السنة
٢٠١٩/٢٠٢٠م

مشكاة النجاح

الوحدة الأولى

التفاضل والتكامل

شرح وافي لمادة الرياضيات للعلوم الإنسانية للوحدة الأولى مع أمثلة إضافية وأسئلة الكتاب و حلول أسئلة سنوات سابقة وأسئلة إثرائيه

اعداد الأستاذ:

زياد عبد الفتاح محمد عمرو

تنويه

نعلمكم بان حقوق الطبع والتصوير محفوظة لمكتبة دار الارقم

للاستفسار الاتصال على :

المكتبة :٠٥٩٩٦٧٦٣٠٩

أو الاستاذ زياد: ٠٥٩٧٣١٢٢٢٠

زياد عبد الفتاح عمرو

مدرسة ذكور الشرعية الثانوية

السنة ٢٠١٩/٢٠٢٠م

(الوحدة الاولى)

التفاضل والتكامل

قبل البدء في هذه الوحدة اتمنى عليك عزيزي الطالب ان تراجع معي مرة اخرى مجموعة من الاساسيات التي سبق ان ركزنا عليها سابقا وذلك لأهميتها القصوى في هذه الوحدة .

مراجعة عامة :

١) فرق بين مربعين (وجود حدين مربعين بينهما إشارة طرح)

أ^{٢} - ب^{٢} = (أ-ب) (أ+ب)

س^{٢}-٣^{٢}= (س-٣) (س+٣)

س^{٢}-٩= (س-٣) (س+٣)

س^{٢}-١٦= (س-٤) (س+٤)

س^{٢}-٤٩= (س-٧) (س+٧)

س^{٢}-١= (س-١) (س+١)

س^{٢}-٤= (س-٢) (س+٢)

٣٦- س^{٢} = (٦- س)(٦+ س)

٢١ = ١×١ = ١

٢٢ = ٢×٢ = ٤

٢٣ = ٣×٣ = ٩

٢٤ = ٤×٤ = ١٦

٢٥ = ٥×٥ = ٢٥

٢٦ = ٦×٦ = ٣٦

٢٧ = ٧×٧ = ٤٩

٢٨ = ٨×٨ = ٦٤

٢٩ = ٩×٩ = ٨١

٢١٠ = ١٠×١٠ = ١٠٠

---

٢) فرق بين مكعبين :(حدين مكعبين بينهما إشارة طرح)

أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب) (أ^{٢}+ أب+ ب^{٢})

س^{٣}-٣^{٢} = (س - ٢) (س^{٢}+ ٢س+٤)

س^{٣}- ٨ = (س - ٢) (س^{٢}+ ٢س+٤)

س^{٣}-٢٧ = (س - ٣) (س^{٢}+ ٣س+٩)

س^{٣}-١٢٥= (س - ٥) (س^{٢}+ ٥س+٢٥)

٣١ = ١×١×١ = ١

٣٢ = ٢×٢×٢ = ٨

٣٣ = ٣×٣×٣ = ٢٧

٣٤ = ٤×٤×٤ = ٦٤

٣٥ = ٥×٥×٥ = ١٢٥

---

٣) مجموع مكعبين :(وجود حدين مكعبين بينهما إشارة جمع)

ربع غير اضرب ربع

أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب) (أ^{٢} - أب + ب^{٢})

س^{٣}+ ٨= (س +٢) (س^{٢}- ٢س+٤)

س^{٣}+٦٤= (س +٤) (س^{٢}- ٤س+١٦)

س^{٣}+١ = (س +١) (س^{٢} - س+١)

س^{٣}+١٢٥= (س +٥) (س^{٢}- ٥س+٢٥)

٤) إخراج عامل مشترك : هو إخراج الحدود المتشابهة من حدين أو أكثر

مثال:

١) س^{٢} + ٢س = س × س + ٢ × س
= س(س+٢)

٢) ٥س + س^{٢} = ٥×س + س × س
= س (٥+س)

٣) س^{٢} – ٣س = س × س - ٣ × س
= س(س-٣)

٤) س^{٢} –٤س = س × س - ٤ × س
= س(س-٤)

١) س - س^{٢} = ١×س – س×س
= س(١- س)

٢) ٢ س^{٢} –٤س = ٢× س × س- ٢×٢×س
= ٢س (س-٢)

٣) ٢س - ٦ = ٢×س – ٢×٣
= ٢(س-٣)

٤) ٥س – ٢٠ = ٥×س – ٤×٥
= ٥ (س-٤)

---

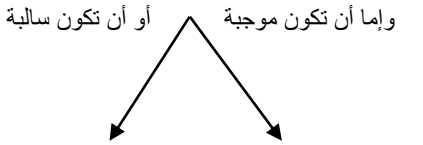
٥) تحليل العبارة التربيعية :

سنتعرف على تحليل العبارة التربيعية على شكل :

س^{٢} + ب س + جـ (ثلاثة حدود الأول تربيع، الثاني بدون تربيع، الثالث عدد عادي (حقيقي))

خطوات التحليل :

١) نفتح قوسين ( ) ( )
٢) نضع في كل قوس المتغير (س) (س)
٣) نجد عددين حاصل ضربهما يساوي (ج) " الحد الأخير " "العدد الثابت "
٤) ننظر إلى إشارة الحد الأخير وهناك احتمالان



ومجموعها يساوي (ب) الفرق بينهما يساوي (ب)

٥) نضع العدد الكبير في القوس الأول
٦) الإشارة تكون حسب القاعدة

أمثلة :

١) س^{٢} – ٤س + ٤ ٤×١
(س – ٢) (س – ٢) ٢×٢

٢) س^{٢}- ٥س – ٦ ٣×٢
(س-٦) (س+١) ٦×١

٣) س^{٢} + ٢س- ٨ ٨×١
(س+٤) (س-٢) ٤×٢

٤) س^{٢} – س – ٦ ٦×١
(س-٣) (س+٢) ٣ ×٢

٦) فك مربع قوس

$(أ+ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$

(الأول + الثاني)^{٢} =(الأول)^{٢} + (٢× الأول × الثاني) + (الثاني)^{٢}

١) $(س+٣)^{٢} = س^{٢} + (٢\times س\times ٣) + ٣^{٢}$
$= س^{٢} + ٦س + ٩$

٢) $(س+٥)^{٢} = س^{٢} + ١٠س + ٢٥$

٣) $(س+٢)^{٢} = س^{٢} + ٤س + ٤$

٤) $(س+٦)^{٢} = س^{٢} + ١٢س + ٣٦$

٥) $(س-٣)^{٢} = س^{٢} - ٦س + ٩$

الرجاء الاهتمام بهذه الأمور الستة لأنها مهمة جدا لابد من معرفتها بشكل كبير

ملاحظة: يكثر في هذه الوحدة التعامل مع الإقترانات ونحتاج في كثير من الاحيان الى تعويض قيم معينة في هذه الإقترانات واليك عزيزي الطالب هذه المراجعة البسيطة للتعرف على قيمة اقتران عند س =أ ، أ∈ح

مراجعة بسيطة عن قيمة الاقتران

مثال : إذا كانت ص= هـ(س) = ٢×س+٥ أوجد/ي قيمة ما يلي

١) $هـ(٢) = ٢\times ٢ + ٥$
$= ٤ + ٥ = ٩$

٢) $هـ(٣) = ٢\times ٣ + ٥$ $= ٦ + ٥ = ١١$

٣) $هـ(٧) = ٢\times ٧ + ٥$ $= ١٤ + ٥ = ١٩$

٤) $هـ(-٣) = ٢\times -٣ + ٥$ $= -٦ + ٥ = -١$

٥) $هـ(-٢) = ٢\times -٢ + ٥$ $= -٤ + ٥ = ١$

إذا كان هـ(س) = ٣س^{٢} -٢س +١ أوجد/ي

١) $هـ(١) = ٣(١)^{٢} - ٢\times ١ + ١ = ٣ - ٢ + ١ = ٢$

٢) $هـ(٢) = ٣(٢)^{٢} - (٢\times ٢) + ١ = (٤\times ٣) - ٤ + ١ = ١٢ - ٤ + ١ = ٩$

الدرس الاول: (ا– ١) متوسط التغير للاقتران

نشاط (١): يعد الزيت الفلسطيني من أجود انوع الزيوت على مستوى العالم، ويشكل دعامة اقتصادية للعائلة الفلسطينية.

يرصد الجدول أدناه إنتاج فلسطين من الزيتون، والزيت المستخرج في عامي ٢٠١٣م،٢٠١٤م، كما وردت من جهاز الإحصاء المركزي.

كمية الزيتون وكمية الزيت المستخرج منه في العامين ٢٠١٣ و٢٠١٤ (الكميات بالطن)

السنة		٢٠١٣	٢٠١٤	مقدار التغير بين العامين
س	كمية الزيتون	٦٦٠٠٠	١٠١٠٠٠	٣٥٠٠٠
ص	كمية الزيت المستخرج	١٨٠٠٠	٢٥٠٠٠	ــــــــــــــ

التغير في كمية الزيتون بين عامي ٢٠١٣ م و ٢٠١٤م يساوي ٣٥٠٠٠ طن.

التغير في كمية الزيت المستخرج بين العامين يساوي ــــــــــــــ .

تعريف : إذا كان ص=ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن:

التغير في قيمة س= $س_٢ - س_١$، ويرمز له بالرمز $\Delta س$.

التغير في قيمة ص $= ص_٢ - ص_١ = ق(س_٢) - ق(س_١)$ ويرمز له بالرمز $\Delta ص$

نشاط (٢):

أجد التغير في س عندما تتغير س من $س_١ = ١$ إلى $س_٢ = ٤$.

$\Delta س = س_٢ - س_١ =$ ــــــــــــــ .

مثال (١): إذا كان $ق(س) = ٥ - ٢س^٢$ ، وكانت $س_١ = ١$ ، $\Delta س = ٢$ ، فما مقدار التغير في ص؟

الحل:

$$\Delta س = س_٢ - س_١$$
$$٢ = س_٢ - ١$$
$$\therefore س_٢ = ٣$$
$$\Delta ص = ق(س_٢) - ق(س_١) = ق(٣) - ق(١)$$
$$= (٥ - ٢(٣)^٢) - (٥ - ٢(١)^٢)$$
$$= -١٣ - ٣ = \boxed{-١٦}$$

ناقش: ما مقدار التغير في ص عندما يكون التغير في س=١؟

المتغير :هو شيء قيمته ليست ثابتة (يأخذ أكثر من قيمة)

التغير : مقدار التحول بين القيمة الأولى والقيمة الثانية ويرمز له بالرمز "Δ" وتقرأ (دلتا).

حيث أن التغير في أي شيء = (القيمة الثانية – القيمة الأولى).

متوسط التغير للاقتران

إذا كان $هـ(س)$ اقتراناً وتغيرت س من $س_1$ إلى $س_2$ فإن متوسط التغير للاقتران $هـ(س)$ يعطى بالعلاقة :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{هـ(س_2) - هـ(س_1)}{س_2 - س_1}$$

يستخدم عندما يعطى نقطتين

أ$(س_1، ص_1)$ ، ب $(س_2، ص_2)$

ويطلب ١- متوسط التغير

٢- ميل المستقيم القاطع

يستخدم عندما يعطي اقتران وقيم س : $س_1$ ، $س_2$

ويطلب:- متوسط التغير

مثال توضيحي :اذا كان ق(س) = ٢س + ٣ اوجد متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_1$ =٢ ، $س_2$ = ٤

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_2) - هـ(س_1)}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{هـ(٤) - هـ(٢)}{٤ - ٢}$$

$$= \frac{(٣ + ٤ \times ٢) - (٣ + ٢ \times ٢)}{٢}$$

$$= \frac{١١ - ٧}{٢} = \frac{٤}{٢} = \boxed{٢}$$

(اكمال٢٠١٩) ليكن $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ فما قيمة متوسط تغير الاقتران $ق(س)$ عندما تتغير س من $س_1 = \frac{١}{٢}$ ، $س_2 = ١$

مثال (٢)أحسب متوسط التغير في الاقتران ق(س) = س^{٢} + ٥ ، عندما تتغير س في الفترة [٣،٥] .

