = -١٢ ، فأجد $\int_{٣}^{٥}$ (ق(س) +٢س) د س

٣. إذا كان $\int_{١}^{٥}$ ق(س) د س = ٤ ، $\int_{١}^{٢}$ ٢ق(س) د س = -١٠ ، فأجد $\int_{٢}^{٥}$ (٣س^{٢} - ٤ق(س)) د س.

٤. إذا علمت أنَّ : $\int_{٩}^{٤}$ (٣ق(س) – ٦) د س ، $\int_{٢}^{٩}$ ق(س) د س = ١٠ ، فأجد $\int_{٢}^{٤}$ (٣ق(س)) د س = ١٢

٥. إذا علمت أنَّ : $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) د س =٤ ، $\int_{١}^{٣}$ (ق(س) –٣) د س = ٦ ، فأجد $\int_{-٢}^{١}$ ق (س) د س.

٦. إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ٢ ق(س) د س = ٤ ، فأجد $\int_{٢}^{١}$ (٣ ق(س) + ٢) د س.

٧. أجد التكاملات الاتية ١) $\int$ (س$^{-٤}$+٣) د س ٢) $\int_{١}^{٢}$ س (٣ س +٢) د س

٨. إذا كان $\int_{٥}^{٣}$ ٢ ق(س) د س = - ٨ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٥}$ (٣ ق(س) + ٦) د س.

٩. ١) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق(س) د س - $\int_{٤}^{٣}$ ق(س) د س = $\int_{٢}^{٥}$ (٢س +١) د س ، فأجد $\int_{١}^{٤}$ ق (س) د س.

٢) إذا كان $\int_{-١}^{٣}$ ٢أس د س = $\int_{١}^{٥}$ ٢ د س ، فما قيمة الثابت أ ؟

١٠. إذا كان $\int$ ق(س) د س = ٢س^{٣}+ ٢ ب س + جـ ، وكان ق$'$(٠) = ٢٦ ، فما قيمة الثابت ب ؟

١١. إذا كان $\int_{١}^{٢}$ (٢س + ب) د س = $\int_{٣}^{١}$ ٢ب د س ، فما قيمة الثابت ب ؟

١٢. إذا كان $\int_{١}^{٣}$ (ق(س) –٢) د س = $\int_{٣}^{١}$ (ب س – ق(س)) ، فما قيمة الثابت ب ؟ (نظامي٢٠٢٠)

١٣. ١) إذا كان $\int$ ق$'$(س) د س = س^{٤} - ٦ س^{٢} + ٨ ، فأجد ق$'$(٢).

٢) احسب $\int_{١}^{٢}$ (س –٢) (س + ٢) د س

١٤.	**إذا كان $\int_{٠}^{٤}$ أس د س = $\int_{١}^{٢}$ (٤س-٢) د س ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟**
١٥.	١) **أجد $\int_{٠}^{٢}$ ٢س (س + ٢) د س** ٢) **أجد $\int_{٣}^{١}$ (٣س - ١) (س+١) د س.**
١٦.	**١) إذا كان $\int_{٠}^{أ}$ (س + أ) د س = $\int_{١}^{٣}$ أ د س ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟** **٢) إذا كان $\int_{صفر}^{ب}$ (س + ٢) د س = ٦ ، فما قيمة الثابت ب ؟**
١٧.	**إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ (٢ أ س − $\frac{١}{٢}$) د س = $\int_{٠}^{٢}$ (س +٢)^{٢} د س ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟**
١٨.	**إذا كان ∫ ق′(س) د س = $\frac{٤}{س}$ + س^{٢} + جـ ، فأجد $\int_{١}^{٢}$ ق′(س) د س.**
١٩.	**إذا كان $\int_{-١}^{٤}$ ٢ ق(س) د س= ٢٠ ، $\int_{-١}^{٤}$ ٣ هـ(س) د س = ١٥ فما قيمة $\int_{٤}^{-١}$ (ق(س) + هـ(س)) د س**
٢٠.	إذا علمت أنَّ : **$\int_{٣}^{-١}$ ٢ ق(س) د س = ١٠ ، $\int_{-١}^{٣}$ ٧ هـ(س) د س = ٢١ ،** **فما قيمة $\int_{-١}^{٣}$ (ق(س) – هـ (س)) د س**
٢١.	**إذا كان $\int_{١}^{أ}$ (٢ س + ١) د س = $\int_{٠}^{١}$ (٣ س^{٢} – أ) د س ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟**
٢٢.	**إذا كان $\int_{٠}^{أ}$ (٣س^{٢} + ٦س) ءس = ٠ ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟**
٢٣.	**إذا كان $\int_{١}^{أ}$ (س + أ) د س = $\int_{٣}^{٣}$ ق(س) د س. ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟**
٢٤.	**إذا كان $\int_{١}^{٢}$ (٢س + ١) د س + $\int_{٢}^{ب}$ (٢س + ١) د س = صفر ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟**
٢٥.	**إذا كان $\int_{١}^{٢}$ (س + ب) د س = - $\frac{٣}{٢}$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟**
٢٦.	**إذا كان $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) س = ٦ ، $\int_{٢}^{٤}$ (أ س + ٣ ق(س)) دس = ٣٠ ، فما قيمة / قيم الثابت أ .**
٢٧.	**إذا كان $\int_{٥}^{٢}$ (٢ق(س) دس = ٨ ، $\int_{٢}^{٥}$ (٢ق(س) + أ) دس = ١٢ ، فما قيمة / قيم الثابت أ .**

١. إذا كان ص = $\int$ $\frac{1}{3}$ س^{3} د س ، فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

أ) س^{2} ب) $\frac{1}{3}$ س^{3} ج) $\frac{\text{س}^{4}}{12}$ د) $\frac{\text{س}^{4}}{12}$ + جـ

٢. إذا كان ق(س) = ٣ $\int$ س^{2} د س ، فإنَّ قَ (-١) = ...

أ) -٣ ب) ٣ ج) $\frac{\text{س}^{3}}{3}$ + جـ د) س^{3} + جـ

٣. إذا كان $\int$ قَ(س) د س = ٣ س^{2} – ٤ س+ ٢، فإنَّ قَ (١) تساوي ....

أ) –٣ ب) ١ ج) ٢ د) صفر

٤. إذا كان ق(س) = س^{3}+ $\int$ $\sqrt{\text{س}}$ د س ، فإنَّ قَ (١) = ...

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

٥. إذا كان ق(س) = $\int_{0}^{1}$ ($\sqrt{\text{٣س+١}}$) د س + $\int$(س^{2}+٢س+١) د س ، فإنَّ قَ (١) = ...

أ) صفر ب) ٤ ج) ٥ د) ٦

٦. إذا كان ص = $\int$ (٣ س – ٥) ء س ، فإنَّ قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = ١ تساوي ....

أ) –٢ ب) –١ ج) ١ د) ٢

٧. إذا كان ص = س^{3} + $\int$ (٦س^{2}+٤) د س ، فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ... (نظامي ٢٠١٩)

أ) ٩س^{2}+٤ ب) س^{3}+ ٦س^{2}+٤ ج) ٣س^{2} +١٢س د) ٣س^{2}+ ٢س^{3}+٤س + جـ

٨. إذا كان هـ (س) = $\sqrt[3]{\text{س}}$ + $\int_{0}^{3}$ (٣س^{2}– ١) ء س ، فإنَّ هـَ (-١) = ...

أ) $\frac{1}{3}$ ب) –١ ج) ١ د) –٣

٩. إذا كان ص = $\int_{0}^{4}$ (٢ س + ١) د س ، فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

أ) ١٢ ب) ٢ س + ١ ج) س^{2} + س د) صفر

١٠. إذا كان ص = $\int$ قَ(س) د س = س^{2}– ٧ س + جـ ، فإنَّ قَ (٢) تساوي .... (نظامي٢٠٢٠)

أ) $\frac{7}{2}$ ب) ١ ج) –٦ د) –٣

١١. إذا كان $\int$ قَ (س) د س = $\frac{\text{س}}{\text{س + ١}}$ + جـ ، فإنَّ $\int_{0}^{1}$ قَ (س) د س = ...

أ) – $\frac{3}{4}$ ب) صفر ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{2}$

١٢. إذا كان ك (س) = $\int$ (٢ س^{3} + جـ) ء س ، وكانَّ كَ (–١) =٥ ، فإنَّ قيمة جـ تساوي .... (اكمال ٢٠١٩)

أ) ٣ ب) ٥ ج) ٧ د) –١

١٣. إذا كان ق(٧) = ٨ ، ق(٥) = – ٢ ، فإنَّ $\int_{5}^{7}$ ٢ قَ (س) د س = ...

أ) ١٠ ب) ٢٠ ج) –١٠ د) –٢٠ (نظامي ٢٠١٩)

إعداد و طباعة : أ.عايش أبوعياد للاستفسار جوال ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

١٤. إذا كان ٢ق(٣) = − ٢ ، $\frac{1}{5}$ ق(٧) = ٥، فإنَّ $\int_{3}^{7}$ قَ(س) د س = ...

أ) ٢٤ ب) ٢٦ جـ) −٢٤ د) −٢٦

١٥. إذا كان $\int_{1}^{3}$ قَ(س) د س = ٨ ، وكان ق(٣) = − ق(١) ، فإنَّ ق(٣) = ...

أ) −٤ ب) صفر جـ) ٤ د) ٨

١٦. إذا كان $\int_{1}^{5}$ قَ(س) د س = −٢، ق(١) = ٨ ، فإنَّ ق(٥) = ...

أ) ٢ ب) ٦ جـ) ١٤ د) ٤٨

١٧. ما قيمة $\int_{-1}^{2}$ قَ(س) د س ، إذا كان ق(٢) = ٧ ، قَ(−١) = ٢، قَ(٢) = ٣ ، ق(−١) = ١ .. (اكمال٢٠٢٠)

أ) ٤ ب) ٢ جـ) ٦ د) ٩

١٨. إذا كان $\int_{2}^{5}$ قَ(س) د س = ١٢، ق(٥) = ٢ ق(٢) ، فإنَّ ق(٢) = ...

أ) ٤ ب) ١٢ جـ) ٥ د) ٢

١٩. إذا كان $\int_{1}^{4}$ ٢ق(س) د س = − ٦، فإنَّ $\int_{4}^{1}$ ٣ ق(س) د س = ...

أ) ١٨ ب) ٩ جـ) − ٩ د) −١٨

٢٠. إذا كان $\int_{1}^{4}$ ٢ق(س) د س = ٨ ، $\int_{5}^{4}$ ق(س) د س = ٧ ، فإنَّ $\int_{1}^{5}$ ق(س) د س = ...

أ) ١١ ب) ١ جـ) ٣ د) − ٣

٢١. إذا كان $\int_{3}^{2}$ ق(س) د س = ٨ ، فإنَّ قيمة $\int_{2}^{3}$ (٢ق(س) + ٥) د س = ... (اكمال٢٠٢٠)

أ) ٢١ ب) −١١ جـ) ١١ د) ١٣

٢٢. إذا كان $\int_{5}^{7}$ ٢ق(س) د س = ٦ ، $\int_{5}^{1}$ ق(س) د س = ٤ ، فإنَّ قيمة $\int_{1}^{7}$ (٣ق(س) + ٢) د س = ...

أ) ٣٢ ب) ٩ جـ) ٣٣ د) ٣

٢٣. قيمة $\int_{1}^{4} \frac{1}{س^{2}}$ د س = ...

أ) $\frac{3}{4}$ ب) − $\frac{5}{4}$ جـ) −$\frac{3}{4}$ د) $\frac{5}{4}$

٢٤. قيمة $\int$ س $\sqrt{س}$ د س = ...

أ) $س^{\frac{5}{2}}$ + جـ ب) $\frac{3}{2}$ $س^{\frac{1}{2}}$ + جـ جـ) $\sqrt{س}$ + جـ د) $\frac{2}{5}$ $س^{\frac{5}{2}}$ + جـ

٢٥. قيمة $\int$ س $\sqrt[3]{س^{2}}$ د س = ...

أ) $س^{\frac{5}{3}}$ + جـ ب) $\frac{3}{5}$ $س^{\frac{5}{3}}$ + جـ جـ) $س^{\frac{8}{3}}$ + جـ د) $\frac{3}{8}$ $س^{\frac{8}{3}}$ + جـ

٢٦. قيمة $\int$ ٧ س $\sqrt[3]{س}$ د س = ... (اكمال٢٠٢٠)

أ) ٣ $س^{\frac{7}{3}}$ + جـ ب) ٣ $س^{\frac{3}{7}}$ + جـ جـ) ٧ $س^{\frac{4}{3}}$ + جـ د) ٧ $س^{\frac{3}{4}}$ + جـ

.٢٧ قيمة $\int \pi^{2}$ د س = ...

أ) π^{3} + جـ ب) π^{2} س + جـ ج) $\frac{\pi^{3}}{3}$ + جـ د) $\frac{\pi^{3}}{3}$ س + جـ

.٢٨ قيمة $\int$ هـ^{2} د هـ = ...

أ) هـ^{3} س + جـ ب) هـ^{2} س + جـ ج) $\frac{\text{هـ}^{3}}{3}$ + جـ د) $\frac{\text{هـ}^{3}}{3}$ س + جـ

.٢٩ قيمة $\int$ ع^{2} د س = ...

أ) ع^{3} س + جـ ب) ع^{2} س + جـ ج) $\frac{\text{ع}^{3}}{3}$ + جـ د) $\frac{\text{ع}^{3}}{3}$ س + جـ

.٣٠ قيمة $\int \sqrt[3]{5}$ د س = ...

أ) $\sqrt[3]{5}$ + جـ ب) $\sqrt[3]{5}$ س + جـ ج) $\sqrt[3]{\text{٥س}}$ + جـ د) صفر

.٣١ $\int$ −١ د س = ...

أ) صفر ب) − س + جـ ج) $\frac{-\text{س}^{2}}{2}$ + جـ د) −١ + جـ

.٣٢ $\int$ صفر د س = ...

أ) صفر ب) س ج) $\frac{\text{س}^{2}}{2}$ + جـ د) جـ

✵ أتذكّر :

نتيجة التكامل المحدود تساوي عدداً حقيقياً، ومشتقته = صفراً .

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \int_{\text{ب}}^{\text{أ}}$ ق$'$(س) ء س = صفر

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \int_{1}^{2}$ س^{2} ء س = صفر

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \int$ ق$'$(س) ء س = ق$'$(س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \int$ س^{2} ء س = س^{2}

.٣٣ إذا كان $\int_{1}^{5} \frac{1}{2}$ د س = ...

أ) $\frac{1}{2}$ س + جـ ب) ١ ج) ٢ د) ٤

.٣٤ إذا كان $\int_{3}^{5} \frac{\text{٦ − ٢س}}{\text{س − ٣}}$ د س = ...

أ) −٢ ب) ٢ ج) ٤ د) −٤

.٣٥ $\int_{5}^{5} \left(\frac{\text{٣س}^{2}\text{ − ٩س}}{\sqrt{\text{س − ١}}} \right)$ د س = ...

أ) ٥ ب) −٥ ج) صفر د) ١٢

.٣٦ إذا كان $\int_{1}^{7}$ ق(س) د س = ٣ ، $\int_{2}^{7}$ ق(س) د س = −١٣ ، فإنَّ $\int_{2}^{1}$ ق(س) د س يساوي :

أ) −١٠ ب) −١٦ ج) −٣ د) ١٠

.٣٧ إذا كان $\int_{1}^{4}$ ٢ق(س) د س = ١٠ ، فإنَّ $\int_{4}^{1} \frac{1}{2}$ ق(س) د س = ... (نظامي ٢٠١٩)

أ) $\frac{5}{2}$ ب) −٥ ج) −١٠ د) −$\frac{5}{2}$

.٣٨ إذا كان $\int_{5}^{7}$ ٣ ق(س) د س = ١٥ ، فإنّ $\int_{7}^{5}$ ق(س) د س = ... (نظامي٢٠٢٠)

أ) ١٥ ب) −٥ ج) −١٥ د) ٥

.٣٩ إذا كان $\int_{.}^{3}$ ق(س) د س = ٤، وكان $\int_{3}^{5}$ ق(س) د س =١، فإنَّ $\int_{.}^{3}$ ق(س) د س − $\int_{5}^{3}$ ق(س) د س ......

أ) ٣ ب) ٥ ج) −٣ د) −٥

٤٠.	إذا كان $\int_{-1}^{5} 3\,\text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = 6$ ، فإنَّ $\int_{-1}^{5} (2 - \text{ق}(\text{س}))\,\text{د س}$ .... (اكمال ٢٠١٩) أ) ١٠ ب) ٦ ج) صفر د) ١٢
٤١.	إذا كان $\int_{1}^{3} \text{ب س}\,\text{د س} = 32$ ، فإنَّ قيمة ب = ... أ) ٨ ب) ١٦ ج) ٤ د) ٢
٤٢.	إذا كان $\int_{3}^{\text{ب}} \text{ب}\,\text{د س} = 10$ ، فإنَّ قيم ب = ... أ) ٢ ، −٥ ب) −٢ ، ٥ ج) ٢ ، ٥ د) −٢ ، −٥
٤٣.	إذا كان $\int_{2}^{\text{ب}} 4\text{س}\,\text{د س} = 24$ ، فإنَّ قيمة / قيم ب = ... (اكمال ٢٠٢٠) أ) −٤ ، −٢ ب) −٤ ، ٤ ج) ٤ ، −١ د) −٤ ، ١
٤٤.	إذا كان $\int_{1}^{\text{أ}} 3\,\text{أ}\,\text{د س} = 6$ حيث أ عدد حقيقي موجب ، فإنَّ قيمة أ تساوي .... أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٦
٤٥.	إذا كان $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} 2\text{أ}\,\text{د س} = 36$ ، حيث أ عدد حقيقي موجب ، فإنَّ قيمة أ تساوي .... أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٩
٤٦.	إذا كان $\int_{-\text{ج}}^{\text{ج}} (2\,\text{س}+5)\,\text{د س} = 10$ ، فإنَّ قيمة ج تساوي .... أ) ١ ب) ٢ ج) ١٠ د) −٥
٤٧.	إذا كان $\int_{-1}^{3} (3\text{س}^{2} + \text{ب})\,\text{د س} = 16$ ، فإنَّ قيمة الثابت ب هي .... (نظامي ٢٠٢٠) أ) −٦ ب) ٦ ج) −٣ د) ٣
٤٨.	إذا كان $\int_{1}^{2} (\text{س} + \text{ب})\,\text{د س} = -\frac{3}{2}$ ، فإنَّ قيمة الثابت ب هي .... أ) −٣ ب) −٢ ج) ٢ د) ٣
٤٩.	أحد الاقترانات الآتية يعتبر اقتراناً أصلياً للاقتران الذي مشقته $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-5}{\text{س}^{2}}$ .... أ) $-5\,\text{س} + \text{ج}$ ب) $\frac{10}{\text{س}^{2}} + \text{ج}$ ج) $\frac{-5\,\text{س}}{3\text{س}^{2}} + \text{ج}$ د) $\frac{5}{\text{س}} + \text{ج}$ (اكمال ٢٠٢٠)
٥٠.	$\int \frac{\text{س}^{2} - 9\text{س} + 8}{\text{س} - 1}\,\text{ء س} =$ .... أ) $\frac{1}{2}\text{س}^{2} + 8\,\text{س} + \text{ج}$ ب) $\text{س} - 8 + \text{ج}$ ج) $\frac{1}{2}\text{س}^{2} - 8\,\text{س} + \text{ج}$ د) $3\,\text{س}^{2} + 2\text{س}^{2} - 9$
٥١.	ما الاقتران الذي يمثل اقترانا اصليا للمشتقة $\text{ق}'(\text{س}) = 4\text{س}^{2} + 6\,\text{س} + 2$ .... أ) $\frac{4}{3}\text{س}^{3} + 3\text{س}^{2} + 2\,\text{س} + 1$ ب) $\frac{4}{3}\text{س}^{3} + 6\text{س}^{2} + 2\text{س} + 1$ ج) $8\,\text{س} + 6$ د) $\frac{4}{3}\text{س}^{3} + 3\text{س}^{2} + 2$

إعداد و طباعة : أ.عايش أبوعياد للاستفسار جوال ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤٠

الوحدة الثانية : المصفوفات

المصفوفات

❖ **تعريف :**

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لأعداد حقيقية مرتبة في "م" من الصفوف و "ن" من الأعمدة، محصورة بين قوسين [ ]ويرمز للمصفوفة بأحد الأحرف التالية: أ ، ب ، جـ ، س ، ص ، .....

- **رتبة المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة = م × ن ، بحيث م ، ن ∋ ط***
- **يرمز للمدخلة في الصف س والعمود ص داخل المصفوفة أ بالرمز أ $_{\text{س ص}}$.**

$$\text{أ} = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccc} ٥ & ١ & ٨ \\ ١١ & ٣ & ٧ \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \text{عمود أول} & \text{عمود ثان} & \text{عمود ثالث} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \text{صف أول} \\ \text{صف ثان} \end{array}$$

- **لاحظ ان :**
- **رتبة المصفوفة أ = عدد الصفوف × عدد الأعمدة = م × ن = ٢ × ٣**
- **أ $_{١٢}$ هي المدخلة التي تقع في الصف الأول والعمود الثاني = ١**
- **أ $_{٢٣}$ هي المدخلة التي تقع في الصف الثاني والعمود الثالث = ٧**

السؤال الأول : إذا كانت : س =

$$\left[\begin{array}{cccc} ١ & ٧ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٠ & -١ & -١ \\ ٥ & ٨ & ٦ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ١ & -٤ \end{array}\right]$$

فأوجد: أ) رتبة المصفوفة س ب) عين قيم المدخلات الأتية : س$_{١١}$ ، س$_{٢١}$ ، س$_{٤٢}$ ، س$_{٣٣}$ جـ) اسم المدخلة ٨ .

الحل /

....

....

....

....

السؤال الثاني: أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية:

أ = $\left[\begin{array}{cc} ١ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{array}\right]$ ، ب = $\left[\begin{array}{ccc} ١ & -١ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{array}\right]$ ، جـ = $\left[\begin{array}{cc} -٢ & ٣ \\ ١ & ٦ \\ -١ & \text{صفر} \end{array}\right]$ ، د = $\left[\begin{array}{c} ٨ \\ -١ \end{array}\right]$ ، س= $\left[\begin{array}{cc} ١ & ٣ \end{array}\right]$ ،ص = $\left[\begin{array}{c} -٣ \end{array}\right]$

الحل /

....

....

....

....

المصفوفات الخاصة

١) المصفوفة المربعة / هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة .

مثل: $أ = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -9 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

٢) المصفوفة الصفرية / هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار ويرمز لها بالرمز" و " .

مثل: $و_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $و_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٣) مصفوفة الصف/ هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد ، وعدد ن من الأعمدة و تكون رتبتها ١ × ن

مثل: $أ = \begin{bmatrix} -1 & 7 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -6 & 8 \end{bmatrix}$

٤) مصفوفة العمود/ هي المصفوفة التي تتكون من عمود ، وعدد م من الصفوف و تكون رتبتها م × ١

مثل: $و = \begin{bmatrix} \frac{6}{19} \\ 9 \end{bmatrix}$ ، $و = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$

٥) مصفوفة الوحدة / هي مصفوفة مربعة مدخلات قطرها الرئيسي=١ وباقي مدخلاتها = صفر ويرمز لها بالرمز " م"

مثل : $م_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $م_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، **لاحظ ان المصفوفة** $أ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **ليست مصفوفة وحدة .**

<u>السؤال الأول:</u>

لديك المصفوفات التالية: $أ = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 2 & \text{صفر} & -2 \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $د = \begin{bmatrix} -2 & 8 \end{bmatrix}$

، $هـ = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 6 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ ، $و = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 7 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ ، $ل = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

١) حدد رتبة كل مصفوفة .

....

٢) سم المصفوفة المربعة فيما بينها ، وماهي رتبتها ؟

....

٣) ما قيمة كل من المدخلات الأتية: $أ_{11}$ ، $ب_{12}$ ، $جـ_{23}$ ، $هـ_{13}$ ، $ل_{11}$

....

٤) أوجد قيمة $هـ_{23} \times هـ_{21}$

....

٥) ما هو عدد مدخلات المصفوفة ب . ....

٦) أوجد قيمة $2\,ب_{21} + 3ب_{32} - 2هـ_{22}$

....

السؤال الثاني:

إذا كانت ب مصفوفة من الرتبة ٢×٢ إذا عُرفت مدخلاتها بحيث أن $\text{ب}_{\text{ي هـ}}$ = ي + هـ ، أكتب هذه المصفوفة بذكر مدخلاتها،

ثم أجد المدخلة ٥ $\text{ب}_{٢٢}$ – ٢$\text{ب}_{٢١}$

الحل /

✵ أتذكّر:

مصفوفة الصف: هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط، و" ن " من الأعمدة ، وتكون رتبتها ١× ن.