ق(٥) = ٥ + ٥^{٢} = ٣٠ ، ق(٣) = ٥ + ٣^{٢} = ١٤

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ = $\frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣}$

= $\frac{٣٠ - ١٤}{٥ - ٣}$ = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨

مثال خارجي: اذا ه(س) = $\sqrt{٣س + ٤}$ كان وتغيرت س من س$_{١}$ = ٤ الى س$_{٢}$ = ٧ ، اوجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير للاقتران=

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ه(س_{٢}) - ه(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ه(٧) - ه(٤)}{٧ - ٤}$

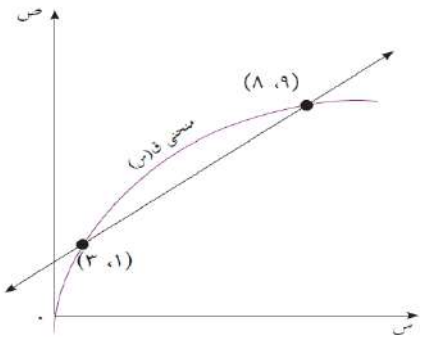
= $\frac{\sqrt{٣ \times ٧ + ٤} - \sqrt{٣ \times ٤ + ٤}}{٧ - ٤}$

= $\frac{\sqrt{٢٥} - \sqrt{١٦}}{٣}$ = $\frac{٥ - ٤}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

المفهوم الهندسي لمتوسط التغير:

إذا قطع المستقيم ل منحى ق(س) في النقطتين ((س$_{١}$،ق(س$_{١}$))،(س$_{٢}$،ق(س$_{٢}$)) فإن ميل المستقيم القاطع ل يساوي متوسط التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

مثال (٣):أجد ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) ، الممثل بالشكل المجاور .



الحل : ق(١) = ٣ ، ق(٩) = ٨

∴ ميل القاطع = $\frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$ = $\frac{ق(٩) - ق(١)}{٩ - ١}$

= $\frac{٨ - ٣}{٩ - ١}$ = $\frac{٥}{٨}$

إذن ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) يساوي $\frac{٥}{٨}$

(لجنة ٢٠١٨) اذا كانت النقطتان أ(-١ ، ٢) ، (٢ ، ٥) تقعان على منحنى الاقتران ص=ق(س) فإن متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من -١الى ٢ يساوي

مثال (٤): إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين أ(-٤ ، ٦) ، ب (٢،٠) ، فما متوسط التغير للاقتران ق(س)؟

الحل: متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - ٦}{٠ - ٤-} = \frac{٤}{٤-} = \boxed{-١}$

لجنة(٢٠٠٧) اذا كان $ص = هـ(س)$ اقتراناً ، وكان متوسط التغير للاقتران $هـ(س)$ عندما تتغير س من س١= ٢ الى س٢ = ٥ هو ١٠، فجد قيمة $هـ(٥)$ علما بان $هـ(٢) = ٦$.

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٥ - ٢} = ١٠$

$\frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٣} = ١٠$ وبالضرب التبادلي ينتج

$هـ(٥) - هـ(٢) = ١٠ \times ٣$

$هـ(٥) - ٦ = ٣٠$

$+٦ \quad +٦$

$هـ(٥) = ٣٦$

اكمال ٢٠١٧ اذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ الى ٥ يساوي ٢، وكان ق(٥)=٧ ، ق(٢)=٣ فان قيمة ٢ تساوي

(وزاري ٢٠١٣) اذا كان متوسط التغير للاقتران $هـ(س)$ عندما تتغير س من س١= ٢ الى س٢ = ٤ هو ٢، وكان $هـ(٤) = ٦$ فإن قيمة $هـ(٢)$

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٤) - هـ(٢)}{٤ - ٢} = ٢$

$\frac{هـ(٤) - هـ(٢)}{٢} = ٢$ وبالضرب التبادلي ينتج

$هـ(٤) - هـ(٢) = ٢ \times ٢$

$٦ - هـ(٢) = ٤$

$٦- \quad ٦-$

$-هـ(٢) = ٢-$

$\boxed{هـ(٢) = ٢}$

(وزاري ٢٠٠٨) اذا علمت ان ق(٥)- ق(-٢) = ٢٨ فان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من س١=-٢ ، س٢=٥ يساوي=

الحل:- $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٥) - هـ(-٢)}{٥ - ٢-} = \frac{٢٨}{٧} = \boxed{٤}$

لجنة ٢٠١٩)اذا كان ق(٣)- ق(١) = -١٦ ما متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من س١=١ ، س٢=٣ ؟

(اكمال ٢٠١٨) اذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ الى ٣ يساوي ٤، وكان ق(٣)=١٣ فان ق(١)=

مثال (٥): إذا كان هـ(س) = ٢ن(س) + ٤ ، وكان متوسط تغير الاقتران ن(س) على الفترة [٣،٧] يساوي ١٠ ، أجد متوسط التغير للاقتران هـ(س) على الفترة ذاتها.

متوسط التغير للاقتران $ن(س) = \frac{ن(٧) - ن(٣)}{٧ - ٣} = ١٠$

$$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٧) - هـ(٣)}{٧ - ٣}$$
$$= \frac{(٤ + (٧)ن٢) - (٤ + (٣)ن٢)}{٧ - ٣}$$
$$= \frac{ن٢(٧) - ن٢(٣)}{٧ - ٣} = ٢(\frac{ن(٧) - ن(٣)}{٧ - ٣})$$

= ٢× (متوسط تغير الاقتران ن(س) على الفترة [٣،٧]) = ٢×١٠ = ٢٠

تمارين ومسائل(١-١):ص٩

١) أجد متوسط التغير في كل من الإقترانات الآتية عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$.

أ) $ن(س) = ٦ - ٢س$ ، عندما تتغير س من $س_١ = ٠$ إلى $س_٢ = ٣$.

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ن(س_٢) - ن(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ن(٣) - ن(٠)}{٣ - ٠}$$
$$= \frac{(٦ - ٢\times٣) - (٦ - ٢\times٠)}{٣} = \frac{(٠) - (٦)}{٣} = \frac{-٦}{٣} = \boxed{-٢}$$

ب) $هـ(س) = س^٢ + ٢$ ، عندما تتغير س من $س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = ٥$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ن(س_٢) - ن(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ن(٥) - ن(٢)}{٥ - ٢}$$
$$= \frac{(٢ + ٥^٢) - (٢ + ٢^٢)}{٣} = \frac{(٢٧) - (٦)}{٣} = \frac{٢١}{٣} = \boxed{٧}$$

جـ) $ل(س) = \sqrt[٣]{س + ٢}$ عندما تتغير س من $س_١ = -١$ إلى $س_٢ = ٦$.

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ل(س_٢) - ل(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ل(٧) - ل(-١)}{٦ - (-١)}$$
$$= \frac{(\sqrt[٣]{٦ + ٢}) - (\sqrt[٣]{-١ + ٢})}{٧} = \frac{(\sqrt[٣]{٨}) - (\sqrt[٣]{١})}{٧} = \frac{(٢) - (١)}{٧} = \boxed{\frac{١}{٧}}$$

٢) يقطع المستقيم ل منحنى الاقتران في النقطتين (١ ، -٢) ، (جـ ، ٤)، فإذا كان ميله يساوي ٣ ، أجد قيمة الثابت جـ.

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - (-٢)}{جـ - ١} = ٣$$
$$٣ = \frac{٦}{جـ - ١} \Leftarrow ٣جـ - ٣ = ٦$$
$$٣جـ = ٩ \Leftarrow جـ = \frac{٩}{٣} = \boxed{٣}$$

٣) إذا كان متوسط تغير الاقتران $ن(س)$في الفترة $[٤،٢]$ يساوي ٥ ، أجد متوسط تغير الاقتران $هـ(س) = ٣ن(س) - ٢$ في تلك الفترة؟

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{هـ(٤) - هـ(٢)}{٤ - ٢}$$
$$\Leftarrow \frac{(٣ن(٤) - ٢) - (٣ن(٢) - ٢)}{٤ - ٢} = \frac{(٣ن(٤) - ٣ن(٢) + ٢) - ٣ن(٤)}{٤ - ٢}$$
$$= \frac{(٣ن(٤) - ٣ن(٢))}{٤ - ٢} = ٣(\frac{ن(٤) - ن(٢)}{٤ - ٢}) = ٣\times٥ = \boxed{١٥}$$

متوسط تغير الاقتران $ن(س)$=٥

$$= \frac{ن(س_٢) - ن(س_١)}{س_٢ - س_١}$$
$$= \frac{ن(٤) - ن(٢)}{٤ - ٢} = ٥$$

إذا كان متوسط التغير $\upsilon(س) = س^{٣} - ٥س$ في الفترة $[١،٣]$ يساوي -٩ ، أجد قيمة الثابت أ؟

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\upsilon(س_{٢}) - \upsilon(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{\upsilon(٣) - \upsilon(١)}{٣ - ١} = -٩$$

$$= \frac{(٣)أ^{٢} - ((٣)\times٥ - (١)أ^{٢}\times١)}{٢} = \frac{(١٥ - ١٩) - (٥ - أ)}{٢}$$

$$-٩ = \frac{(٥ + أ - ١٥ - ١٩)}{٢} \Leftarrow ١٠ - ١٨ = -١٨$$

$$-١ = أ \Leftarrow -٨ = ١٨$$

٥) إذا كان $\upsilon(٣) = ٨$ ، وكان متوسط التغير في الاقتران $\upsilon(س)$ عندما تتغير س من $س_{١} = ٣$ إلى $س_{٢} = ٥$ يساوي -٢ ، أجد $\upsilon(٥)$.

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{و(س_{٢}) - و(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$$= \frac{و(٥) - و(٣)}{٥ - ٣} = -٢$$

$$= \frac{و(٥) - و(٣)}{٢} = -٢$$ وبالضرب التبادلي ينتج

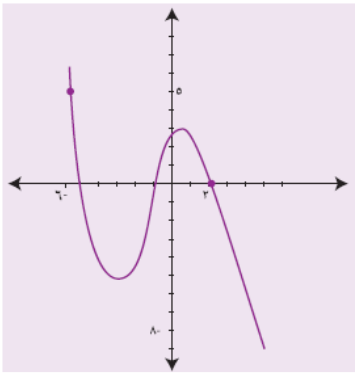
$$و(٥) - و(٣) = -٤$$

$$و(٥) - ٨ = -٤$$

$$\boxed{و(٥) = ٤}$$

٦)يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) على الفترة $[-٦،٢]$ احسب ميل القاطع الذي يمر بنقطتين (-٦ ، ق(-٦)) و (٢، ق(٢)) .

من الشكل المجاور ق(-٦) = ٥ ، ق(٢) = ٠



ميل القاطع $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\upsilon(٢) - \upsilon(-٦)}{٢ - ٦^{-}}$

$$= \frac{٠ - ٥}{٨} = \boxed{\frac{-٥}{٨}}$$

(١-٢)الدرس الثاني: المشتقة الاولى:

نشاط (١) :تعد الضرائب من مصادر التمويل الاساسية لأنشطة الدولة ونفقاتها، وقد تم اقرار ضريبة الدخل على الافراد من خلال توزيعهم في شرائح ضريبية، حيث تكون ضريبة الدخل ٥% على الأفراد الذين ينحصر دخلهم السنوي بين ١-١٥ ألف دينار، لا يفرض في فلسطين ضريبة على الهدايا أو الميراث.