مصفوفة العمود: هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط، و" م " من الصفوف، وتكون رتبتها م × ١

المصفوفة المربعة: **هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة ،ويساوي " ن" وتسمى المصفوفة مربعة من الرتبة النونية.**

المصفوفة الصفرية: هي المصفوفة التي تكون كل مدخلة فيها تساوي صفرًا، ويرمز لها بالرمز(و)

تساوي مصفوفتين

تتساوى مصفوفتين أ ، ب إذا تحقق الشرطان :

١. لهما نفس الرتبة .
٢. جميع المدخلات المتناظرة متساوية .

مثال : $\begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٥ \\ \frac{٤}{٢} & \sqrt{٤} \end{bmatrix}$

١) إذا كانت : $\begin{bmatrix} \text{ص} & ٣ \\ ٥ & \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ **، فأحسب قيمتي س ، ص ؟**

الحل /

٢) إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ \text{س} + ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ص} & ٢ \\ -٥ & -١ \end{bmatrix}$ **، فأحسب قيمتي س + ٢ص ؟**

الحل /

٣) أجد قيمتي س ، ص التي تحقق $\begin{bmatrix} \text{ص}^{٣} & ٢ \\ ٥ & \text{س} - \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل /

٤) أجد قيمتي س ، ص : $\begin{bmatrix} ٣س \\ ص + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ \\ ٣ \end{bmatrix}$

....

....

....

....

٥) أجد قيمتي س ، ص : $\begin{bmatrix} س - ١ & ص^{٢} \\ ٢س + ١ & ١٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ١٣ & ١٣ \end{bmatrix}$.

✵ أتذكّر:

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما الرتبة نفسها،وكانت جميع مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

إذا كانت :

$\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

أكمل الفراغ :

س =......... ص =........

ل =......... ع =........

....

....

....

٦) أجد قيمتي س ، ص : $\begin{bmatrix} س - ص \\ س + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٧ \end{bmatrix}$.

....

....

....

....

....

٧) إذا كانت : $\begin{bmatrix} -٣ \\ س - ٢ \\ ٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \\ ٢س \end{bmatrix}$ **، أحسب قيمة ص ؟**

....

....

....

....

٨) إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٢ & س - ٢ص & ٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ & -٦ \end{bmatrix}$ **، فأجد قيمة س ؟**

....

....

....

....

٩) إذا كانت س مصفوفة من الرتبة ٣ × ٤، أحسب عدد مدخلات المصفوفة س ؟

....

العمليات على المصفوفات

أولاً / ضرب المصفوفة في عدد حقيقي:

إذا كانت ٩ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ك عدد حقيقي غير الصفر فأن : ك ٩ = ضرب كل مدخلة في المصفوفة ٩ بالعدد ك .

١) إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فأجد : ٣ س ، − ٢ س ، $\frac{١}{٢}$ س

٢) إذا كانت ٢ب = $\begin{bmatrix} -٢ & -٤ & -٦ \\ ٦ & \text{صفر} & ٤ \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة ب

٣) إذا كانت ٣ب = $\begin{bmatrix} ١٥ & ٩ \\ ١٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة ٢ب .

٤) إذا كانت: − س = $\begin{bmatrix} -١٠ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$ ، أجد المصفوفة $\frac{١}{٢}$ س .

٥) إذا كانت : ٣ س = $\begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ١٨ & -١٢ \end{bmatrix}$ ، أجد المصفوفة − $\frac{١}{٢}$ س .

٦) إذا كان ٩ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٤ ، فإنَّ رتبة المصفوفة ٣ ٩

هي ....

٧) إذا كانت س مصفوفة من الرتبة الثانية ، فإنَّ رتبة ٥ س .

هي ....

٨) إذا كانت رتبة $\frac{١}{٢}$ س هي ٤ × ٦ ، فإنَّ رتبة س .

هي ....

٩) إذا كان ٩ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٤ ، فإنَّ رتبة $\frac{١}{٢}$ ٩ .

هي ....

❖ أتذكّر:

قواعد العمليات على الأعداد الصحيحة :

- مجموع عددين صحيحين موجبين هو عدد صحيح موجب
- مجموع عددين صحيحين سالبين هو عدد صحيح سالب
- مجموع عددين صحيحين أحدهما موجب والاخر سالب يكون عددا صحيحا موجبا أو سالبا حسب كون المكسب الذي يعبر عنه العدد الموجب أكبر أم الخسارة التي يعبر عنها العدد السالب أكبر
- ١٢ + (- ٥) = ٧
- (-١٢) + ٥ = - ٧
- (-١٢) + (- ٥) = - ١٧
- ١٢ - ٥ = ٧
- ١٢ - (- ٥) = ١٧
- (-١٢) - ٥ = - ١٧

١٠) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} س \\ -١٢ \end{bmatrix}$ ، **ب =** $\begin{bmatrix} -٤ \\ ٢ص \end{bmatrix}$

بحيث أن : ٢ أ = ٣ ب ، أجد قيمتي س ، ص ؟

الحل /

....

....

....

ثانياً / جمع و طرح المصفوفات :

- **لإيجاد ناتج جمع أو طرح مصفوفتين أ ، ب يجب أن يكون لهما نفس الرتبة م × ن ، وينتج مصفوفة لها نفس الرتبة :**

١. عملية الجمع يرمز لها أ + ب ، ويتم جمع المدخلات المتناظرة .

٢. عملية الطرح يرمز لها أ – ب ، ويتم طرح المدخلات المتناظرة .

السؤال الأول:

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٥ & -٦ & ٤ \end{bmatrix}$ **، ص =** $\begin{bmatrix} -٨ & ٦ & -٣ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ **، فأجد إذا امكن /**

١) س + ص **٢) ص – س**

الحل /

....

....

....

....

....

❖ تعريف :

(جمع المصفوفات)

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين كل منهما من الرتبة نفسها م×ن ، فأن مجموع المصفوفتين أ+ ب = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م×ن ، وتكون كل مدخلة في المصفوفة جـ مساوية لمجموع المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين أ ، ب ، أي أن:

$جـ_{ى×هـ} = أ_{ى×هـ} + ب_{ى×هـ}$

(طرح المصفوفات)

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين كل منهما من الرتبة نفسها م×ن ، فأن حاصل طرح المصفوفتين أ - ب = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م×ن ، وتكون كل مدخلة في المصفوفة جـ مساوية لحاصل طرح المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين أ ، ب ، أي أن:

$جـ_{ى×هـ} = أ_{ى×هـ} - ب_{ى×هـ}$

السؤال الثاني :

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٨ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$ **، ب =** $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ -٢ & -٢ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

فأجد إذا أمكن /

١) أ + ب **٢) أ – ٣ ب**

....

....

....

....

....

السؤال الثالث :

إذا كانت $ꟽ = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، **ب =** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ، **فأجد إذا امكن /**

١) ꟽ + ب **٢) ꟽ – ٢ب**

الحل /

✵ أتذكّر:

إذا كانت ꟽ ، ب مصفوفتين حيث:
ꟽ + ب = ب + ꟽ = و ،
فإن ب هي النظير الجمعيّ للمصفوفة
وتكون ب = -ꟽ

السؤال الرابع

إذا كانت رتبة ꟽ هي ٢ × ٣ ، وكان رتبة ب هي ٢ × ٣ ، فإنَّ رتبة ꟽ + ب هي ....

السؤال الخامس:

إذا كان رتبة س هي ١ × ٦ ، وكان رتبة ص هي ١ × ٦ ، فإنَّ رتبة ٢ص – ٣س هي ....

السؤال السادس:

أ) أجد ناتج : $2\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

الحل /

ب) إذا كان : $\begin{bmatrix} 16 & س \\ ص & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -7 & ع \end{bmatrix}$ ، **فأجد كل من : س ، ص ، ع ؟**

الحل /

ج) إذا كان : $\begin{bmatrix} 2 & س \\ س & ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ ص & م \end{bmatrix}$ ، **فأجد كل من : س ، ص ، م ؟**

الحل /

د) إذا كان : $\begin{bmatrix} -١ & ٨ \\ ٢ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & س \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ص \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ **، فأجد كل من : س ، ص ؟**

الحل /

....

....

....

هـ) إذا كان : $\begin{bmatrix} س & ٩ \\ ٩ & ٢ص \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١٤ & س + ١ \end{bmatrix}$ **، فأجد كل من : س ، ص ؟**

الحل /

....

....

....

....

و) إذا كان : $٢ \begin{bmatrix} -١ & ٩ \\ س & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} أ & ٧ \\ -٣ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١١ \\ ١٣ & ٧ \end{bmatrix}$ **، فأجد كل من : س ، أ ؟**

الحل /

....

....

....

ع) إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، **فأجد قيمة المقدار : ١٩ أ – ١٨ (أ + ب) + ١٧ ب**

....

....

....

....

....

❖ تعريف :

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، وكان ج عددًا حقيقيًا فإن ج×أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، حيث تكون كل مدخلة فيها مساوية للمدخلة المناظرة لها في المصفوفة مضروبة بالثابت ج أي أن:

ج ×(أ ى×هـ) = (ج × أ ى×هـ)

- **<u>خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي</u>**

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ك ∈ ح فإن :

١. أ + ب = ب + أ " **خاصية تبديلية** " .

٢. (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) " **خاصية تجميعية** " .

٣. أ + و = و + أ = أ و " **محايد جمعي** " .

مثال / $\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

٤. أ + (– أ) = (– أ) + أ = و – أ " **نظير جمعي** " .

مثال / أ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ أ + (– أ) = $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٥. ك (أ + ب) = ك أ + ك ب ، ك ∈ ح " **خاصية التوزيع** " .

مثال / ٤ (أ + ب) = ٤ أ + ٤ ب

السؤال الاول:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ، **فأجد : ١) النظير الجمعي للمصفوفة أ** **٢) أ + (−أ)**

السؤال الثاني: " ملاحظة / حل المعادلة المصفوفية هو إيجاد المصفوفة س "

١) حل المعادلة المصفوفية: ٢ س − $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ & -٢ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ **= ٢** $\begin{bmatrix} ٧ & -٣ & -١ \\ ٥ & ٤ & -٢ \end{bmatrix}$

الحل /

✵ أتذكّر:

حل المعادلة المصفوفية :

- **نفك الأقواس إذا وجدت.**
- **ننقل س على يمين علامة التساوي مع قلب الإشارة التي تسبقها.**
- **ننقل المصفوفات على يسار علامة التساوي مع قلب الإشارة التي تسبقها.**
- **نجري عملية التجميع للسينات وعملية التجميع للمصفوفات .**
- **نوجد قيمة المصفوفة س**

٢) حل المعادلة المصفوفية : - ٣ س + $\begin{bmatrix} ٣ & ١١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ **= ٢س +** $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & -١ \end{bmatrix}$

الحل /

٣) حل المعادلة المصفوفية التالية : ٢ (س − ٢ $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٥ & ٣ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$ **) = س +** $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$

الحل /

٤) حل المعادلة المصفوفية التالية : $٢ \left(٣ س + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} \right) = س + ٢ \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

الحل /

٥) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$ **، وكانت** $٢ أ + س = م_٢$ **، أجد المصفوفة س .**

الحل /

٦) أذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -٧ & ٢ \\ ١ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$ **،** $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٨ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$ **، أجد المصفوفة س بحيث** $٢س = أ - ٣ب$ (نظامي ٢٠١٩)

الحل /

٧) أذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix}$ **،** $ب = \begin{bmatrix} -٦ & ٠ \\ ٠ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$ **، أجد المصفوفة س بحيث** $أ - ٢س = ب$ (اكمال ٢٠١٩)

الحل /

٨) حل المعادلة المصفوفية التالية : $\frac{١}{٢}\left(٨\,س + ٣ \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix} \right) = ٢\,س + \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

٩) حل المعادلة المصفوفية التالية : $٣ \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٨ & ١ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} + ٢س = \begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ٤ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} + و_{٣\times٢}$

١٠) إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$ **، وكان ٥ ب + ٣جـ =** $\begin{bmatrix} ١٨ \\ ٢٢ \end{bmatrix}$ **، أجد المصفوفة جـ .**

ضرب المصفوفات

- **إذا كان أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة ن × هـ ، فإنَّ : أ × ب هي مصفوفة جـ من الرتبة م × هـ ،**

أي أن : $أ_{م\times ن} \times ب_{ن\times هـ} = جـ_{م\times هـ}$

- **لاحظ أن : يجب أن يتساوى عدد الأعمدة للمصفوفة الاولى أ مع عدد الصفوف للمصفوفة الثانية ب.(شرط ضرب مصفوفتين)**

يتم ضرب صفوف أ بجميع أعمدة ب .