مقدار الضريبة على ميراث قدره ١٢٣٠ ديناراً يساوي صفراً (لماذا؟)

مقدار ضريبة الدخل على ١٠٠٠ دينار = $\frac{٥}{١٠٠} \times ١٠٠٠ = ٥٠$ ديناراً.

مقدار ضريبة الدخل على ٢٤٠٠ دينار = $\frac{٥}{١٠٠} \times ٢٤٠٠ =$ _____ .

مقدار ضريبة الدخل على ١٢٠٠٠ دينار = _____ .

وبلغة الرموز: إذا كانت (ص) مقدار الضريبة المفروضة على الدخل (س) فإن:

ص = $(\frac{٥}{١٠٠}) \times$ س ، لاحظ أنه مهما أختلف المبلغ تبقى القيمة $\frac{٥}{١٠٠}$ ثابتة، هذا ما نطلق عليه مشتقة العلاقة الخطية.

تعريف: إذا كان ص = ق(س) معرفاً عند س = أ ، وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(أ+هـ) - ق(أ)}{هـ}$ موجودة فإنها تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س= أ ، ويرمز لها بالرمز ق´(أ) أو $\frac{د ص}{د س}_{س=أ}$. أو $ص´|_{س=أ}$

القاعدة الاولى : إذا كانت ص = ق(س) = أ ، حيث أ عدد حقيقي ، فإن ق´(س) = $\frac{د ص}{د س}$ = صفر.

القاعدة الثانية : إذا كانت ص = أس + ب ، حيث أ،ب عددان حقيقيان أ ≠ ٠، فإن $\frac{د ص}{د س}$ = أ .

مثال (١) : أجد مشتقة كل من الإقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٩٨ ب) ص = ٥س جـ) ٢ص = −٤س

أ) ق(س) = ٩٨ (اقتران ثابت)

ق´(س) = صفر

ب) ص = ٥س (اقتران خطي)

إذن : $\frac{د ص}{د س}$ = ٥

جـ) ٢ص = −٤س نقسم الطرفين على ٢

⟸ ص = −٢س

ومنها $\frac{د ص}{د س}$ = −٢

امثلة على القاعدة الاولى و الثانية

$هـ(س) = ٤ \Leftarrow$ ، $قـ(س) = ٠$	$هـ(س) = ٢س - ٧ \Leftarrow$ ، $قـ(س) = ٢$
$هـ(س) = ٩ \Leftarrow$ ، $قـ(س) = ٠$	$هـ(س) = -٣س - ٣ \Leftarrow$ ، $قـ(س) = -٣$
$هـ(س) = -٧ \Leftarrow$ ، $قـ(س) = ٠$	$هـ(س) = -٧س + ٢ \Leftarrow$ ، $قـ(س) = -٧$
$هـ(س) = \frac{١}{٢} \Leftarrow$ ، $قـ(س) = ٠$	$هـ(س) = \frac{١}{٢}س - ١ \Leftarrow$ ، $قـ(س) = \frac{١}{٢}$
$هـ(س) = \pi \Leftarrow$ ، $قـ(س) = ٠$	$هـ(س) = \pi س + ٣ \Leftarrow$ ، $قـ(س) = \pi$
$هـ(س) = \sqrt{٣} \Leftarrow$ ، $قـ(س) = ٠$	$هـ(س) = \sqrt{٣}س \Leftarrow$ ، $قـ(س) = \sqrt{٣}$

القاعدة الثالثة : اذا كان $هـ(س) = حـ س^{ن}$ $\Leftarrow$ $قـ(س) = حـ ن س^{ن-١}$ $ن \in ط$

امثلة :-اذا كان $هـ(س) = س^{٥}$ $\Leftarrow$ $قـ(س) = ٥س^{٥-١}$

$= ٥س^{٤}$

١) اذا كان $هـ(س) = س^{٧}$ $\Leftarrow$ $قـ(س) = ٧س^{٦}$

٢) اذا كان $هـ(س) = س^{٢٧}$ $\Leftarrow$ $قـ(س) = ٢٧س^{٢٦}$

٣) اذا كان $هـ(س) = س^{-٣}$ $\Leftarrow$ $قـ(س) = -٣س^{-٤}$

٤) اذا كان $هـ(س) = س^{-٥}$ $\Leftarrow$ $قـ(س) = -٥س^{-٦}$

٥) اذا كان $هـ(س) = س^{-١}$ $\Leftarrow$ $قـ(س) = -س^{-٢}$

٦) اذا كان $هـ(س) = س^{\frac{١}{٢}}$ $\Leftarrow$ $قـ(س) = \frac{١}{٢}س^{\frac{١}{٢}-١}$

$= \frac{١}{٢}س^{\frac{-١}{٢}}$

٧) اذا كان $هـ(س) = س^{\frac{٣}{٥}}$ $\Leftarrow$ $قـ(س) = \frac{٣}{٥}س^{\frac{٣}{٥}-١}$ $= \frac{٣}{٥}س^{\frac{-٢}{٥}}$

---

٨) اذا كان $هـ(س) = \frac{١}{س^{٧}} = س^{-٧}$

$\Leftarrow$ $قـ(س) = -٧س^{-٨} = \frac{-٧}{س^{٨}}$

---

٩) اذا كان $هـ(س) = \frac{١}{س^{٥}} = س^{-٥}$

$\Leftarrow$ $قـ(س) = -٥س^{-٦} = \frac{-٥}{س^{٦}}$

البسط – المقام / المقام

قائمة الاعداء:

١) $\frac{١}{س^{ن}} = س^{-ن}$

٢) $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

اذا وجد احد الاعداء بالمسالة نقوم بما يلي:

١) تهيئة
٢) اشتقاق
٣) تبسيط

يجب ان لا تحتوي الاجابة على قوى سالبة او كسرية وان وجدت نرجعها الى اصلها :

القوى السالبة ← المقام جذر

القوى الكسرية ← الجذر بالمقام

$$هـ(س) = \frac{١}{س^{٣}} = س^{-٣}$$

١٠) اذا كان

$$\Leftarrow \quad هـ(س) = -٣س^{-٤} = \frac{-٣}{س^{٤}}$$

$$هـ(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٣}}$$

١١) اذا كان

$$\Leftarrow \quad هـ(س) = \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$$

$$هـ(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}} = س^{\frac{٣}{٢}}$$

١٢) اذا كان

$$\Leftarrow \quad هـ(س) = \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢\sqrt{س}}$$

$$هـ(س) = \frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٢}}} = س^{\frac{-٢}{٥}}$$

١٣)

$$\Leftarrow \quad هـ(س) = \frac{-٢}{٥} س^{\frac{-٧}{٥}} = \frac{-٢}{٥\sqrt[٥]{س^{٧}}}$$

مثال(٢) : أجد مشتقة الاقتران $ن(س) = س^{٥}$ عند النقطة (-٢ ، -٣٢).

$$ن'(س) = ٨س^{٨-١}$$
$$ن'(س) = ٥س^{٥-١} = ٥س^{٤}$$
$$\therefore ن'(-٢) = ٥(-٢)^{٤}$$
$$= ٥ \times ١٦ = \boxed{٨٠}$$

نشاط (٢) :إذا كان $ن(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}}$ أجد $ن'(-٨)$.

$$ن(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}} \Leftarrow ن(س) = س^{\frac{٢}{٣}} \text{ (لماذا؟)}$$

$$ن'(س) = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٢}{٣}-١}$$
$$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢}{٣} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$$
$$\Leftarrow ن'(-٨) = \frac{٢}{٣} \frac{١}{\sqrt[٣]{-٨}}$$
$$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{-٢} = \boxed{\frac{-١}{٣}}$$

القاعدة الرابعة :

إذا كان ن(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان أ عدداً حقيقياً ، أ ≠ ٠ ، فإن الاقتران هـ(س) = أ.ن(س) هو اقتران قابل للاشتقاق، وتكون هـ´(س) = أ . ن´(س) .

مثال: ١) اذا كان قـ(س) = ٣س^٥ ⇐ قـَ(س) = ٣ × ٥س^٤

٢) قـ(س) = ٢س^٦ ⇐ قـَ(س) = ١٢س^٥

٣) قـ(س) = $\frac{١}{٣}$س^٣ ⇐ قـَ(س) = $\frac{١}{٣}$ × ٣س^٢ = س^٢

٤) قـ(س) = ٣س ⇐ قـَ(س) = ٣س^٠ : س^٠ = ١

= ٣ × ١ = ٣

قـ(س) = أس ، أ ∈ ع ⇐ قـَ(س) = أ

" اذا تم اشتقاق أس فان الناتج أ"

٥) قـ(س) = ٤س ⇐ قـَ(س) = ٤

---

٦) قـ(س) = س ⇐ قـَ(س) = ١

---

٧) قـ(س) = $\frac{٣}{س^٥}$ = ٣س^-٥ ⇐ قـَ(س) = -١٥س^-٦ = $\frac{-١٥}{س^٦}$

مثال (٣) :إذا كان هـ(س) = ٥ن(س) ، وكان ن´(٦) = -١ ، فما قيمة هـ´(٦) ؟

هـ´(٦) = ٥ن´(٦)

هـ´(٦) = ٥ × -١

= -٥

تمارين ومسائل(١-٢): ص١٣

١) أجد مشتقة كل من الإقترانات الآتية عند قيمة س المقابلة لكل منها :

أ) ن(س) = −٢ √٥ ، س = ١٠٠ ن َ(س) = ٠ ⇐ ن َ(١٠٠) = ٠	ب) ص = ٣س ، س = ١٢ $\frac{د ص}{د س} = ٣ \Leftarrow \frac{د ص}{د س}\Big\|_{س=١٢} = ٣$
جـ) ك(س) = س ، س = −٧ ك َ(س) = ١ ⇐ ك َ(−٧) = $\boxed{١}$	د) ن(س) = $\sqrt[٣]{س^{٥}}$ = $س^{\frac{٥}{٣}}$ ، س = ١ ن َ(س) = $\frac{٥}{٣} س^{\frac{٢}{٣}} \Leftarrow$ ن َ(١) = $\frac{٥}{٣}(١)^{\frac{٢}{٣}} = \boxed{\frac{٥}{٣}}$
هـ) ن(س) = $س^{٣}$ ، س = −١ ن َ(س) = ٣$(س)^{٢} \Leftarrow$ ن َ = ٣$(-١)^{٢}$ = ٣	

٢) أجد ن َ(س) لكل من الإقترانات الآتية :

أ) ن(س) = $\frac{٦٤}{٥} س^{-٥}$

ن َ(س) = $-٥ \times \frac{٦٤}{٥} س^{-٦}$

= $-٦٤ س^{-٦} = \frac{-٦٤}{س^{٦}}$

ب) ن(س) = $(٠,٠٠٣)^{٥}$

ن َ(س) = ٠

جـ) ن(س) = ٥$س^{٤}$

ن َ(س) = ٥ × ٤$س^{٣}$

= ٢٠$س^{٣}$

(إكمال ٢٠١٩) اذا كان ص = ٥$س^{٤}$ فما قيمة $\frac{د ص}{د س}\Big\|_{س=-١}$

٣) إذا كان ص = ٦ن(س) ، وكان ن َ(٥) = ٧ ، أجد قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٥ ؟

$\frac{د ص}{د س} = ٦ن َ(س) \Leftarrow \frac{د ص}{د س}\Big\|_{س=٥} = ٦ن َ(٥)$

$\boxed{٤٢} = ٧ \times ٦$

٤) إذا كان ن(س) = $أس^{٣}$ ، وكان ن َ(٢) = ٦٠ ، فما قيمة الثابت أ؟ سؤال لجنة ٢٠١٩

ن َ(س) = $١٣أس^{٢}$

ن َ(٢) = $١٣أ(٢)^{٢}$ = ٦٠

٢١ أ = ٦٠ ⇐ $\boxed{أ = ٥}$

(ا-٣)الدرس الثالث: قواعد الاشتقاق :

نشاط (١) : اعتاد الفلسطيني منذ القدم تجميع مياه الإمطار في فصل الشتاء عن أسطح المنازل في بئر يلحقهُ ببيته ، وتشكل هذه العملية جزءاً من الحصاد المائي الذي يقوم به الفلسطيني للتغلب على مشكلة نقص المياه في فصل الصيف.

يمثل الشكل المجاور سطح احد المنازل.

مساحة سطح المبنى = $(س^{٢}) + (_____)$ كمية المياه المتجمعة $(م^{٣})$ تعطى بالعلاقة:

مساحة سطح المبنى $(م^{٢})$ × معدل سقوط الإمطار العام (م) × ٠,٨

إذا كان معدل سقوط الإمطار عام ٢٠١٦ يساوي ٠,٤٠٤م ، فإن كمية المياه المتجمعة عن سطح البيت =___ .

كيف يمكن اشتقاق هذه العلاقة؟

قاعدة (١): إذا كان ن(س) و هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان ك(س) = ن(س) ± هـ(س) فإن: الاقتران ك(س) يكون قابل للاشتقاق وتكون : ك´(س) = ن´(س) ± هـ´(س)

وبلغة أخرى (ن ± هـ)´(س) = ن´(س) ± هـ´(س)

مثال (١) : إذا كان ن(س) = ٥س^{٢} ، وكان هـ(س) = ٤س^{٣} ، أجد :

أ) (ن + هـ)´(س) ب) (ن − هـ)´(١)

أ) ن´(س) = ١٠س . كما أن : هـ´(س) = ١٢س^{٢}

بحسب القاعدة : (ن + هـ)´(س) = ن´(س) + هـ´(س)

ومنها : (ن + هـ)´(س) = ١٠س + ١٢س^{٢} (لماذا؟)

ب) ن´(١) = ١٠(١) = ١٠

هـ´(١) = ١٢(١)^{٢} = ١٢

إذن : (ن − هـ)´(س) = ن´(س) − هـ´(س)

(ن − هـ)´(١) = (١٠) − (١٢) = −٢

امثلة اضافية :

١) اذا كان هـ(س) = ٤س^{٣} + ٢س^{٥}

⇐ هـَ(س) = ١٢س^{٢} + ١٠س^{٤}

---

٢) اذا كان هـ(س) = ٧س^{٢} + ٢س + ٥

⇐ هـَ(س) = ١٤س + ٢ + ٠ = ١٤س + ٢

نشاط (٢) :

إذا كان ن(س) = ٦س^{٢} + ٥س − ٧ ، فما قيمة ن´(٣) ؟

الحل :

ن´(س) = ٦ × (٢س) + ٥ (لماذا؟)

ن´(٣) = _____

٣) اذا كان $\text{ه}(س) = ٦س^{٣} - ٥س^{٢} + \sqrt{٢}$

$\Leftarrow \quad \text{ه}'(س) = ١٨س^{٢} - ١٠س + ٠ = \boxed{١٨س^{٢} - ١٠س}$

٤) اذا كان $\text{ه}(س) = \sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$

$\Leftarrow \quad \text{ه}'(س) = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢س^{\frac{١}{٢}}} = \boxed{\frac{١}{٢\sqrt{س}}}$

ملاحظة : يمكن حفظها حفظ

اذا كان $\text{ه}(س) = \sqrt{س} \Leftarrow \text{ه}'(س) = \boxed{\frac{١}{٢\sqrt{س}}}$

مثال (لجنة ٢٠٠٧) : اذا كان $\text{ه}(س) = \sqrt{س}$ أوجد $\text{ه}'(٤)$

الحل $\text{ه}'(س) = \boxed{\frac{١}{٢\sqrt{س}}}$

$\Leftarrow \quad \text{ه}'(٤) = \frac{١}{٢\sqrt{٤}} = \frac{١}{٢\times٢} = \boxed{\frac{١}{٤}}$

مثال شامل: اوجد المشتقة الاولى للإقترانات الاتية " اوجد $\frac{ص}{س}$ في كل مما يلي "

١) $\text{ه}(س) = ٣س^{٤} + \frac{١}{س^{٣}} = ٣س^{٤} + س^{-٣}$

$\Leftarrow \quad \text{ه}'(س) = ١٢س^{٣} + ٣-س^{-٤}$

$= ١٢س^{٣} - \frac{٣}{س^{٤}}$

---

٢) $\text{ه}(س) = \sqrt{س^{٥}} + ٤س - ٣ = س^{\frac{٥}{٢}} + ٤س - ٣$

$\Leftarrow \quad \text{ه}'(س) = \frac{٥}{٢}س^{\frac{٣}{٢}} + ٤ = \frac{٥}{٢}\sqrt{س^{٣}} + ٤$

---

٣) $\text{ه}(س) = \frac{١}{س^{٦}} + \sqrt[٧]{س^{٣}} = س^{-٦} + س^{\frac{٣}{٧}}$

$\Leftarrow \quad \text{ه}'(س) = -٦س^{-٧} + \frac{٣}{٧}س^{-\frac{٤}{٧}} = \frac{-٦}{س^{٧}} + \frac{٣}{٧\sqrt[٧]{س^{٤}}}$

نشاط (٣) :

إذا كان $\text{ن}(س) = \text{ك}(س) - ٢\text{م}(س) + ٧$ حيث

$\text{ك}(س) = ٣س^{٢} + ٢$ ، $\text{م}(س) = ٣س + ٢$

فإن:

$\text{ك}'(س) = ٦س^{٢}$ ، $\text{م}'(س) = ٣$

$\text{ن}'(س) = \text{ك}'(س) - ٢\text{م}'(س)$

$= _____$

إذن : $\text{ن}'(-٢) = _____$

اوجد $\text{ق}'(٢)$ علما بان $\text{ق}(س) = س^{٢} + س + ١$.

الحل $\text{ق}'(س) = ٢س + ١$

$\text{ق}'(٢) = ٢ \times ٢ + ١ = \boxed{٥}$

اكمال (٢٠٠٧) اذا كان $\text{ق}(س) = س^{٣}$ فان $\text{ق}'(٢) =$

الحل: $\text{ق}'(س) = ٣س^{٢}$

$\text{ق}'(٢) = ٣(٢)^{٢} = ٣ \times ٤ = \boxed{١٢}$

.....

اكمال (٢٠٠٨) اذا كانت ص= ٢س^{٢} - ٥ س + ١ فان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{س=٢}$.

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٤س - ٥$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{س=٢} = ٤ \times ٢ - ٥ = \boxed{٣}$

لجنة (٢٠٠٩) اذا كان $\text{ق}(س) = ٣\text{هـ}(س) + س$ ، $\text{هـ}'(٢) = -١$ ، $\text{هـ}(٢) = ٣$ $\text{ق}'(٢)$

$\text{ق}'(س) = ٣\text{هـ}'(س) + ١$

$\text{ق}'(٢) = ٣\text{هـ}'(٢) + ١$

$= ٣ \times ^{-}١ + ١ = -٣ + ١ = \boxed{-٢}$

لجنة (٢٠١٠) اذا كانت $\text{هـ}(س) = س + \text{ق}(س)$ ، $\text{هـ}'(٢) = ٤ \Leftarrow \text{ق}'(٢) =$

$\text{هـ}'(س) = ١ + \text{ق}'(س)$

$\text{هـ}'(٢) = ١ + \text{ق}'(٢)$

$٤ = ١ + \text{ق}'(٢) \Leftarrow \text{ق}'(٢) = ٣$

القاعدة الثانية : مشتقة حاصل ضرب اقترانين :

إذا كان ن(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س= أ، فإن :

$$(ن \times هـ)'(أ) = ن(أ) \times هـ'(أ) + هـ(أ) \times ن'(أ)$$

وبالكلمات : مشتقة حاصل ضرب اقترانين=الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني ×مشتقة الاقتران الأول

الاول		الثاني
ق(س)	×	هـ(س)
قَ(س)		هـَ(س)

مثال (٢) :اعتمد المعطيات في الجدول المجاور لإيجاد $(ن \times هـ)'(-٢)$

ن(-٢)	ن'(-٢)	هـ(-٢)	هـ'(-٢)
٥	٤-	١-	٧

مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني× مشتقة الاقتران الأول

$$ن(-٢) \times هـ'(-٢) + هـ(-٢) \times ن'(-٢) =$$
$$٥ \times ٧ + (-١) \times (-٤) =$$
$$٣٩ =$$

نشاط (٤) :إذا كان ن(س) = $(٣س^{٢} - ٥س)(٧ - ٤س)$ ، فإن ن'(٢) تساوي:

ن'(س)= الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني× مشتقة الاقتران الأول

(٣س^٢ - ٥س)	(٧ - ٤س)
٦س - ٥	-٤

$$ن'(س) = (٣س^{٢} - ٥س)(-٤) + (٧ - ٤س)(٦س - ٥)$$
$$ن'(٢) = _____$$
$$ن'(٢) = _____$$

$ق(س) = (٢س + ٣)(٣س - ٢)$ اوجد $قَ(٢)$

الاول		الثاني
(٢س + ٣)		(٣س - ٢)
٢		٣

قَ(س) = الاول × م. الثاني + الثاني × م. الاول

$$قَ(س) = ٢ \times (٣ - ٣س) + ٣ \times (٣ + ٢س)$$
$$قَ(٢) = ٢ \times (٢ - ٢ \times ٣) + ٣ \times (٣ + ٢ \times ٢)$$
$$= (٣ \times ٧) + (٢ \times ٤) = ٢١ + ٨ = \boxed{٢٩}$$

لجنة (٢٠١٦): اذا كانت ص = $(٣س - ١)^{٢}$ $\Leftarrow$ $\frac{ص}{س}|_{س=-٢}$ = فإن

القاعدة الثالثة : (مشتقة حاصل قسمة اقترانين)

قاعدة (٣) : إذا كان ن ´(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان هـ(س) ≠ ٠ ، فإن :

$$\left(\frac{ن(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{هـ(س)\times ن'(س) - ن(س)\times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$$ ، وبالكلمات :

$$\left(\frac{ن}{هـ}\right)'(س) = \frac{(\text{المقام}\times\text{م.البسط}) - (\text{البسط}\times\text{م.المقام})}{(\text{المقام})^{٢}}$$

المقـــام	البســـط
هـ(س)	م(س)
هـ(س)	م(س)

مثال (٣) :إذا كان ك(س) = $\left(\frac{ن(س)}{هـ(س)}\right)$ ، وكان :

ن(١٠) = ٢ ، ن ´(١٠) = −٣ ، هـ(١٠) = −٢ ، هـ ´(١٠) = ١٧ ، أجد ك ´(١٠) .