السؤال الاول:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أ × ب = جـ ، وكانت رتبة ب = ٢×٣، ورتبة جـ = ٣×٣، أوجد رتبة أ

❖ تعريف : (ضرب المصفوفات)

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن×هـ ، فإن : $أ_{م\times ن} \,.\, ب_{ن\times هـ} = جـ_{م\times هـ}$

حيث: $جـ_{م\times هـ} = أ_{ي١}\,.\,ب_{١هـ} + أ_{ي٢}\,.\,ب_{٢هـ} + ... + أ_{ي ن}\,.\,ب_{ن هـ}$

السؤال الثاني:

أوجد ناتج الضرب :

$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{bmatrix}$.

الحل /

$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١\times٥ + ٢\times٧ & ١\times٦ + ٢\times٨ \\ ٣\times٥ + ٤\times٧ & ٣\times٦ + ٤\times٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ + ١٤ & ٦ + ١٦ \\ ١٥ + ٢٨ & ١٨ + ٣٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ & ٢٢ \\ ٤٣ & ٥٠ \end{bmatrix}$

السؤال الثالث :

إذا كانت : $أ = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

فأجد : ١) أ . ج ٢) ب . ج ٣) $أ^{2}$ أن أمكن .

الحل /

....

....

....

....

....

....

....

❖ تعريف :

قواعد العمليات على الأعداد الصحيحة:

١. حاصل ضرب عددين صحيحين موجبين عدد صحيح موجب
٢. حاصل ضرب عددين صحيحين أحدهما موجب والاخر سالب هو عدد صحيح سالب
٣. حاصل ضرب عددين صحيحين سالبين عدد صحيح موجب
٤. حاصل ضرب عددين صحيحين أحدهما او كلاهما صفر هو الصفر

- ١٢ × (- ٥) = -٦٠
- (-١٢) × ٥ = - ٦٠
- (-١٢) × (- ٥) = ٦٠
- ١٢ × ٥ = ٦٠
- ١٢ ÷ (- ٣) = -٤
- (-١٢) ÷ ٣ = - ٤
- (-١٢) ÷(- ٣) = ٤
- ١٢ ÷ ٣ = ٤

السؤال الرابع:

أجد ناتج الضرب :

١) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

٣) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

....

....

....

....

....

٥) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. ٦) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

٦) إذا كانت : $ أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ & -٢ \\ ٠ & -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٠ & -١ \end{bmatrix}$

، فأجد : ١) أ . ٢ب   ٢) ٢(ب . ج)

الحل /

....

❖ تعريف :

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين ،وكان عدد الأعمدة في أ يساوي عدد الصفوف في ب ، فإن المصفوفة أ . ب معرفة ، والناتج مصفوفة ج من الرتبة (عدد صفوف أ في عدد أعمدة ب) ،

أي أن : أ $_{م×ن}$. ب $_{ن×هـ}$ = ج $_{م×هـ}$

....

تمارين ومسائل :

١) إذا كانت أ ، ب ، ج مصفوفات بحيث أ × ب = ج ، وكانت رتبة ب = ٣×٢، ورتبة ج =٢×٢ ، فأجد رتبة أ .

....

٢) إذا كانت أ ، ب ، ج مصفوفات بحيث أ × ب = ج ، وكانت رتبة أ = ٢×٣، ورتبة ج =٢×٣ ، فأجد رتبة ب .

....

٣) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢×٣ ، ورتبة ب = ٣×٥ بحيث ج = أ × ب ، فأجد رتبة ج .

....

٤) إذا كانت أ ، ب ، ج مصفوفات بحيث أ × ب = ج ، بحيث أ $_{٣×٢}$، ب $_{م×ن}$ ، ج $_{٢×٤}$ ، فإن قيم م ، ن على الترتيب :

أ) ٢، ٣   ب) ٢، ٤   ج) ٤، ٣   د) ٣، ٤   (إكمال ٢٠٢٠)

٥) إذا كانت أ $_{٣×٢}$ ، ب $_{٢×٣}$ ، ج $_{٢×٢}$ ، أي العمليات الآتية يمكن اجرائها :

أ) أ × ب + ج ....   ب) ب × أ + ج ....

ج) أ × ج + ب ....   د) ب × ج + أ ....

❈ تمارين ومسائل :

١) إذا كان $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \\ ١ & س \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١٢ & ١١ \\ -٢ & ١١ & ٨ \\ ٣ & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$ **، فأجد قيمة كل من س ، ص .**

....

٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} 4 & \text{ا} & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ -6 & \text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ **، فأجد قيمة كل من ا ، ب .**

....

....

....

٣) إذا كانت $\begin{bmatrix} 2 & \text{س} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\text{س} \end{bmatrix}$ **، فما قيمة / قيم س ؟**

....

....

....

٤) إذا كانت $\text{ا} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ **،** $\text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & \text{صفر} & 2 \end{bmatrix}$ **، وكان** $\text{جـ} = \text{ا} \times \text{ب}$

فأجد قيمة كلا مما يأتي : قيمة جـ_{21} **،** جـ_{32} **.**

....

....

....

خصائص ضرب المصفوفات

- **إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث عمليتي الضرب والجمع في الآتي معرفة ، ك ∈ ح :**

١.	أ ب ≠ ب أ	" غير تبديلية"
٢.	أ (ب + جـ) = أ ب + أ جـ	" التوزيع من اليمين "
٣.	(أ + ب) جـ = أ جـ + ب جـ	" التوزيع من اليسار"
٤.	(أ ب) جـ = أ (ب جـ)	" خاصية التجميع "
٥.	أ م = م أ = أ	" م المصفوفة المحايدة"
٦.	ك (أ ب) = (ك أ) ب = أ (ك ب)	" ك عدد حقيقي"

- **أسئلة امتحانات سابقة على خصائص ضرب المصفوفات :**

١) إذا كان س × $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ س = ...

٢) المصفوفة المحايدة في عملية ضرب المصفوفات الثنائية ....

٣) إذا كانت س ، ص مصفوفتان من الرتبة ٢×٢ ، حيث س ص = ص س = س ، فإنَّ ص = ...

٤) إذا كانت : ؃ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ أجد/ ؃ . ب ماذا تلاحظ ؟ ....

٥) إذا كانت : $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ × س = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ س = ...

- ملاحظة / إذا كانت ؃ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث ؃ ب = ؃ جـ ، فإنَّ ب ≠ جـ وهذا يعني أنه لا يمكن اختزال (حذف) ؃ من الطرفين .

المحددات

❋ محدد مصفوفة من الرتبة الثانية :

- تعريف / إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ؃ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ ، فإنَّ محدد المصفوفة س و يرمز له بالرمز |س|

| س | = (؃ × د) – (ب × جـ)

السؤال الأول :

أجب عن المطلوب :

؃ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

| أ | ....

|ب|

| – ؃ | ماذا نلاحظ ؟.

....

|٢ ؃|

....

| – ٣ ؃ |

....

السؤال الثاني :

إذا كانت ؃ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فأجد : | ؃ – ب |

....

❖ أتذكّر :

- تُسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر بالمصفوفة المنفردة. وهي المصفوفة التي ليس لها نظير ضربي .
- المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

ويرمز لها بالرمز م٢ ، ويطلق عليها أيضًا اسم مصفوفة الوحدة وهي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية،

مثلًا :

$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ × $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

- المصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ويرمز لها بالرمز و٢ ، ويطلق عليها أيضًا اسم المصفوفة الصفرية.وهي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات من الرتبة الثانية،

مثلًا :

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

السؤال الثالث :

١) إذا كانت ٨ = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، **ب =** $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، **أجد :** | ٨ × ب |

....

....

....

٢) إذا كانت ٨ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢س \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، **ب =** $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، **أجد قيمة س التي تجعل** | ٨ – ب | **= ١١**

....

....

....

٣) إذا كانت ٨ ، ب مصفوفتان ثنائيتان ، فإنَّ إحدى العبارات التالية صحيحة :

أ) | ٨ + ب | = | ٨ | **+** | ب | **ب)** | ٨ – ب | = | ٨ | **-** | ب | **جـ)** | ٨ب | = | ٨ | **×** | ب |

٤) إذا كان $\begin{vmatrix} ٤ & س \\ س - ١ & ٣ \end{vmatrix}$ **= - ١٠ ، فما قيمة / قيم س ؟**

....

....

....

....

٥) ما قيمة / قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ٠ & س \\ ٢س - ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ **= صفر ؟**

....

....

....

....

٦) ما قيمة / قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} -٤ & ٣ \\ س & ٢ \end{vmatrix}$ **=** $\begin{vmatrix} -٤ & -١ \\ س^٢ & ٣ \end{vmatrix}$ **؟**

....

....

....

....

٧) إذا كان | ٨ | = ٣ س + ١، وكانت ب = $\begin{bmatrix} ١ & س \\ س & ٣ \end{bmatrix}$ **، وكان | ب | = | ٨ | ، فأجد قيمة / قيم س ؟**

....

....

....

....

السؤال الرابع :

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكان | أ | = ٤ ، أجد ما يلي :

١) |أ| + |–أ| ٢) |أ × م| ٣) |٢ أ| ٤) |– $\frac{1}{2}$ أ| .

السؤال الخامس :

إذا كانت س مصفوفة ثنائية وكان | س | = ١٨، فأجد ما يلي :

١) |٢ س|

٢) |– س| **ماذا تلاحظ ؟**

٣) |$\frac{1}{3}$ س|

٤) |– $\frac{1}{2}$ س|

السؤال السادس:

إذا كانت س مصفوفة ثنائية وكان | ٢ س | = ٣٦ ، فأجد : | ٣ س | .

السؤال السابع :

إذا كانت ص مصفوفة من الرتبة الثانية وكان | – ٢ص| = ٢٤ ، فأجد ما يلي :

١) |ص| ٢) |– ص| ماذا تلاحظ ؟

السؤال الثامن : إذا كانت | أ ب | = ٢٧ ، | ب | = ٣ ، فأجد ما يلي :

|أ| |– أ| |٣ أ| |– $\frac{1}{3}$ أ|

النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

❖ **تعريف / إذا كانت : س** $= \begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ النظير الضربي المصفوفة س ، و يرمز له بالرمز $س^{-١}$

$$س^{-١} = \frac{١}{|س|} \times \begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix}$$ ، بحيث $|س| \neq$ صفر

أي أن شرط وجود نظير ضربي للمصفوفة س هو أن : $|س| \neq$ صفر

خطوات إيجاد النظير الضربي :

١. نجد $|س|$ يجب أن يكون : $|س| \neq$ صفر
٢. نبدل عنصري القطر الرئيسي
٣. نغير اشارتي عنصري القطر غير الرئيسي
٤. نضرب المصفوفة الجديدة في $\frac{١}{|س|}$

❖ **ملاحظة /**

- إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية فإن : $أ . أ^{-١} = أ^{-١} . أ = م_٢ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$
- إذا كانت أ ، ب مصفوفتان من الرتبة الثانية بحيث أ × ب = ب × أ = $م_٢$ ،فإن ب هي نظير ضربي للمصفوفة أ

السؤال الأول :

١) إحدى المصفوفات التالية ليس لها نظير ضربي :

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$

....

٢). إحدى المصفوفات التالية منفردة :

أ) $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

....

❋ **أتذكّر :**

(النظير الضربي) :
إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيرًا ضربيًا للمصفوفة إذا كان
أ . ب = ب .أ = $م_٢$ ، حيث $م_٢$ المصفوفة المحايدة ويرمز للنظير الضربيّ للمصفوفة أ بالرمز $أ^{-١}$ أي أن:
$أ . أ^{-١} = أ^{-١} . أ = م_٢$

السؤال الثاني :

١) إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٦ & ٠ \\ ٠ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

، فأجد ١) ٢ أ – جـ ٢) ب $جـ^{-١}$

....

❖ **أتذكّر :**

(مصفوفة الوحدة)
$م_٢ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$
هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية.
، ويرمز لها بالرمز $م_٢$ ، ويطلق عليها أيضًا اسم مصفوفة الوحدة.

٢) إذا كان $ا = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، **ب** = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، **فأجد :**

١) $(ا \cdot ب)^{-١}$

....

....

....

٢) $ب^{-١} \cdot ا^{-١}$

....

....

....

....

....

❖ **أتذكّر :**

(النظير الضربي):

إذا كان $ا = \begin{bmatrix} ا_{٢١} & ا_{١١} \\ ا_{٢٢} & ا_{١٢} \end{bmatrix}$

حيث ا ≠ صفر ، فإن:

$ا^{-١} = \frac{١}{|ا|} \times \begin{bmatrix} -ا_{٢١} & ا_{٢٢} \\ ا_{١١} & -ا_{١٢} \end{bmatrix}$

أسئلة إضافية :

السؤال الأول :

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، **ص =** $\begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$

فأجد : ١) $(س \times ص)^{-١}$ **١)** $ص \times س^{-١}$ **٣)** $(\frac{١}{٢} س)^{-١}$

....