الحل :

$$ك'(س) = \frac{هـ(س)\times ن'(س) - ن(س)\times هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$$

$$ك'(١٠) = \frac{هـ(١٠)\times ن'(١٠) - ن(١٠)\times هـ'(١٠)}{(هـ(١٠))^{٢}}$$

$$ك'(١٠) = \frac{(-٢)\times(-٣) - (٢\times ١٧)}{٤} = \frac{-٢٨}{٤} = -٧$$

مثال (٤):إذا كان ن(س) = $\frac{٣س٤ - ٣}{٦ - ٢س}$ ، س ≠ ٣ ، أتحقق أن ن ´(١) = $\frac{٩}{٨}$.

$$ن'(س) = \frac{(\text{المقام}\times\text{م.البسط}) - (\text{البسط}\times\text{م.المقام})}{(\text{المقام})^{٢}}$$

$$ن'(س) = \frac{(٢)(٣س٤ - ٣) - (-٤)(٦ - ٢س)}{(٦ - ٢س)^{٢}}$$

$$= \frac{(٢)(-١) - (-٤)(-٤)}{(-٤)^{٢}}$$

$$= \frac{١٨}{١٦} = \frac{٩}{٨}$$

** جد المشتقة الاولى للاقتران $\text{ق}(س) = \frac{(٣س + ٢)}{(٢س - ٥)}$ ، $س \neq \frac{٥}{٢}$

المقـــام	بســـط
٢س − ٥	٣س + ٢
٢	٣

$$\text{ق}'(س) = \frac{(\text{المقام} \times \text{م.البسط}) - (\text{البسط} \times \text{م.المقام})}{(\text{المقام})^{٢}}$$

$$\text{ق}'(س) = \frac{٢ \times (٢س + ٣) - ٣ \times (٢س - ٥)}{(٢س - ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{(٦س - ١٥) - (٦س + ٤)}{(٢س - ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{(٦س - ١٥ - ٦س - ٤)}{(٢س - ٥)^{٢}} = \boxed{\frac{(-١٩)}{(٢س - ٥)^{٢}}}$$

مثال (٢) جد المشتقة الاولى للاقتران $\text{ق}(س) = \frac{(٢س - ١)}{(س^{٢} + ٤)}$ عندما س= صفر.

المقـــام	بســـط
$س^{٢} + ٤$	٢س − ١
٢س	٢

$$\text{ق}'(س) = \frac{(\text{المقام} \times \text{م.البسط}) - (\text{البسط} \times \text{م.المقام})}{(\text{المقام})^{٢}}$$

$$\text{ق}'(س) = \frac{٢س \times (س^{٢} + ٤) - ٢ \times (٢س - ١)}{(س^{٢} + ٤)^{٢}}$$

$$\text{ق}'(٠) = \frac{٠ \times ٢ \times (٠ \times ٢ - ١) - ٢ \times (٠^{٢} + ٤)}{(٠^{٢} + ٤)^{٢}}$$

$$= \frac{(٠ \times ١-) - (٢ \times ٤)}{(٤)^{٢}} = \frac{٨}{١٦} = \boxed{\frac{١}{٢}}$$

تمارين ومسائل(١-٣) ص ١٩

١) بالاعتماد على البيانات في الجدول المجاور أحسب ما يأتي :

ن(٥)	ن´(٥)	هـ(٥)	هـ´(٥)
٩	٢	٣	١-

أ) (ن + ٢هـ)´(٥)
ن´(٥) + ٢هـ´(٥) .
= ٢ + ٢(-١) = ٠

ب) (٣ن - ٤هـ)´(٥) = ٣ن´(٥) - ٤هـ´(٥)
= ٣(٢) - ٤(-١) = ٦ + ٤ = ١٠

جـ) (ن/هـ)´(٥)
= (هـ(٥)ن´(٥) - ن(٥)هـ´(٥)) / (هـ(٥))²
= ((٣×٢) - (-١×٩)) / (٣)² = ((٦) - (-٩)) / ٩
⇐ = ١٥/٩ = ٥/٣

د) (ن × هـ)´(٥)
ن(٥)هـ´(٥) + هـ(٥)ن´(٥)
= ٢×٣ + ١-×٩
= -٩ + ٦ = -٣

٢) إذا كان ن(س) = (س² + ٧) ، هـ(س) = (٢ - ٣س) ، أجد :

ن´(س) = ٢س ، هـ´(س) = -٣

أ) (ن + هـ)´(١)
ن´(١) + هـ´(١)
= ٢ - ٣ = -١

ب) (ن/هـ)´(س) = (هـ(س)ن´(س) - ن(س)هـ´(س)) / (هـ(س))²
= ((٢ - ٣س)×٢س - (س² + ٧)×-٣) / ((٢ - ٣س))²
= (٤س - ٦س² + ٣س² + ٢١) / ((٢ - ٣س))² = (-٣س² + ٤س + ٢١) / ((٢ - ٣س))²

جـ) ن´(س)/هـ´(س) = ٢س/٣- = ٢-/٣ س

(أكمال ٢٠١٩)إذا كان ن(س) = (س² + ٨) ، هـ(س) = (٢ - ٢س) ، أجد : ن´(٣)/هـ´(٣)

د) (ن × هـ)´(٢)
ن(٢)هـ´(٢) + هـ(٢)ن´(٢)
= (٢×٢)(٣×١١ - ٢) + (٤×٤-)
= ١٦×٣٣ - = ٤٩-

هـ) ن´(٢)×هـ(٢)
= (٢×٣ - ٢)×(٢×٢)
= ٤×٤ - = ١٦-

و) (ن × س²)´(-٢)
ن´(س)×(س) + ن(س)×٢س
ن´(-٢)×(-٢)² + ن(-٢)×٢(-٢)
= (٤-×١١ + ٤-×٤) = ٦٠-

(لجنة ٢٠١٨)اذا كان ن(س)،هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق بحيث

ن(٠)	ن´(٠)	هـ(٠)	هـ´(٠)
٦	٣-	٢-	٣

جد (ن/هـ)´(٠)

٣) إذا كان $(ن \times هـ)'(٧) = ١٢$ ، $ن(٧) = ٣$ ، $ن'(٧) = ٦$ ، $هـ'(٧) = ٣$ ، أجد $هـ(٧)$.

$(ن \times هـ)'(٧) = ن(٧) \times هـ'(٧) + هـ(٧) \times ن'(٧) = ١٢$

$= (٣ \times ٣) + (٦ \times هـ(٧)) =$

$= ٩ + ٦ هـ(٧) = ١٢$

$= ٦ هـ(٧) = ٣ \Leftarrow$ $\boxed{هـ(٧) = \frac{١}{٢}}$

٢٠١٩) اذا كان $ن(٧) = -٥$ ، $هـ(٧) = ٢$

$ن'(٧) = ٣$ ، $هـ'(٧) = -١ \Leftarrow$

$(٢ن \times ٣هـ)'(٧) = ؟$

٤) إذا كان $(ن \div هـ)'(٩) = ٣$ ، $ن(٩) = ٥$ ، $ن'(٩) = -١٢$ ، $هـ(٩) = -٣$ ، أجد $هـ'(٩)$.

$\left(\frac{ن}{هـ}\right)'(٩) = \frac{هـ(٩) \times ن'(٩) - ن(٩) \times هـ'(٩)}{(هـ(٩))^{٢}}$

$٣ = \frac{(-١٢ \times -٣) - (٥ \times هـ'(٩))}{(-٣)^{٢}}$

$٣ \times ٩ = ٣٦ - ٥ هـ'(٩)$

$٢٧ = ٣٦ - ٥ هـ'(٩)$

$٢٧ - ٣٦ = ٥ هـ'(٩)$

$١١ = ٥ هـ'(٩)$

$\boxed{هـ'(٩) = \frac{٩}{٥}}$

٥) إذا كان $ن(س) = ا س^{٢} + ٦ س - ٥$ ، وكان $ن'(٣) = ٠$ ، فما قيمة الثابت أ ؟

$ن(س) = ا س^{٢} + ٦ \Leftarrow ن'(س) = ٢ ا س + ٦$

$ن'(٣) = ٦ + (٣) ٢ ا = ٠$

$٦ ا + ٦ = ٠ \Leftarrow \frac{-٦}{٦} = ا \frac{٦}{٦}$ $\boxed{ا = -١}$

٢٠١٨ إكمال إذا كان $ن(س) = (ا + س)^{٢}$ ، $ع ٥$

وكان $ن'(١) = ن'(٢)$ ، فما قيمة /قيم الثابت ا ؟

٦) إذا كان $ن(س) = س^{٢} - ٢ ا س + ٣ هـ(س) = س^{٢} - ٢$ ، وكان $(ن \times هـ)'(١) = ٨$ ، أجد قيمة الثابت أ ؟

$(ن \times هـ)'(١) = (س^{٢} - ٢ ا س + ٣) \times ٢ س + (س^{٢} - ٢)(٢ س - ٢ ا)$

$(ن \times هـ)'(١) = (١ - ٢ ا + ٣) \times ٢ \times ١ + (١^{٢} - ٢)(٢ - ١ \times ٢ ا) = ٨$

$٨ = (٢ - ٢ ا)(-١) + ٢ \times (٤ - ٢ ا)$

$٨ = ٢ ا + ٢ - + ٤ ا - ٨$

$٨ = ٦ - ٢ ا$

$-٢ ا = ٢ \Leftarrow$ $\boxed{ا = -١}$

٧) إذا كان $ن(س) = \frac{ا س - ٥}{٤ س - ٦}$ ، وكان $ن'(١) = -\frac{١}{٢}$ فما قيمة الثابت ا؟.

$ن'(س) = \frac{(٤ - ٥) \times ا - (ا س - ٥) \times (٤ س - ٦)}{(٤ س - ٦)^{٢}} = \frac{-(١٤ ا س + ٢٠) - (-١٤ ا)}{(٤ س - ٦)^{٢}}$

$ن'(١) = \frac{-(١٤ ا + ٢٠) - (-١٤ ا)}{(٤ - ٦)^{٢}} = \frac{-١}{٢}$

$\frac{-١}{٢} = \frac{(-١٦ ا - ٢٠)}{٤} \Leftarrow ٤ = ٤٠ - ١١ ٢ -$

$\boxed{ا = ٣} \Leftarrow \frac{٣٦}{١٢} = ا \frac{١٢}{١٢}$

اسئلة سنوات سابقة على موضوع قواعد الاشتقاق .

(اكمال ٢٠٠٧):اذا كان $ق(س) = ٢س^{٣} + ٢$ ، $هـ(س) = س^{٢} + ٢$ ، $ق`(٢) = ٤$ فأوجد $(ق \times هـ)`(٢)$

$(ق \times هـ)`(س) = ق(س) \times ٢س + (س^{٢} + ٢) \times ق`(س)$

$(ق \times هـ)`(٢) = ق(٢) \times ٢ \times ٢ + (٢^{٢} + ٢) \times ق`(٢)$

$= (٤ \times ٣) + (٤ \times ٦) = (٤ \times ٣) + (٤ \times ٦)$

$= (١٢) + (٢٤) =$ **٣٦**

(لجنة ٢٠١٧) اذا كان $ق(٣) = -٢$ ، $ق`(٣) = ١$ وكان

$ل(س) = ق(س) \times س^{٢}$ فـإن قيمـة $ل`(٣) =$

(اكمال ٢٠٠٧):اذا كان $ق(س) = \frac{أ}{س + ٢}$ ، $ق`(٢) = ١$ فان قيمة أ تساوي.