....

....

....

....

....

السؤال الثاني :

إذا كانت س مصفوفة ثنائية لها نظير ضربي ، فإنَّ : $(س^{-١})^{-١}$ = ...

السؤال الثالث :

إذا كانت: $\begin{vmatrix} -٢ & س \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} س & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = -١٠$ ، **فأجد قيمة س ؟**

....

....

....

....

السؤال الرابع :

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أ$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} \text{ص} & ٢ \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمتي س ، ص ؟

....

....

....

....

السؤال الخامس:

إذا كانت ($\frac{١}{٢}$ ب)$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة ب ؟

....

....

....

....

السؤال السادس:

١) إذا كانت : أ مصفوفة ثنائية ، فإنَّ | أ أ$^{-١}$ | = ...

• **تعريف / المصفوفة المنفردة / هي مصفوفة مربعة محددها = صفر ، وليس لها نظير ضربي .** **المصفوفة غير المنفردة / هي مصفوفة مربعة محددها ≠ صفر ، و لها نظير ضربي .**

٢) المصفوفة المنفردة بين المصفوفات الأتية :

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ **ب)** $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٦ \end{bmatrix}$ **ج)** $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ **د)** $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٦ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل /

....

٣) أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، فإنَّ إحدى العبارات الأتية صحيحة دائماً :

أ) للمصفوفة أ نظير ضربي ب) يمكن ايجاد المصفوفة أ × أ ج) يمكن تنفيذ العملية ٤+أ د) للمصفوفة أ نظير جمعي

....

٤) قيمة ص التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{ص} & ٦ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ **منفردة هي ....**

....

٥) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{س} & ٤ \\ ٩ & \text{س} \end{bmatrix}$ **ليس لها نظير ضربي ، فإنَّ قيمة س هي :**

....

٦) إذا كانت المصفوفة س = $\begin{bmatrix} \text{س} & ١ \\ ٠ & \text{س} - ١ \end{bmatrix}$ **، فأجد قيمة س التي تجعل المصفوفة منفردة .**

....

....

السؤال السابع :

١) حل المعادلة المصفوفية الآتية : $س \cdot \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

....

٢) حل المعادلة المصفوفية الآتية : $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot 2س = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

....

٣) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ **، فأجد :**

المصفوفة ب ، حيث أ × ب = ج .

....

٤) إذا كانت أ ب = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $أ = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **، فأجد المصفوفة ب .**

....

٥) إذا كانت $ب^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ **، وكان : ب × أ –** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **= و**

، فأجد المصفوفة أ .

....

✵ أتذكّر :

- **مثال ١ :**

حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$س + \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل / ننقل المصفوفة المجاورة لـ س الى يسار التساوي مع قلب الإشارة التي تسبقها .

إذا كان س + أ = ب

فإنَّ س = ب – أ

$$س = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

س = ...

- **مثال ٢ :**

حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$س \times \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل /

ننقل النظير الضربي للمصفوفة المجاورة لـ س الى يسار التساوي مع مراعاة :

إذا كان س × أ = ب

فإنَّ س = ب × أ $^{-1}$

$$س = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{|أ|} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

س = ...

- **مثال ٣ :**

حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل /

ننقل النظير الضربي للمصفوفة المجاورة لـ س الى يسار التساوي مع مراعاة :

إذا كان أ × س = ب

فإنَّ س = أ $^{-1}$ **× ب**

$$س = \frac{1}{|أ|} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

س = ...

٦) حل المعادلة المصفوفية الآتية : إذا كانت ٥ س − أ = أ^{٢} ، حيث أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$

✵ أتذكّر:

- المصفوفة الصفرية و$_{٢}$:

هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات:

و = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

أ + و = و + أ = أ

أ + -أ = -أ + أ = و$_{٢}$

- مصفوفة الوحدة م$_{٢}$:

هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية و يرمز لها بالرمز م$_{٢}$.

م$_{٢}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

أ . م$_{٢}$ = م$_{٢}$. أ = أ

أ . أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$. أ = م$_{٢}$

- المصفوفة المنفردة :

محددها يساوي صفر – ليس لها نظير ضربي .

- إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، ك عدد حقيقي ، فإن .

|ك أ| = ك^{٢} |أ|

مثلاً |٢ أ| = ٤|أ|

|− أ| = |أ|

٧) إذا كانت ٣ $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ + س^{٢} = $\begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$ ، **فأجد قيمة س .**

٨) إذا كان $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ − ٣ م$_{٢}$ = ص . $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، **فأجد المصفوفة ص.**

٩) إذا كان $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٤ \\ ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ ، **فأجد قيمة س ، ص .**

١٠) إذا كانت س = $\begin{bmatrix} أ - ٢ & ١ \\ -٥ & أ + ٤ \end{bmatrix}$ ، و كان |س| = ٥ ، **فأجد قيمة / قيم أ .**

حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات : أولاً / طريقة النظير الضربي :

١) حل النظام التالي باستخدام طريقة النظير الضربي : ٢س + ص = ١ ، س + ٧ = ٢ ص (نظامي ٢٠٢٠)

❖ **أتذكّر :**

طريقة النظير الضربي :

استخدم طريقة النظير الضربي لحل نظام المعادلات الآتي:

٣س + ٤ص = ٦

س + ٢ص = ٠

الحل: أولاً: نُرتب المعادلات على الصورة

م × ع = جـ ، حيث:

م : مصفوفة المعاملات.

ع: مصفوفة المتغيرات.

ج: مصفوفة الثوابت.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

نكمل الحل بطريقة النظير الضربي..

وذلك بضرب الطرفين في $م^{-١}$

✵ **لاحظ :**

المعادلة :

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

تُحل بنفس الطريقة التي تُحل بها المعادلة :

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

بضرب الطرفين في النظير الضربي للمصفوفة المجاورة لـ س .

٢) حل النظام التالي باستخدام طريقة النظير الضربي : س + ص – ١ = صفر ، ٢ ص + ٣ س = صفر

٣) حل النظام التالي باستخدام طريقة النظير الضربي : س = ص + ١ ، ٢ س + ص = ٢

ثانياً / طريقة كريمر :

١) حل نظام المعادلات الاتي باستخدام طريقة كريمر : ٥ س + ٣ ص = ٧ ، ٢ ص – س = –٤

....

✻ أتذكّر :

قاعدة كريمر:
تستخدم قاعدة كريمر لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، والذي يمكن كتابته بالصورة المصفوفية كالآتي: أ .ع = جـ ،
|أ| ≠ صفر
حيث:
أ : مصفوفة المعاملات ،
ع : مصفوفة المتغيرات ،
جـ : مصفوفة الثوابت،

فيكون:

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} \quad ، \quad ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$$

....

٢) حل النظام التالي س – ص = ٧ ، ٢س + ص = ٢ باستخدام طريقة كريمر.

....

٣) استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي : ٥س + ص – ٨ = ٠ ، ص = ٢ س + ١ (اكمال ٢٠١٩)

....

٤) استخدم طريقة كريمر لحل النظام : ٢س – ١ – ص = ٠ ، –٢ص + س = –٤ (نظامي ٢٠١٩)

....

أسئلة عامة على المصفوفات من امتحانات سابقة

١) **حل المعادلة المصفوفية التالية :** ٢ س − $\begin{bmatrix}-2&1\\-3&-3\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

٢) **حل المعادلة المصفوفية التالية :** ٥ س + ٣ $\begin{bmatrix}-5&4\\0&-2\end{bmatrix}$ = ٣ س + $\begin{bmatrix}2&4\\1&0\end{bmatrix}$

٣) **حل المعادلة المصفوفية الآتية :** $\begin{bmatrix}3&-3\\5&4\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}6&3\\-4&1\end{bmatrix}$ + س

٤) **حل المعادلة المصفوفية التالية :** -٣س + $\begin{bmatrix}1&-1\\5&4\end{bmatrix}$ = ٢ س + $\begin{bmatrix}-4&-1\\0&-4\end{bmatrix}$

٥) **حل المعادلة المصفوفية التالية :** ٢(س + ٣ $\begin{bmatrix}-3&2\\2&1\end{bmatrix}$) = س - ٣ $\begin{bmatrix}-2&1\\5&0\end{bmatrix}$ (نظامي ٢٠٢٠)

٦) **حل المعادلة المصفوفية الآتية :** س - ٣ $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$ = ٢ $\begin{bmatrix}-3&3\\0&6\\0&12\end{bmatrix}$ (إكمال ٢٠٢٠)

٧) **أوجد المصفوفة س :** - ٣ $\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&2\end{bmatrix}$ = - ٢س + $\begin{bmatrix}-2&2&1\\7&3&2\end{bmatrix}$

٨)
١– **حل المعادلة المصفوفية :** ٢ (س + $\begin{bmatrix}2&5\end{bmatrix}$) = ٣ س + $\begin{bmatrix}2&4\end{bmatrix}$

٢ - **حل المعادلة المصفوفية التالية :** ٢ (٣ س + $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$) = $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ - س

٩) **إذا كانت** ﻡ = $\begin{bmatrix}3&4\\2&-6\end{bmatrix}$ ، وكانت ٢ﻡ + س = $ﻡ^{2}$ ، **فأجد المصفوفة س**

١٠) **إذا كانت** ﻡ = $\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}0&5\\2&1\end{bmatrix}$ ، **فأجد قيمة :** ١٥ﻡ +١٥ ب – ١٤ (ﻡ + ب) .

١١) **إذا كانت** ﻡ = $\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}0&4\\1&3\end{bmatrix}$ ، فأجد ١) ب × ﻡ ٢) | ﻡ + ٢ب |

١٢) **إذا كانت** ﻡ = $\begin{bmatrix}4&-3\\5&-4\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}-6&1\\4&-1\end{bmatrix}$ ، **فأجد :** ١) ٣أ - ب ٢) $ب^{-1}$

١٣)
١ - **إذا كانت** ﻡ = $\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\\1&2\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}2&-1\\0&1\end{bmatrix}$ ، **فأجد المصفوفة** ﻡ ب .

٢-**إذا كانت** ﻡ = $\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&2\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}2&3\\3&-1\\-5&1\end{bmatrix}$ ، **فأجد** ﻡ × ب **ان أمكن** .

١٤) **إذا كانت** ﻡ = $\begin{bmatrix}4&-1\\5&-2\end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix}7&5&-3\\3&4&-1\end{bmatrix}$ ، **فأجد** ﻡ × جـ .

(١٥

١ - إذا علمت ان أ = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأجد | أ × ب | . (نظامي ٢٠٢٠)

٢ - إذا كان أ = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ، فأجد (أ × ب)$^{-1}$

(١٦

١ - إذا كان أ = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأجد حاصل ضرب ٢أ × ب أن أمكن .

٢ - إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ ، فأجد أ - ٢ ب .

(١٧ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ، فأجد ب أ$^{-1}$

(١٨ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & \text{صفر} & 1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ \text{صفر} & 1 \\ -1 & \text{صفر} \end{bmatrix}$ ، وكانت جـ =٢أ × ب

أجد كلا مما يأتي : ١) رتبة المصفوفة جـ ٢) قيمة جـ$_{12}$

(١٩ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} \\ -2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 8 \\ 8\,\text{ص} \end{bmatrix}$ ، ٤أ = ٣ب ، فأجد قيمة كل من س ، ص .

(٢٠ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} \\ -6 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، ٣أ = ٢ب ، فأجد قيمة كل من س ، ص .

(٢١ إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة ب بحيث ٣أ + ٢ب = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(٢٢ إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{أ} & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ \text{ب} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كل من أ ، ب .

(٢٣ إذا كانت أ$^{-1}$ = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، وكان أ × ب = $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ، أ × جـ = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة ب + جـ .

(٢٤

١ - إذا كان $\begin{vmatrix} \text{س} & 1 \\ 2 & \text{س} - 1 \end{vmatrix}$ = صفر ، فأجد قيمة / قيم س ؟

٢ - جد قيم س التي المصفوفة أ منفردة ، حيث أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & 9 \\ 4 & \text{س} \end{bmatrix}$

٣- ما قيمة / قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} \text{س} & 0 \\ 5 & 2\text{س} - 3 \end{vmatrix}$ = ٢٠ ؟

(٢٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 4 & \text{س} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, وكانت | – ٢ أ | = ١٢ ، فأجد قيمة س ؟

٢٦) **إذا كانت أ ، ب مصفوفتان من الرتبة ٢×٢ وكان** $|أ| + |ب| = ٧$ ، $|أ| - ٢|ب| = ٤$ ، **أجد** $|أ|$ ، $|ب|$

٢٧) **إذا كانت** $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & س \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، **وكانت** $أ = \begin{bmatrix} -١ & ٣ \\ س & -٥ \end{bmatrix}$ ، **فأجد قيمة س** .

٢٨) ما قيمة **/** قيم س التي **تجعل** $\begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ س-١ & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix}$ ؟

٢٩) **إذا كانت** $س^{-١} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ **وكانت** $س\,ع^{-١} = ص$ ، **فأجد المصفوفة ع** .

٣٠) **إذا كانت** $س\,ع^{-١} = ص$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، **فأجد** $س^{-١}$.

٣١) **إذا كانت** $س^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، **فأجد** المصفوفة ص بحيث أن : $س\,ص - ٢\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$.

٣٢) **إذا كانت** $س^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ص\,س - \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = م_{٢\times٢}$ ، **فأجد** المصفوفة ص (إكمال٢٠٢٠)

٣٣) **حل المعادلة المصفوفية الآتية :** $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} \times ٢س = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

٣٤) **حل المعادلة المصفوفية الآتية :** $س \times \begin{bmatrix} ٣ & صفر \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ١٠ \\ صفر & ٣٠ \end{bmatrix}$

٣٥) ما قيمة **/** قيم س التي **تجعل** : $٣\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} + س^{٢} = \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ س & ٦ \end{vmatrix}$ ؟

٣٦) **إذا كانت** $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان $ب \times أ - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = و$ ، فأجد المصفوفة أ .

٣٧) **إذا كانت** $أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٩ \\ -٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٦ \end{bmatrix}$ ، $س = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، **اثبت أن:** $\frac{١}{٣}أ - ب = ٢س$ (نظامى ٢٠٢٠)

٣٨) **إذا كانت** $أ \times ب = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ، $أ \times جـ = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، **اثبت أن :** $ب + جـ = أ^{-١}$ (نظامى ٢٠٢٠)

٣٩) **إذا كانت** $س = \begin{bmatrix} -٧ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ **بين أن:** $س \times ص = ٢ع^{-١}$

٤٠) **إذا كانت** $\begin{bmatrix} ٢ & س \\ س & ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ص & م \end{bmatrix}$ ، **فأجد قيم س ، ص ، م التي تجعل المصفوفة صحيحة ؟**

٤١) **إذا كانت** $\begin{bmatrix} ١٦ & س \\ ص & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ -١٠ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٣ \\ -٧ & ع \end{bmatrix}$ ، **فأجد كل من :** س ، ص ، ع ؟

٤٢) **إذا كانت** $\begin{bmatrix} س & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ - ٢س \end{bmatrix}$ ، **فما قيمة / قيم س ؟**

٤٣)	**كانت م = $\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فأجد $(٢م)^{-١}$**	**إذا كانت م = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فأجد ٣ $م^{-١}$**
٤٤)	**اكانت م = $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فأجد $(م)^{-١}$**	**إذا كانت م = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فأجد $\frac{١}{٢}$ $م^{-١}$**
٤٥)	**استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي** : ٢ س - ص = ١ ، ٢ ص - ٣ س = صفر	
٤٦)	**باستخدام قاعدة كريمر، حل نظام المعادلات الآتي** : ٤س - ص = ٥ ، - ٤س + ٣ص = ١	
٤٧)	**استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي** : ٢ س – ٣ ص = ٣ ، ٣س + ص = ١٠	
٤٨)	**استخدم قاعدة كريمر لإيجاد حل للنظام** : ٢ س - ص = ٠ ، س + ٣ ص = ٧	
٤٩)	**استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي** : س + ص = ٤ ، س - ص = ٢	
٥٠)	**استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي** : ٢ س + ٥ ص = ١ ، س = ٢ص + ٥	
٥١)	**حل نظام المعادلات الاتي باستخدام طريقة كريمر** : ٢س + ٣ ص = -١ ، ٤ ص + س = ٢	
٥٢)	**استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي** : س + ص = ٣ ، ٢ س - ص = ٦	
٥٣)	**حل نظام المعادلات الاتي باستخدام طريقة كريمر** : ٥ س + ٣ ص = ٧ ، ٢ ص – س = -٤	
٥٤)	**حل نظام المعادلات الاتي باستخدام طريقة كريمر**: ٣ س = ٢ص + ٥ ، ٢ س – ص = ٤	
٥٥)	**استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي** : **٢ ص = ٤ – س ، ٣ س + ص = –٣**	
٥٦)	**حل نظام المعادلات الاتي باستخدام طريقة كريمر** : ٢س - ٣ص = ١٣ ، ص + ٦ = س	
٥٧)	**حل نظام المعادلات الاتي باستخدام طريقة كريمر** : ٣ س = ٢ص + ٥ ، ٢ س – ص = ٤	
٥٨)	**إذا كانت م = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ١١ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات، وكانت ب = $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت (الحدود المطلقة)** **١) أكتب هاتين المعادلتين الخطيتين . ٢) استخدم طريقة كريمر لحلهما .**	
٥٩)	إذا كانت $م_{س}$ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٩ & ١١ \end{bmatrix}$ ، $م_{ص}$ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$ **، استخدم طريقة كريمر في ايجاد قيم س ، ص**	
٦٠)	**حل النظام التالي** : س = ص + ٧ ، **٢** س + ص = **٢ باستخدام طريقة النظير الضربي** .	
٦١)	**استخدم طريقة النظير الضربي لحل النظام** : س **–** **٣**ص = **١** ، **٢**س = **٩** – ص	
٦٢)	**حل نظام المعادلات الاتي باستخدام طريقة النظير الضربي**: ص+ س–٤ = ٥ + ٣ س ، س – ٥ =٢ ص–٤ س	
٦٣)	**استخدم المصفوفات في حل نظام المعادلات التالي** : $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$	

الوحدة الثانية / المصفوفـــات (اختيار من متعدد)

١. المصفوفة المربعة من بين المصفوفات الآتية ....

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$

٢. إذا كانت م = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة المدخلة م$_{٢١}$ =

أ) ٢ ب) ١ جـ) ٣ د) ٥

٣. إذا كانت المصفوفة س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ رتبة س = ...

أ) ٢ × ٣ ب) ٣ × ٢ جـ) ٦ د) $\frac{٢}{٣}$

٤. إذا كانت س مصفوفة من الرتبة ٣×٤ ، فإنَّ عدد مدخلات المصفوفة س = ...

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٧ د) ١٢

٥. إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ -٢ & ٢ & -٥ \\ ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة ٣س$_{٣٢}$ × س$_{١٣}$ = ...

أ) ١٢ ب) -١٠ جـ) -٦ د) -١٥

(نظامى ٢٠٢٠)

❖ لاحظ :

س = $\begin{bmatrix} س_{٣١} & س_{٢١} & س_{١١} \\ س_{٣٢} & س_{٢٢} & س_{١٢} \\ س_{٣٣} & س_{٢٣} & س_{١٣} \end{bmatrix}$

٦. إذا كانت م = $\begin{bmatrix} ٥ & -١ & ٠ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ المدخلة م$_{٣٢}$ - ٢م$_{٢١}$ = ...

أ) ٧ ب) ٦ جـ) ٢ د) ١

(نظامي ٢٠١٩)

❖ لاحظ :

(ضرب المصفوفات)

إذا كانت م مصفوفة من الرتبة م×ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن×هـ، فإن

م$_{م×ن}$ × ب$_{ن×هـ}$ = جـ$_{م×هـ}$

٧. إذا كانت س= $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ص= $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة س$_{٢٢}$ -٣ص$_{٢١}$

أ) -٢ ب) -١ جـ) -١١ د) -١٠

٨. إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة $\frac{١}{٢}$ س$_{١٢}$ = ...

أ) ٦ ب) ١ جـ) -٢ د) -١

٩. إذا كانت م ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات بحيث ب$_{٤×٣}$ ، جـ$_{٢×٣}$ ، وكان $\frac{١}{٣}$ م × ٥ ب = جـ ، فما رتبة المصفوفة م ......

أ) ٣ × ٢ ب) ٢ × ٤ جـ) ٣ × ٣ د) ٢ × ٣

١٠. إذا كانت م ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات بحيث م ×٢ب = جـ ، وكانت رتبة م $_{٢×٣}$ ، ورتبة جـ $_{٢×١}$ ، فإنَّ رتبة ب ....

أ) ٣ × ٢ ب) ٤ × ٢ جـ) ٣ × ١ د) ٢ × ١

١١. إذا كانت م$_{٢×٣}$ ، ب$_{٢×٢}$ ، جـ$_{٢×٣}$ ثلاث مصفوفات ، فما رتبة المصفوفة ب × جـ - م = ...

أ) ٣ × ٢ ب) ٢ × ٢ جـ) ٣ × ٣ د) ٢ × ٣

١٢. إذا كانت م مصفوفة من الرتبة $_{٢×٣}$ ، وكانت رتبة ب = $_{م×٥}$ ، فإنَّ قيمة م التي تجعل = م × ب ممكنة ، هي :

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٥ د) ٦

١٣. إذا كانت م ، ب ، جـ مصفوفات بحيث : م$_{ن×٣}$ × ب$_{ي×١}$ = جـ$_{٢×١}$ ، فإنَّ ن + ي = ...

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٥

١٤. إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ، وكان أ × $ب_{م×ن}$ = $ج_{٢×٥}$ ، فإنَّ م + ن = ...

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٧ د) ٨

١٥. إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت |٣أ| = ٩، فإنَّ ٢ |أ| = ...

أ) ٠,٥ ب) ٢ ج) ٦ د) ٩

١٦. إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فإنَّ إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً : ....

أ) |٤أ| = ٤|أ| ب) |١٦ أ| = ٤|أ| ج) |-أ| = |أ| د) |$\frac{١}{٤}$ أ| = $\frac{١}{٢}$ |أ|

١٧. إذا كانت المصفوفة ج = ٣أ +٢ب ، وكانت المدخلة $ج_{٣٢}$ =٤، والمدخلة $أ_{٣٢}$ = −٢ ، فإنَّ قيمة المدخلة $ب_{٣٢}$.......

أ) ١٠ ب) ٦ ج) ٥ د) −١

١٨. إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت |٢أ| = ٨ ، فإنَّ |$\frac{١}{٢}$ أ| = (اكمال ٢٠١٩)

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ١ ج) ٤ د) ٢

١٩. إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ |٢ ص| = ...

أ) ٢ ب) - ٢ ج) -٤ د) ٤

٢٠. إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان |م س| = -٤ ، فإنَّ قيمة الثابت م ....

أ) ٢ ب) - ٢ ج) ١ د) ±٢

٢١. إذا كانت س مصفوفة من الرتبة الثانية بحيث |- س| = -١٢ ، فإنَّ |$\frac{١}{٢}$ س| = ... (نظامي ٢٠١٩)

أ) ٦ ب) - ٣ ج) -٦ د) ٣

٢٢. إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية بحيث |٢أ|=٢٤ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ |أ| + |٣ ب| = ...

أ) - ١٨ ب) ٦ ج) ٢٤ د) - ١٢

٢٣. إذا كانت أ ، ب مصفوفتان ثنائيتان بحيث |أ| - |ب| = ٧ ، |-٢ ب| = -٤ ، فإنَّ |أ| = ...

أ) ٨ ب) ٦ ج) - ٨ د) - ٦

٢٤. إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، وكان |-٣ ب| = ٢٧، فإنَّ قيمة/ قيم س ....

أ) ٣ ب) -٣ ج) ±٣ د) ±٩

٢٥. إذا كانت $\begin{bmatrix} س - ٥ & ٣ \\ ٣ & س + ص \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة ص = ...

أ) ١٢ ب) ٦ ج) -٦ د) -١٢

٢٦. إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س}^{٢} & \text{ص} + ٢ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ \text{س} + ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب = .. (نظامي ٢٠١٩)

أ) ١ ، ٢   ب) ٢ ، ١   ج) -٢ ، ١   د) -١ ، -٢

٢٧. إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س} + \text{ص} \\ \text{س} \end{bmatrix} = ٢ \begin{bmatrix} ٢ \\ -١ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة ص = ... (اكمال ٢٠٢٠)

أ) ٦   ب) صفر   ج) ٣   د) ٢

٢٨. إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢\text{س} \\ ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ \\ ٦\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمتي س ، ص على الترتيب هما .... (اكمال ٢٠١٩)

أ) -١ ، ١   ب) -١ ، -١   ج) ١ ، ١   د) ١، -١

٢٩. إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣ \\ \text{س} - ٢\text{ص} \\ ٢ + ٣\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمتي س ، ص على الترتيب هما ....