$ق`(س) = \frac{أ \times ٠ - ١ \times أ}{(س + ٢)^{٢}}$

$ق`(٢) = \frac{أ \times ٠ - ١ \times أ}{(٢ + ٢)^{٢}} = ١$

$\frac{-أ}{١٦} = \frac{١}{١} \Leftarrow -أ = ١٦$

$\boxed{أ = -١٦ \Leftarrow}$

(لجنة ٢٠١٧) اذا كان $ن(س) \times هـ(س) = س$ حيث $ن(س)، هـ(س)$ قابلين للاشتقاق

$ن(س) \neq ٠، هـ(س) \neq ٠$ وكان $هـ`(٣) = -٢، ن(٣) = ٣$ جد $ن`(٣)$

(اكمال ٢٠١٩) اذا كان $س^{٢} \times ل(س)$ وكان $ل`(٣) = ٢، ل(٣) = \frac{-١}{٦}$ فما قيمة $ن`(٣)$

لجنة : اذا كان $ق(س) = ٢\sqrt{س} - س^{٢} \times هـ(س)$ فجد $ق`(١)$ علما بان $هـ(١) = ٢$ ، $هـ`(١) = -٣$

$ق`(س) = \frac{٢}{٢\sqrt{س}} - (س^{٢} \times هـ`(س) + هـ(س) \times ٢س)$

$ق`(١) = \frac{٢}{٢\sqrt{١}} - (١^{٢} \times هـ`(١) + هـ(١) \times ٢ \times ١) = -١ - (-٣ + ٢ \times ٢)$

$\boxed{٠} = ١ - ١ \Leftarrow$

(٢٠١٨) اذا كان $ن(س) \times هـ(س) = س$ حيث $ن(س)، هـ(س)$ قابلين للاشتقاق $ن(س) \neq ٠، هـ(س) \neq ٠$ جد $ن`(٣)$ علما بان

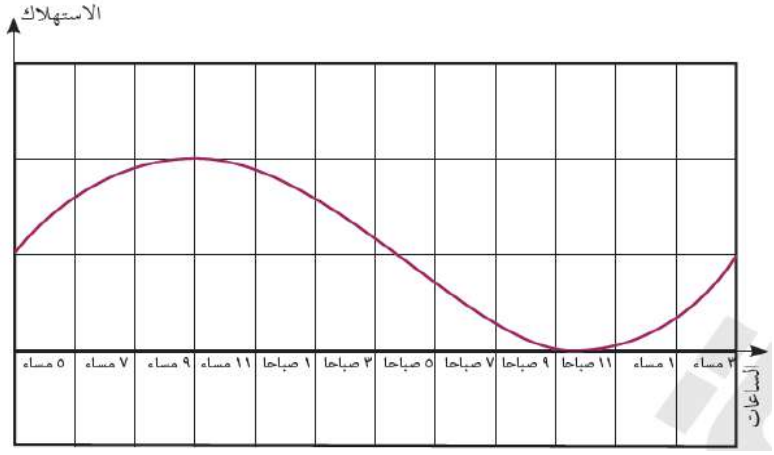
$هـ(٣) = ٦، هـ`(٣) = -٤$

(١-٤) الدرس الرابع: القيم القصوى للإقتران :

نشاط (١) :

تعد الكهرباء مطلباً أساسياً في حياة المواطنين فدونها تتعطل الكثير من الفعاليات ، ويتم رصد استهلاك الكهرباء، في فلسطين على مدار الساعة.

الشكل المجاور يوضح توزيع الأحمال اليومية من الكهرباء في منطقة القدس وضواحيها في اليوم الأول من عام ٢٠١٧ .



- لاحظ أن الأحمال تتزايد من الساعة التاسعة مساءً وحتى الساعة الثانية عشر منتصف الليل ، كذلك من الساعة السادسة صباحاً حتى الرابعة عصراً.

- تتناقص أحمال الكهرباء خلال فترة ـــــــــ .

تعريف::

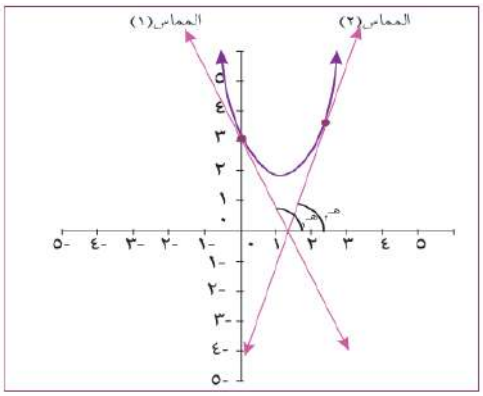
يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [أ ، ب] ، إذا كان : لكل س$_{٢}$ > س$_{١}$ ، فإن :

ق(س$_{٢}$) > ق(س$_{١}$) لأي عددين س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ∈ [أ ، ب] .

ويكون ق(س) متناقصاً على الفترة[أ،ب] ، إذا كان : لكل س$_{٢}$ > س$_{١}$ ، فإن ق(س$_{٢}$) < ق(س$_{١}$) لأي عددين س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ∈ [أ، ب]

أتذكر : يكون ميل المستقيم موجباً ، إذا صنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، ويكون الميل سالباً إذا صنع هذا المستقيم زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ملاحظة : ستقتصر الدراسة في هذا السياق على الاقترانات كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة على الأكثر.

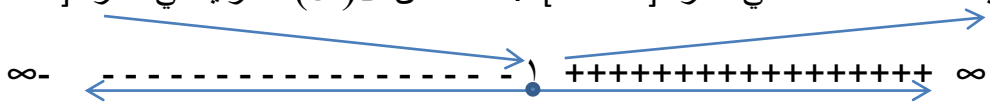


نشاط (٢) :يوضح الشكل المجاور منحنى الاقتران ك(س) = س^{٢} – ٢س + ٣ المعرف على ح.

- المماس (١) يصنع زاوية منفرجة(هـ$_{١}$) مع لاتجاه الموجب لمحور السينات، لذا فإن إشارة ميله سالبة في الفترة [-∞ ، ١].

- ألاحظ أن ك(س) متناقص في الفترة [- ∞، ١].

- المماس (٢) يصنع زاوية ـــــــ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، لذا فإن إشارة ميله ـــــــــ في الفترة [١ ، ∞] . ألاحظ أن ك(س) متزايد في الفترة [١ ، ∞] .



قاعدة : اذا كان $ن(س)$ معرفاً على الفترة[أ،ب] فان $ن(س)$ يكون:

١) يكون الاقتران $ن(س)$ متزايد في الفترة [أ،ب]، إذا كانت $ن'(س) >$ صفر في الفترة] أ،ب[.
٢) يكون الاقتران $ن(س)$ متناقصاً في الفترة [أ،ب] ، إذا كانت $ن'(س) <$ صفر في الفترة] أ،ب[.
٣) يكون الاقتران $ن(س)$ ثابتاً في الفترة [أ،ب]، إذا كانت $ن'(س) =$ صفراً في الفترة] أ،ب[.

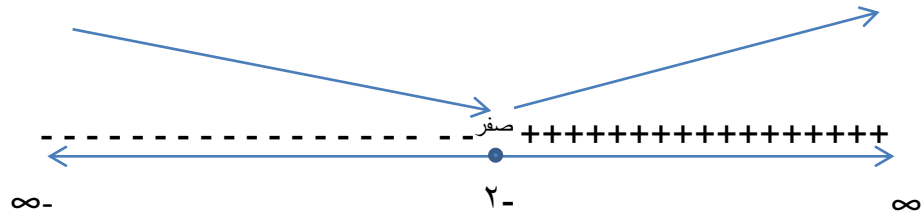
مثال (١): حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ن(س) = س^{٢} + ٤س - ٧$

الحل: أبحث في إشارة $ن'(س)$.

$ن'(س) = ٢س + ٤ = ٠$

إذن $س = -٢$

نبحث في اشارة $ن'(س)$



من اشارة $ن'(س)$ يكون الاقتران $ن(س)$ متزايداً على الفترة $[-٢، ∞[$ ، ويكون متناقصاً في الفترة $]-∞، -٢[$.

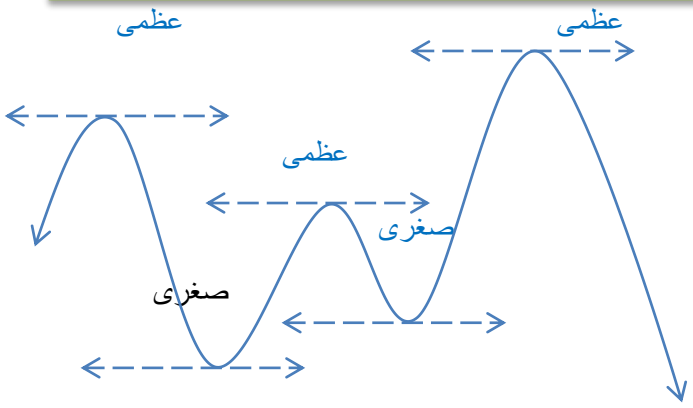
أتعلم : يكون للاقتران ق(س) المعرف على ح قيمة قصوى(عظمى او صغرى) محلية عند س =أ ، إذا كان:

١. ق´(أ) = صفراً. ٢. يغير ق(س) من سلوكه حول س = أ من التزايد إلى التناقص أو العكس.

اذا كان ق(س) اقتراناً كما هو موضح بالشكل فان

للاقتران ق(س) قيم قصوى و التي تقسم الى قسمين هما

١) العظمى المحلية : وهي القيم الاكبر على فترة معينة .
٢) والصغرى المحلية : وهي القيم التي تكومن اصغر من كل محيطها على فترة معينة .



عند القيم القصوى يجب الانتباه الى ما يلي :

١) يكون المماس افقياً
٢) ميل المماس يكون = صفر
٣) المشتقة الاولى عند القيم القصوى = صفر

مراجعة بسيطة في اشارة الاقتران مهمة جداً

اشارة الاقتران الخطي

ق(س) = أ س + ب

خطوات الحل:

١) نساوي الاقتران بالصفر
٢) نجد قيمة س .
٣) نعين قيمة س على خط الاعداد وتكون الاشارة كما يلي:

نفس عكس

م

اشارة الاقتران التربيعي

ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

وهناك حالتان سنتعرف عليهما هنا فقط دون توسع

أ) اذا كان للاقتران جدران حقيقيان مختلفان

نفس عكس نفس

اشارة (أ)

ب) اذا كان للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

نفس نفس

" يأتي السؤال عادةً على هذا الموضوع سنوياً " تحت عنوان جد القيم القصوى للاقتران" وحدد فترات التزايد والتناقص.(٥-٩علامات)

(لجنة ٢٠٠٩) جد القيم القصوى للاقتران $هـ(س) = س^{٢} - ٦س + ٥$.

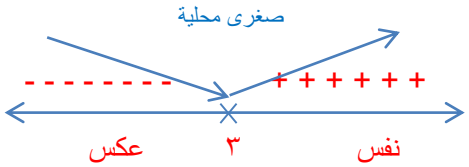
الحل: $هـ(س) = س^{٢} - ٦س + ٥$

$هـَ(س) = ٢س - ٦$

$٢س - ٦ = ٠$ فر

$\frac{٢}{٢}س = \frac{٦}{٢}$ ⇐

$س = ٣$ ⇐



يوجد للاقتران $هـ(س)$ قيمة صغرى محلية عند س = ٣ قيمتها

$هـ(٣) = ٣^{٢} - ٦ \times ٣ + ٥$

$= ٩ - ١٨ + ٥$

$= -٤$

خطوات الحل :

١) ناخذ الاقتران للترتيب

٢) نشتقه

٣) نساوي المشتقة بالميل (الميل = صفر) .

٤) نجد قيمة / قيم س.

٥) نرسم خط الاعداد ونعين عليه قيم س.

٦) نبحث في اشارة $هـَ(س)$

٧) نجد القيم القصوى وذلك بتعويض قيم س في الاقتران الاقتران الاصلي

(لجنة ٢٠١٠) جد القيم القصوى للاقتران $هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ١$.