أ) ٥ ، -٢   ب) -٥ ، ٢   ج) ٢ ، ٥   د) ٥ ، ٢

٣٠. إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س} & ٦ \\ ١ + \text{ص} & \text{م} - ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ص} & ٦ \\ ٤ & \text{س} \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة م ....

أ) ٤   ب) ٥   ج) ٣   د) −٥

٣١. إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س} & ٣ \\ \text{ص} & \text{س} - \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ \text{م} + ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمتي ص ، م على الترتيب هما ....

أ) ٩ ، ٨   ب) ٢ ، ١   ج) ٩ ، ١٠   د) ٥ ، ٤

٣٢. إذا كانت $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢}\text{س} & -٢ \\ ٤ & \text{س} - ٢\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة ص = ...

أ) ٢   ب) - ٥   ج) - ٢   د) - ٤

٣٣. إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٢\text{س} & -٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ - ٥\text{س} \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة س ....

أ) ١   ب) -١   ج) ٢   د) -٢

٣٤. مجموعة قيم س التي تجعل : $\begin{bmatrix} ٢ & \text{س} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ \end{bmatrix}$ هي :.............................

أ) {٥،٤}   ب) {-٣،٣}   ج) { ٩ }   د) { ٦ }

٣٥. إذا كانت ٢أ = $\begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ ناتج أ × $\begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ....

أ) $\begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ \\ -٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٤ & -١٢ & ٠ \\ ٥ & -١٥ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -١٢ & -١٥ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٣٦. إذا كانت أ ، ب مصفوفتان ثنائيتان ، فإنَّ ٢ (أ × ب) = ...

أ) ٢أ ×٢ب   ب) ٢ (ب × أ)   ج) ٢أ × ب   د) ٢أ +٢ب

٣٧. إذا كانت و هي المصفوفة الصفرية من الرتبة الثانية م هي مصفوفة الوحدة من الرتبة الثانية،فإنَّ إحدى العبارات الأتية صحيحة:

أ) م + و = و   ب) و . م = و   ج) و . م = م   د) |و| = |م|

٣٨. **إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢×٣، ب من الرتبة ٣×٤، جـ من الرتبة ٤×٢، أي العمليات الآتية يمكن اجرائها** ....

أ) ب أ + جـ ب) أ جـ + ب جـ) جـ أ + ب د) أ ب + جـ

٣٩. **إذا كانت أ، ب، جـ ثلاث مصفوفات بحيث أ ٢×٣ ، ب ٣×٢ ، جـ ٢×٢ ، فإي العمليات الاتية معرفة** ....

أ) جـ × أ + ب ب) ب × أ + جـ جـ) ب × جـ + أ د) أ × ب + جـ (نظامي ٢٠٢٠)

٤٠. **أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، إحدى العبارات الأتية صحيحة دائماً** ....

أ) للمصفوفة أ نظير ضربي ب) للمصفوفة أ نظير جمعي جـ) يمكن تنفيذ العملية ٤+أ د) يمكن ايجاد المصفوفة أ×أ

٤١. **العبارة الصحيحة من العبارات الآتية :**

أ) عملية ضرب المصفوفات عملية تبديلية .

ب) إذا كانت أ.ب = ب.أ ، فإنَّ المصفوفة أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب .

جـ) إذا كانت أ.ب مصفوفتين غير صفريتين ، فإنَّ أ.ب مصفوفة غير صفرية أيضاً .

د) إذا كانت أ مصفوفة منفردة ، فإنَّ ٢أ مصفوفة منفردة أيضاً .

٤٢. **إذا كانت أ ، ب مصفوفتان ثنائيتان فإن إحدى العبارات التالية صحيحة :**

أ) نسمي المصفوفة التي محددها يساوي ١ بمصفوفة الوحدة ب) عملية ضرب المصفوفات تبديلية

جـ) إذا كانت أ+ب = ب+أ = و، فإنَّ ب = -أ د) إذا كان أ.ب = ب.أ ، فإنَّ أ هي نظير ب الضربي

٤٣. **إحدى العبارات الآتية صحيحة دائماً لأي مصفوفتين س ، ص هي** ....

أ) س + ص = ص + س ب) س - ص = ص - س

جـ) س × ص = ص × س د) س - ص = ص + - س

٤٤. **إذا كانت س ، ص مصفوفتان من الرتبة ٢×٢ ، حيث س ص = ص س = س ، فإنَّ ص =** ....

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

٤٥. **إذا كانت س × ص = ص × س = م ، فأي العبارات الآتية صحيحة دائما ؟** ....

أ) س = ص ب) س = - ص جـ) ص مصفوفة منفردة د) $س^{-١}$ = ص

٤٦. إذا كان س × $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ س = ...

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

٤٧. إذا كان س × $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ س = ... (نظامي ٢٠١٨)

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

٤٨. **مصفوفة الوحدة من بين المصفوفات الأتية :**..............................

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

٤٩. **المصفوفة المنفردة بين المصفوفات الأتية :**..............................

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -٦ \end{bmatrix}$

.٥٠ **المصفوفة التي لها نظير ضربي من بين المصفوفات التالية هي :**..............................

أ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$

.٥١ **المصفوفة المحايدة في عملية الجمع هي :**..............................

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -١ & -١ \end{bmatrix}$

.٥٢ **إحدى المصفوفات التالية هي المصفوفة المحايدة في عملية ضرب المصفوفات الثنائية :**..............................

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

.٥٣ **المصفوفة غير المنفردة بين المصفوفات التالية هي :**..............................

أ) $\begin{bmatrix} -٢ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & -٨ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

.٥٤ **إذا كانت** س = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، **فإنَّ قيمة** |س| + |ص| = ...

أ) −٦ ب) ٦ جـ) ٨ د) ١٠

.٥٥ **مجموعة قيم س التي تجعل المصفوفة** $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٤ & س - ٢ \end{bmatrix}$ **منفردة ، هي :**..............................

أ) {٤ ، −٢} ب) {٢ ، −٤} جـ) {−٢ ، −٤} د) {٤ ، ٢}

.٥٦ **إذا كان** $\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٣ & س - ١ \end{vmatrix}$ = **−١١ ، فإنَّ قيمة س =** .... (نظامي ٢٠٢٠)

أ) ٨ ب) ٣٠ جـ) ٢ د) ١

.٥٧ **قيمة س التي تجعل المصفوفة** $\begin{bmatrix} ٨ & -س \\ ٢س & -٤ \end{bmatrix}$ **مصفوفة منفردة ، هي**..............................

أ) ٤ ب) ٨ جـ) ١٦ د) ٣٢

.٥٨ **إذا كان** $\begin{vmatrix} -١٢ & ٣ \\ ٢س & -٣ \end{vmatrix}$ = ٦ ، **فإنَّ قيمة س =** .... (نظامي ٢٠١٩)

أ) ٥ ب) ٦ جـ) ٧ د) −٥

.٥٩ **إذا كان** $\begin{vmatrix} \frac{١}{٥} & ١ \\ ١ & (٢٥)^{س} \end{vmatrix}$ = **صفر ، فإنَّ قيمة س =** ....

أ) ٢ ب) −٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $-\frac{١}{٢}$

.٦٠ **إذا كان** $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ لو_{٣}(٢س - ٥) & لو_{٣}(س - ١) \end{vmatrix}$ **=١ ، فإنَّ قيمة س =** ....

أ) $-\frac{١٤}{٥}$ ب) $\frac{١٤}{٥}$ جـ) $\frac{٥}{١٤}$ د) $-\frac{٥}{١٤}$

❖ **لاحظ**

- **في سؤال ٥٩ نحول المحدد الى معادلة أسية (راجع قوانين الأسس صفحة ٧٤)**
- **في سؤال ٦٠ نحول المحدد الى معادلة لوغاريتمية (راجع قوانين اللوغاريتمات صفحة ٧٧)**

.٦١ إذا علمت أن ٢أ = $\begin{bmatrix} -٦ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ (ـ أ) = ... (نظامي ٢٠٢٠)

أ) $\begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١.٥ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١.٥ & -١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

.٦٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ : أ × ب = ...

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -١٢ & ٦ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -١٢ & ٠ \\ -٨ & ٠ \end{bmatrix}$

.٦٣ $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & -٣ \end{bmatrix}$ = ...

أ) $\begin{bmatrix} -٦ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٥ & -٦ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & -٦ \\ ٥ & -١٥ \end{bmatrix}$

.٦٤ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ أ × ب = ...

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -١ & -٥ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -١ & ٥ \end{bmatrix}$

.٦٥ $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ = ...

أ) $\begin{bmatrix} -٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -٣ & ٠ & -٦ \\ ٢ & ٠ & ٤ \\ ٤ & ٠ & ٨ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -٦ \\ ٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ & -٦ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

.٦٦ إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ١ \\ ٢ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ١٤ \\ -٢ & ١٩ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة كل من س ، ص = ...

أ) ٦، ١ ب) ١ ، ٤ جـ) ١ ، −٦ د) ١ ، ٦

.٦٧ إذا كانت $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٥ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٠ & -٨ & -١ \\ -٥ & س & ١ \\ ١٥ & ٢٢ & ص \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة كل من س ، ص = ...

أ) −٢ ، ٩ ب) ٢ ، ٩ جـ) −٢ ، −٩ د) ٩ ، −٢

.٦٨ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، وكانت ب = ٤أ ، فإنَّ $ب^{-١}$ ....

أ) $\begin{bmatrix} \frac{-١٦}{٣٢} & \frac{١٢}{٣٢} \\ \frac{٨}{٣٢} & \frac{-٤}{٣٢} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{١٦}{٣٢} & \frac{-٨}{٣٢} \\ \frac{-١٢}{٣٢} & \frac{٤}{٣٢} \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} \frac{-٤}{٣٢} & \frac{٨}{٣٢} \\ \frac{١٢}{٣٢} & \frac{-١٦}{٣٢} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \frac{-١٦}{٣٢} & \frac{٨}{٣٢} \\ \frac{١٢}{٣٢} & \frac{-٤}{٣٢} \end{bmatrix}$

.٦٩ إذا كانت أس = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أص= $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة |أ| = ... (نظامي ٢٠٢٠)

أ) -٥ ب) -٣ جـ) — ١٢ د) -١

.٧٠ إذا كان |أ| = ٧ ، |أس| = ٧ ، أص= $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة كل من س ، ص على الترتيب =.......

أ) −٢، −١ ب) ١ ، −٢ جـ) ١ ، ٢ د) ٢ ، ١

.٧١ إذا كانت أس = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$ ، أص = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ المصفوفة أ = ...

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

.٧٢ في نظام مكون من معادلتين خطيتين لمتغيرين س ، ص إذا كان |أس| = ٢ |أ| = -٤ |أص| ، فما قيم س ، ص ......

أ) ٢، -٤ ب) $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٢}{٤}$ جـ) ١ ، -٢ د) ٢ ، $-\frac{١}{٢}$

.٧٣ في نظام مكون من معادلتين خطيتين لمتغيرين س ، ص إذا كانت قيمة ص=١، |أس| = ١٥، |أص| = -٥، فإنَّ قيمة س

أ) ٥ ب) -٥ جـ) -٣ د) ٣ (إكمال ٢٠٢٠)

.٧٤ إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة س = ... (إكمال ٢٠٢٠)

أ) صفر ب) ٢ جـ) ١ د) ٤

.٧٥ إذا كانت $\begin{bmatrix} أ & ٢ \\ ٣ & -أ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ أ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة أ = ...

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) -١

.٧٦ إذا كانت أ مصفوفة ثنائية لها نظير ضربي $أ^{-١}$ ، فإنَّ أ × $أ^{-١}$ = ...

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

.٧٧ إذا كان $\begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٥ & س - ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & -٢ \end{vmatrix}$ ، فإنَّ قيمة س = ... (نظامي ٢٠٢٠)

أ) -١ ب) -٢ جـ) ٢ د) ١

.٧٨ إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، وكانت $ص^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -١ & جـ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة جـ = ... (إكمال ٢٠٢٠)

أ) -٥ ب) ٥ جـ) -١ د) ١

.٧٩ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -٢ & أ \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $س^{-١}$ = $\begin{bmatrix} -٥ & -٣ \\ -٣ & ب \end{bmatrix}$ ، فما قيم أ ، ب على الترتيب ....

أ) -٢ ، ٣ ب) -٣ ، ٢ جـ) -٣ ، -٢ د) ٣ ، -٢

.٨٠ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ المصفوفة $أ^{٢}$ = ...