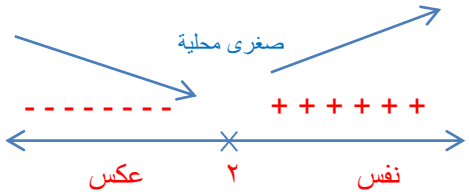
الحل: $هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ١$

$هـَ(س) = ٢س - ٤$

$٢س - ٤ = ٠$ فر

$\frac{٢}{٢}س = \frac{٤}{٢}$ ⇐

$س = ٢$ ⇐

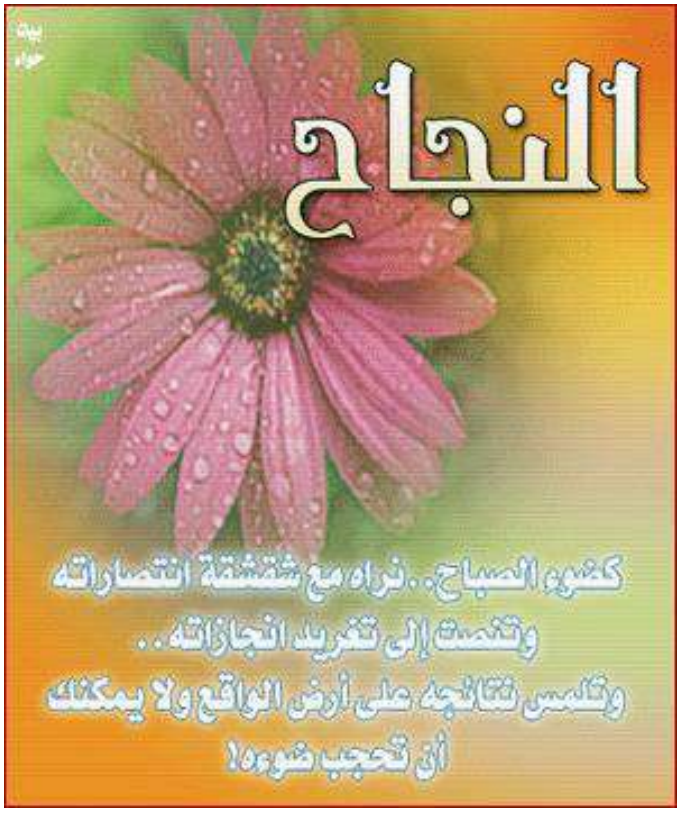


يوجد للاقتران $هـ(س)$ قيمة صغرى محلية عند س = ٣ قيمتها

$هـ(٢) = ٢^{٢} - ٤ \times ٢ + ١$

$= ٤ - ٨ + ١$

$= -٣$



(لجنة ٢٠٠٨) اذا كان $هـ(س) = س^{٣} - ٣س^{٢}$ فجد القيم القصوى للاقتران $هـ(س)$.

الحل : $هـ(س) = س^{٣} - ٣س^{٢}$

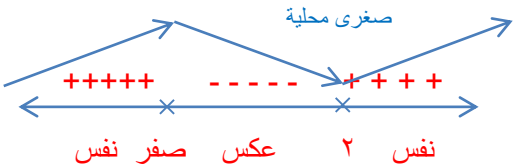
$هـ'(س) = ٣س^{٢} - ٦س$

$٣س^{٢} - ٦س = صفر$

$س(٣س - ٦) = صفر$ ⟸

اما س= صفر او ٣س-٦ = صفر ومنها س=٢

عظمى محلية



يوجد للاقتران $هـ(س)$ عظمى محلية عند س = ٠ قيمتها

$هـ(٠) = ٠^{٣} - ٣ \times ٠ = ٠$ قيمة فر

يوجد للاقتران $هـ(س)$ قيمة صغرى محلية عند س = ٢ قيمتها

$هـ(٢) = ٢^{٣} - ٣ \times ٢^{٢} = ٨ - ١٢ = -٤$

(لجنة ٢٠١٥) جد القيم القصوى للاقتران. $هـ(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣$

(لجنة ٢٠١٦) جد القيم القصوى للاقتران $هـ(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣$

(لجنة ٢٠١٨) جد القيم القصوى للاقتران $هـ(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ١$

(اكمال ٢٠١٨) جد القيم القصوى للاقتران $هـ(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢$

(لجنة ٢٠١٩) اذا كان $هـ(س) = س^{٢}(س - ٣)$ اوجد

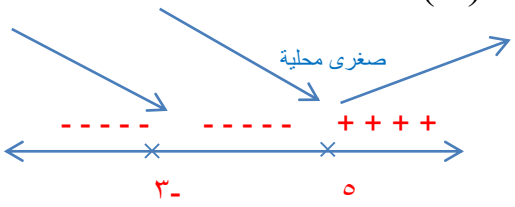
١) فترات التزايد والتناقصللاقتران ق(س) على مجاله
٢) القيم القصوى للاقتران ق(س) واحدد نوعها .

(اكمال ٢٠١٩) اذا كان $هـ(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - ٤س + ٥$ اوجد

١) فترات التزايد والتناقصللاقتران ق(س) على مجاله
٣) القيم القصوى للاقتران ق(س) واحدد نوعها .

نشاط (٣): الشكل الآتي يمثل إشارة مشتقة الاقتران هـ (س) المعرف على ح.

إشارة $هـ'(س)$



أ) $هـ'(س) =$ صفر عند س = _____ و عند س =

ب) $هـ(س)$ متناقص في الفترة _____ .

ج) $هـ(س)$ متزايد في الفترة _____ .

د) النقطة (-٣ ، ق(-٣)) لا تعتبر قيمة صغرى ، (لماذا؟)

هـ) تعتبر النقطة (٥ ، ق (٥)) قيمة _____ .

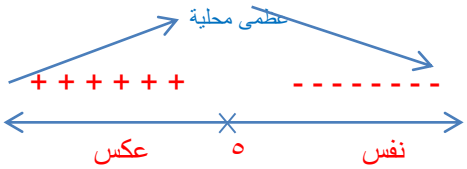
جد القيم القصوى للاقتران $\text{هـ}(س) = -س^{٣} + ١٠س + ٥$ ، $س \in ع$

$\text{هـ}'(س) = -٣س^{٢} + ١٠$

$-٣س^{٢} + ١٠ = ٠$ فر

$س^{٢} = \frac{-١٠}{-٣}$ ⇐ $س = \frac{-٢}{-٢}$ ⇐

$س = ٥$ ⇐



يوجد للاقتران $\text{هـ}(س)$ قيمة عظمى محلية عند س = ٥ قيمتها

$\text{هـ}(٥) = -(٥)^{٣} + ١٠ \times ٥ + ٥$

$= -١٢٥ + ٥٠ + ٥ = ٣٠$

ج) (لجنة ٢٠٠٨) اذا كان $\text{هـ}(س) = س^{٣} - ١٢س$ فجد القيم القصوى للاقتران $\text{هـ}(س)$.

الحل :

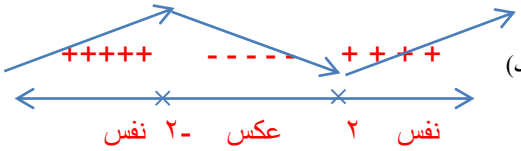
$\text{هـ}'(س) = ٣س^{٢} - ١٢$

$٣س^{٢} - ١٢$ فر ⇐

$س^{٢} = \frac{١٢}{٣}$ ⇐ $\frac{٣}{٣}س^{٢} =$ ⇐

$س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$ ⇐

اشارة $\text{هـ}'(س)$



يوجد للاقتران $\text{هـ}(س)$ عظمى محلية عند س = -٢ قيمتها

$\text{هـ}(-٢) = -(-٢)^{٣} - ١٢ \times -٢ = ٨ + ٢٤ = ١٦$

يوجد للاقتران $\text{هـ}(س)$ قيمة صغرى محلية عند س = ٢ قيمتها

$\text{هـ}(٢) = (٢)^{٣} - ١٢ \times ٢ = ٨ + ٢٤ - = -١٦$

(لجنة ٢٠١٤) جد القيم القصوى للاقتران. $\text{هـ}(س) = س^{٣} - ٣س + ١$

مثال (٢) :أجد القيم القصوى للاقتران

$\text{هـ}(س) = س^{٣} - ٢٧س$ ، $س \in ع$ ، إن وجدت.

$\text{ن}'(س) = ٣س^{٢} - ٢٧$

الحل : $٣س^{٢} - ٢٧ = ٠$

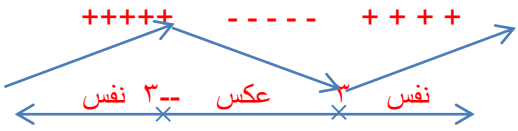
$٣س^{٢} = ٢٧$

$س^{٢} = ٩$

$س = ٣$ أو $س = -٣$ (لماذا؟)

عظمى محلية

إشارة $\text{ن}'(س)$



من إشارة $\text{ن}'(س)$ يتضح أن الاقتران $\text{ن}(س)$ غير سلوكه حول س = -٣ من التزايد إلى التناقص ، إذن ; للاقتران $\text{ن}(س)$ قيمة عظمى محلية عند ي = -٣ ، وقيمتها ق (-٣)=٥٤.

كما أن $\text{ن}(س)$ يغير سلوكه من التناقص إلى التزايد حول س= ٣ ، إذن للاقتران $\text{ن}(س)$ قيمة صغرى محلية عند س=٣ وقيمتها ق(٣)=-٥٤.

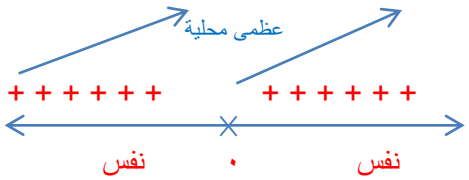
(لجنة ٢٠١٧) عين القيم القصوى للاقتران. $\text{هـ}(س) = ٢س^{٣} - ٢٤س$

$س \in ح$ ١٠ علامات

(السؤال : بين انه لا يوجد للاقتران. $ه(س) = س^{٣} - ٨$ قيم قصوى في مجاله .

$ه'(س) = ٣س^{٢}$

$\Leftarrow \frac{٣}{٣} س^{٢} = \frac{٠}{٣} \Leftarrow \boxed{س = ٠}$



الاقتران $ه(س)$ لم يغير من سلوكه على مجاله

$\Leftarrow$ لا يوجد للاقتران أي قيم قصوى في جاله.

(لجنة ٢٠١٤) عدد القيم القصوى للاقتران $ه(س) = س^{٣} - ٢٧$

اكمال (٢٠١٤) بين انه لا يوجد للاقتران. $ه(س) = ٨ - س^{٣}$ قيم قصوى محلية في مجاله .

(لجنة ٢٠١٩) عدد القيم القصوى للاقتران $ه(س) = ٢س^{٣} - ٢$

مثال :اذا كان للاقتران. $ه(س) = أس^{٢} + ٤س + ١٠$ قيمة عظمى محلية عند س =٢ جد قيمة أ.

بما ان للاقتران قيمة عظمى محلية عند س =٢ $\Leftarrow ه'(٢) = ٠$

$\Leftarrow ه'(س) = ٢أس + ٤$

$\Leftarrow ه'(٢) = ٢ \times ٢أ + ٤ = ٠$

$\Leftarrow ٤أ + ٤ = ٠ \Leftarrow ٤أ = -٤ \Leftarrow \frac{٤أ}{٤} = \frac{-٤}{٤} \Leftarrow \boxed{أ = -١}$

اذا اعطى في السؤال ان للاقتران ق(س) قيمة قصوى (عظمى او صغرى) عند س=أ فان قيمتها ب.

$\Leftarrow ه'(أ) = ٠$

$\Leftarrow ه(أ) = ب$

(وزاري ٢٠١٣) اذا كان للاقتران $ه(س) = س^{٣} - بس^{٢}$ قيمة صغرى محلية عند س=٢ جد قيمة ب ثم احسب $ه'(٣)$.