أ) $\begin{bmatrix} -٩ & ٤ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٩ & -٤ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ١٦ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & -١٦ \\ -٤ & ٠ \end{bmatrix}$

.٨١ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -\sqrt{٣} & -١ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ المصفوفة $أ^{٢}$ = ...

أ) $و_{٢×٢}$ ب) $م_{٢×٢}$ جـ) أ د) ٢أ (اكمال ٢٠٢٠)

.٨٢ إذا كانت المصفوفة أ من الرتبة الثانية وكان أ + $م_{٢}$ = $و_{٢}$ ، فإنَّ المصفوفة أ = ...

أ) $و_{٢}$ ب) $م_{٢}$ جـ) -$م_{٢}$ د) -أ

٨٣. إذا كانت المصفوفة أ نظيراً ضربياً للمصفوفة ب ، فإنّ | أ × ب | = ...

أ) م ب) ١ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) – ١

٨٤. إذا كانت أ$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، فما هي المصفوفة أ .... (نظامي ٢٠١٩)

أ) $\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ب) $٢\begin{bmatrix} -٤ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ جـ) $\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ د) $-٢\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$

٨٥. إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ | أ أ$^{-١}$ | = ...

أ) ١ ب) م$_{٢}$ جـ) ٢ د) -٢

٨٦. إذا كانت ٣ (س+ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$) = س + $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ المصفوفة س = ...

أ) $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٦ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -\frac{١}{٢} & -١ \\ -٣ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١ \\ ٣ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

٨٧. إذا كانت أ . $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٧ & ٩ \end{bmatrix}$ = م$_{٢}$ ، حيث م$_{٢}$ هي المصفوفة المحايدة ، فإنَّ المصفوفة أ = ... (اكمال ٢٠١٩)

أ) $\begin{bmatrix} -٤ & ٧ \\ ٥ & -٩ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & -٧ \\ -٥ & ٩ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} -٤ & -٧ \\ -٥ & -٩ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٤ & ٥ \\ ٤ & -٩ \end{bmatrix}$

٨٨. إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ قيمة ٢أ + م$_{٢×٢}$ = ... (اكمال ٢٠٢٠)

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & -٨ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & ٨ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & -٧ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٨ \end{bmatrix}$

٨٩. إذا علمت أن ب = ٣أ$^{-١}$ ، فما هي المصفوفة التي تمثل أ × ب = ... (نظامي ٢٠٢٠)

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

٩٠. إذا كانت $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$. أ = $\begin{bmatrix} -٤ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ المصفوفة أ = ...

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

٩١. إذا كانت ٢ س . $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإنَّ المصفوفة س = ...

أ) $\begin{bmatrix} \frac{-٣١}{٢} & \frac{٤١}{٢} \\ \frac{٢٢}{٢} & \frac{-٣٠}{٢} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{-٢٧}{٢} & \frac{١٩}{٢} \\ \frac{٤٤}{٢} & \frac{-٣٢}{٢} \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} \frac{٣١}{٢} & \frac{-٤١}{٢} \\ \frac{-٢٢}{٢} & \frac{٣٠}{٢} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \frac{٢٧}{٢} & \frac{-١٩}{٢} \\ \frac{-٤٤}{٢} & \frac{٣٢}{٢} \end{bmatrix}$

إعداد و طباعة : أ.عايش أبوعياد للاستفسار: جوال ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
الإدارة العامة للقياس والتقويم والامتحانات

بسم الله الرحمن الرحيم

State Of Palestine
Ministry of Education
D. G. of Assessment, Evaluation &Examinations

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠٢٠م

الفرع: الأدبي والشرعي
المبحث: الرياضيات
الورقة: ---
الجلسة: ---

اليوم:
التاريخ: / /٢٠٢٠م
مدة الامتحان: ساعتان ونصف
مجموع العلامات: (١٠٠) علامة

ملاحظة: عدد أسئلة الورقة (ستة) أسئلة، أجب عن (خمسة) منها فقط

القسم الأول: يتكون هذا القسم من (أربعة) أسئلة، وعلى المشترك أن يجيب عنها جميعاً

السؤال الأول: (٣٠ علامة)

يتكون هذا السؤال من (٢٠) فقرة من نوع اختيار من متعدد، من أربعة بدائل، اختر رمز الإجابة الصحيحة، ثم ضع إشارة (×) المكان المخصص في دفتر الإجابة:

١. إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٥ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $أ_{٣٢} - ٢أ_{٢١}$ ؟

أ) ٧ ب) ٦ ج) ٢ د) ١

٢. إذا كانت $أ_{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $أ_{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $|أ|$ ؟

أ) −٣ ب) −٥ ج) −١٢ د) −١

٣. ما ميل القاطع لمنحنى الاقتران $ق(س) = ٣س^{٢} - ٢$، المار بالنقطتين $(-١، ق(-١))$ ، $(٢، ق(٢))$؟

أ) ١٢ ب) ٦ ج) ٣ د) −٦

٤. إذا كان $هـ(س) = ٣ق(س)$، وكان $هـ'(٢) = ٦$ ، فما قيمة $ق'(٢)$؟

أ) ١٨ ب) ٢ ج) −٢ د) ١٢

٥. إذا كان $ق'(س) = ٨ - ٢س$، فما الفترة التي يكون فيها الاقتران $ق(س)$ متزايداً؟

أ) $]-\infty، ٤[$ ب) $]٤، \infty[$ ج) $]-\infty، -٤[$ د) $]-٤، \infty[$

٦. إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٢، فما قيمة $أ + (-أ)$؟

أ) $م_{٢×٢}$ ب) $أ_{٢×٢}$ ج) $و_{٢×٢}$ د) $-أ_{٢×٢}$

٧. إذا كانت $\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٣ & (س - ١) \end{vmatrix} = -١١$ ، فما قيمة س ؟

أ) ٨ ب) ٣٠ ج) ٢ د) ١

٨. إذا كان $\int ق'(س) \, دس = س^{٢} - ٧س + جـ$ ، فما قيمة $ق'(٢)$ ؟

أ) $\frac{٧}{٢}$ ب) ١ ج) −٦ د) −٣

٩. إذا كان $\int_{٥}^{٧} ٣ق(س) \, دس = ١٥$ ، فما قيمة $\int_{٧}^{٥} ق(س) \, دس$ ؟

أ) ١٥ ب) ٥ ج) −٥ د) −١٥

(١٠٤)

١٠. إذا كانت ب = ٣أ$^{-١}$ ، فما هي المصفوفة التي تمثل أ×ب ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$　　ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$　　ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$　　د) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

١١. إذا كانت ٢أ= $\begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ ١ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فما هي المصفوفة – أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -\frac{١}{٢} & -٤ \end{bmatrix}$　　ب) $\begin{bmatrix} -٨ & ٠ \\ ٢ & ١٦ \end{bmatrix}$　　ج) $\begin{bmatrix} ٨ & ٠ \\ -٢ & -١٦ \end{bmatrix}$　　د) $\begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ \frac{١}{٢} & ٤ \end{bmatrix}$

١٢. إذا كان $(\frac{١}{٤})^{س}$ = ٦٤ ، فما قيمة س ؟

أ) ١٦　　ب) ٣　　ج) -٣　　د) -١٦

١٣. إذا كان لو$_{٢}$ أ = ٨ ، لو$_{٢}$ ب = ٢ ، فما قيمة لو$_{٢}$ $(\frac{أ}{ب})$؟

أ) ٦　　ب) ٤　　ج) ٢　　د) ١

١٤. إذا كان ٣$^{س-٣}$ = ٨١، فما قيمة س؟

أ) $\frac{١}{٣}$　　ب) $\frac{٣}{٤}$　　ج) ٣　　د) $\frac{٧}{٥}$

١٥. إذا كان ق(س) = (٣س + ١)(س – ٢) ، فما قيمة ق$'$(١)؟

أ) -٤　　ب) ٧　　ج) ٣　　د) ١

١٦. إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، فما قيمة ق$'$(-١) ؟

أ) $-\frac{١}{٣}$　　ب) $\frac{١}{٣}$　　ج) ١　　د) -١

١٧. إذا كان $\int_{-١}^{٣}$(٣س^{٢}+ب)دس = ١٦ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ) -٣　　ب) ٣　　ج) ٦　　د) -٦

١٨. ما قيمة $\sum_{ن=١}^{٥}$(ن-٢) ؟

أ) ٥　　ب) ٦　　د) ٣

١٩. إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٣}+٢}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠صفر ، وكان هـ(١) = ٦ ، هـ$'$(١) = ٣ ، فما قيمة ق$'$(١) ؟

أ) $\frac{٣}{٤}$　　ب) $\frac{١}{٤}$　　ج) $\frac{١}{١٢}$　　د) صفر

٢٠. إذا كانت أ، ب، جـ، ثلاث مصفوفات بحيث أ$_{٢×٣}$ ، ب$_{٣×٢}$ ، جـ$_{٢×٢}$ ، فما العملية المعرفة من الآتية؟

أ) جـ×أ+ب　　ب) ب×أ+جـ　　ج) ب×جـ+أ　　د) أ×ب+جـ

المبحث: الرياضيات   الفرع: الأدبي والشرعي   الورقة:---   التاريخ: / /٢٠٢٠

السؤال الثاني: (٢٠ علامة)

أ) إذا كان ق(س) $=$ س^{٣} $-$ ٤٨س ، س $\in$ ح جد: (١٠ علامات)

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على مجاله.

٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)، وحدّد نوعها.

ب) ما مجموعة حل المعادلة لو$_{٢}$(س^{٢} $-$ س $+$ ٢) $=$ ١ ؟ (٤ علامات)

ج) إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} -١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ جد $|$أ × ب$|$ ؟ (٦ علامات)

السؤال الثالث: (٢٠ علامة)

أ) جد حل المعادلة المصفوفة التالية: (٦ علامات)

$$٢\left(س + \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\right) = س - ٣\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

ب) جد قيمة س بحيث ٢^{٣} × ٨^{س} $=$ ٢$^{س+١}$ × $\frac{١}{٢^{-٤}}$ ؟ (٦ علامات)

ج) إذا كان $\int_{-١}^{٠}$ ق(س) دس $=$ ٣ ، $\int_{٢}^{٠}$(ق(س) $+$ ٢) دس $=$ ١٣ ، جد $\int_{٢}^{-١}$ ٤ق(س) دس ؟ (٨ علامات)

السؤال الرابع: (٢٠ علامة)

أ) جد $\int$(٤س^{٣} $-$ $\frac{٢}{٥س^{٢}}$) دس ؟ (٤ علامات)

ب) استخدم طريقة النظير الضربي لحل نظام المعادلات التالية: (٩ علامات)

٢س $+$ ص $=$ ١ ، س $+$ ٧ $=$ ٢ص

ج) ما مجموع أول خمسة حدود من متسلسلة حسابية مجموع حديها الثاني والرابع $=$ ٤ (٧ علامات)
ومجموع حديها الثالث والخامس $=$ ١٨ ؟

القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط.

السؤال الخامس: (١٠ علامات)

أ) إذا كان $\int_{1}^{3} (ق(س) - 2)\, دس = \int_{3}^{1} (ب س - ق(س))\, دس$ (٥ علامات)

جد قيمة الثابت ب؟

ب) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ ، $س = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ ، أثبت أن $\frac{1}{3} أ - ب = 2 س$ ؟ (٥ علامات)

السؤال السادس: (١٠ علامات)

أ) إذا كان $أ \times ب = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ، $أ \times جـ = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ ، $|أ| \neq$ صفر (٤ علامات)

أثبت أن $ب + جـ = أ^{-1}$ ؟

ب) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٣، ٥] يساوي ٧ ، جد متوسط تغير الاقتران (٦ علامات)

$هـ(س) = 2س + ق(س)$ على [٣، ٥] ؟

✵ **لاحظ :**

الامتحان الوزاري النظامي مكون من قسمين :

القسم الأول : (٩٠ درجة)

(وفيه الإجابة تكون عن جميع الأسئلة)

١) السؤال الأول (٢٠ فقرة اختيار من متعدد – ٣٠ درجة)

٢) السؤال الثاني والثالث و الرابع – ٦٠ درجة – (٢٠ درجة لكل سؤال)

القسم الثاني : (١٠ درجات)

و هو مكون من سؤالين اختياريين – السؤال الخامس والسادس –

(وفيه الإجابة تكون عن أحد الأسئلة) وهي غالبا أسئلة تفوق .

توجيهي أدبي وشرعي

أسئلة شاملة إعداد وطباعة:

أ. عايش أبوعياد

جوال ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

(مدرسة السبع الثانوية–رفح)

العام ٢٠٢٠/٢٠٢١م