$\Leftarrow ه'(س) = ٠$

$\Leftarrow ه(س) = س^{٣} - بس^{٢}$

$\Leftarrow ه'(٢) = ٣س^{٢} - ٢بس = ٠$

$٣(٢)^{٢} - ٢ب \times ٢ = ٠ \Leftarrow ١٢ - ٤ب = ٠$

$-١٢ \quad -١٢$

$\Leftarrow \frac{-٤}{-٤} ب = \frac{-١٢}{-٤} \Leftarrow \boxed{ب = ٣}$

$\Leftarrow ه'(٣) = ٣س^{٢} - ٢ \times ٣س$

$= ٣س^{٢} - ٦س$

$ه'(٣) = ٣(٣)^{٢} - ٦ \times ٣$

$= ٩ \times ٣ - ١٨ = \boxed{٩}$

(لجنة ٢٠١٦) الاقتران $ه(س) = ٦س - س^{٢}$ له قيمة عظمى محلية تساوي:

(اكمال ٢٠١٩) اذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (-١٠ ، ٥) فما قيمة $ه'(-١٠)$

(وزاري ٢٠١٤)اذا كان للاقتران هـ(س) = س^{٣} + أس^{٢} - ٩س + ب قيمة صغرى محلية عند س = ١ تساوي ٣. جد قيمة الثابتين أ ، ب

بما ان للاقتران قيمة صغرى محلية عند س =١ ⇐ هـَ(١) = ٠

⇐ هـَ(س) = ٣س^{٢} + ٢أس - ٩

⇐ هـَ(١) = ٣(١)^{٢} + ٢أ(١) - ٩ = ٠

⇐ ٣ + ٢أ - ٩ = ٠ ⇐ ٢أ - ٦ = ٠ ⇐ $\frac{٢}{٢}$أ = $\frac{٦}{٢}$ ⇐ أ = ٣

⇐ هـ(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٩س + ب

⇐ هـ(١) = ١^{٣} + ٣ × ١^{٢} - ٩ × ١ + ب = ٣

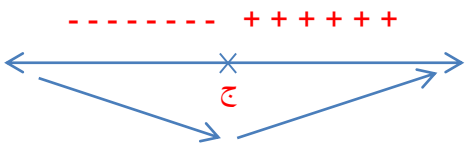
⇐ ١ + ٣ - ٩ + ب = ٣

⇐ ب = ٣ + ٥ ⇐ ب = ٨

(وزاري ٢٠١٥) اذا كان الاقتران هـ(س) = أس^{٣} + ٢س + ب وكان هـَ(١) = ٥ ويمر منحنى الاقتران هـ(س) بالنقطة (٢ ، -٣) فما قيم الثابتين أ ، ب .

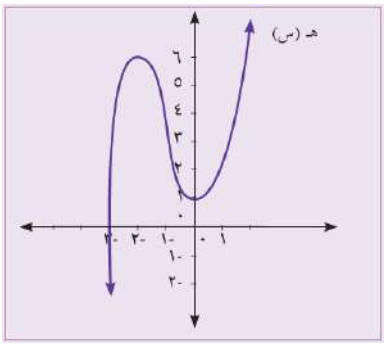
(وزاري ٢٠١٦) اذا كان للاقتران هـ(س) = أس^{٢} – ٤س + ب قيمة صغرى محلية عند س= ٢ وكان هـ(٢) = ٠ فما قيم الثابتين أ ، ب .

(لجنة ٢٠١٨) فاذا كان هـ(س) = س^{٢} – بس + ٢ وكانت اشارة هـَ(س) كما في الشكل المجاور، فأوجد قيمة الثابتين ب، جـ علما بان هـ(١) = –٤



تمارين ومسائل(١-٥)ص٢٩:

١) أجد القيم العظمى والصغرى للاقتران هـ(س) المرسوم في الشكل المجاور.



*الاقتران هـ(س) متزايد في الفترة $(-\infty،-٢]$ ومتناقص على الفترة $[-٢،٠]$

وبالتالي فان للاقتران هـ(س) قيمة عظمة محليةعند س=-٢ قيمتها هـ(-٢)=٦

*الاقتران هـ(س) ومتناقص على الفترة $[-٢،٠]$متزايد في الفترة $[٠،\infty)$

وبالتالي فان للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية عند س=٠ قيمتها هـ(٠)=١

٢) إذا كان $ن(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ١$

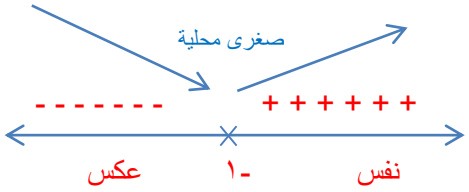
أ) فما فترات التزايد والتناقص للاقتران على ح ؟

ب) ما القيم القصوى للاقتران ، وما نوع كل منها ؟

$ن(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ١$

$ن'(س) = ٦س + ٦ = ٠$

$٦س = -٦ \Leftarrow \boxed{س = -١}$



$ن(س)$ متناقص على الفترة $(-\infty،-١]$ لان $ن'(س) < ٠$

$ن(س)$ متزايد على الفترة $[-١،\infty)$ لان $ن'(س) > ٠$

للاقتران $ن(س)$قيمة صغرى محلية عند س= -١ قيمتها

$ن(-١) = ٣(-١)^{٢} + ٦(-١) - ١$

$\boxed{-٤} = ١ - ٦ - ٣$

٣) ما قيمة الثابت جـ في الاقتران $ن(س) = ٥ - جـس - س^{٢}$ ، التي تجعل $ن(٢)$ قيمة عظمى محلية ؟

بما ان للاقتران قيمة عظمة محلية عند س=٢ هذا يعني ان $ن'(٢) = ٠$

$ن'(س) = -جـ - ٢س$

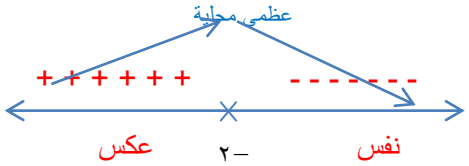
$ن'(٢) = -جـ - ٢(٢) = ٠$

$-جـ - ٤ = ٠$

$-جـ = ٤ \Leftarrow \boxed{جـ = -٤}$

٤) ما فترات التزايد والتناقص للاقتران $ن(س) = (س + ٢) \times (-٢س - ٤)$.

$ن'(س) = ((س + ٢) \times -٢ + (-٢س - ٤) \times ١)$
$= (-٢س - ٤ + -٢س - ٤)$
$ن'(س) = -٤س - ٨$
$-٤س - ٨ = ٠ \Leftarrow$ $\boxed{س = -٢}$



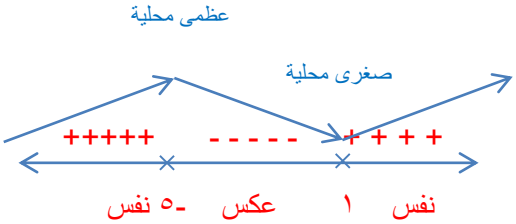
$ن(س)$ متزايد على الفترة $(-\infty، -٢]$ لان $ن'(س) > ٠$

$ن(س)$ متناقص على الفترة $[-٢، \infty)$ لان $ن'(س) < ٠$

٥) أ) أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ك(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س - ٥$ المعرف على ح .

ب) ما القيم القصوى لاقتران $ك(س)$ ؟ وما نوع كل منها ؟

$ك'(س) = س^{٢} + ٤س - ٥ = ٠$
$(س + ٥)(س - ١) = ٠ \Leftarrow$ $\boxed{س = -٥، س = ١}$



$ن(س)$ متزايد على الفترة $(-\infty، -٥]$ لان $ن'(س) > ٠$.

$ن(س)$ متزايد على الفترة $[١، \infty)$ لان $ن'(س) > ٠$

$ن(س)$ متناقص على الفترة $[-٥، ١]$ لان $ن'(س) < ٠$.

للاقتران $ن(س)$ قيمة صغرى محلية عند س= ١ قيمتها

$ك(١) = \frac{١}{٣}(١)^{٣} + ٢(١)^{٢} - ٥(١) - ٥$

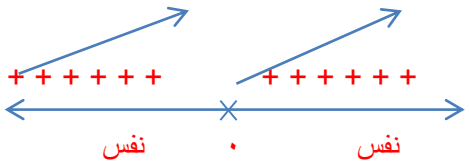
$\boxed{٧\frac{٢}{٣}} = ٥ - ٥ - ٢ + \frac{١}{٣}$

للاقتران $ن(س)$ قيمة عظمى محلية عند س= -٥ قيمتها

$ك(-٥) = \frac{١}{٣}(-٥)^{٣} + ٢(-٥)^{٢} - ٥(-٥) - ٥$

٦) أثبت أنه لا يوجد للاقتران $ع(س) = ٢س^{٣} + ٢$ قيم قصوى في مجاله.

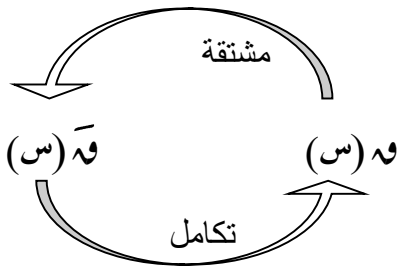
$ق'(س) = ٦س^{٢}$
$\Leftarrow \frac{٦}{٦}س^{٢} = \frac{٠}{٦} \Leftarrow$ $\boxed{س = ٠}$



لم يغير الاقتران من اشارته لذلك ليس له أي قيم قصوى على مجاله

الدرس الخامس : (١-٥) التكامل غير المحدود

تعرفنا سابقا في في الدروس السابقة على مفهوم التفاضل حيث ان مشتقه الاقتران ق(س) هي قَ(س) وسنتعرف في هذا الدرس على العملية العكسية للمشتقة فاذا اعطى قَ(س) كيف نجد الاقتران الاصلي ق(س)؟



نشاط (٢) اذا كان ق(س) اقترانا ، حيث ان مشتقته قَ(س) = ٢س فان قاعدة الاقتران ق(س) يمكن ان تكون

اذا كان قَ(س) = ٢س

ق(س) = س^{٢} ⟸

ق(س) = س^{٢} − ٥ ⟸

ق(س) = س^{٢} + ١ ⟸

ق(س) = س^{٢} + جـ ⟸

ق(س) = س^{٢} + ٧ ⟸

ق(س) = س^{٢} + π ⟸

مثال (٢) اذا كان قَ(س) = ٣س^{٢} اوجد ق(س) الذي مشتقته ٣س^{٢}

ق(س) = س^{٣} ⟸

ق(س) = س^{٣} + ١ ⟸

ق(س) = س^{٣} − ٤ ⟸

ق(س) = س^{٣} + ٧ ⟸

ق(س) = س^{٣} + π ⟸

ق(س) = س^{٣} + جـ ⟸

تعريف: اذا كان ق(س) اقترانا، مشتقته الاولى قَ(س) فأن التكامل غير المحدود للاقتران قَ(س) بالنسبة لـ س هو الاقتران ق(س) + عدد ثابت و بالرموز

$$\int قَ(س)\,د س = ق(س) + جـ$$

ثابت التكامل ←

اكمل الفراغ فيما يلي :

أ) اذا كانت مشتقه الاقتران ٥س^{٢} هي ١٠ س فإن

$$\int (١٠\,س)\,د س = ٥س^{٢} + جـ$$

ب) اذا كانت مشتقه (س^{٣} + ٢س) بالنسبه لـ س هي ٣ س^{٢} + ٢ فأن

$$\int (٣س^{٢} + ٢)\,د س = س^{٣} + ٢س + جـ$$

(للتأكد من صحة التكامل :نشتق الناتج يجب ان يساوي ما بداخل التكامل).

*ملاحظة مهمه جدا (مشتقه التكامل غير المحدود =ما بداخل التكامل).

مثال (١) اذا كانت قَ(س)= ∫(٣س - ٢)دس اوجد قَ(س)

قَ(س) = ٣س − ٢

مثال (٢) اذا كانت ص= ∫(س ٣ + ٤س + ٢)دس اوجد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = س ٣ + ٤س + ٢ ⟸

مثال (٣)اذا كان قَ(س) = ∫(٢س + ٤) دس اوجد قَ(٣)

قَ(س) = ٢س + ٤

قَ(٣) = ٢ × ٣ + ٤ = ١٠

مثال (٤) اذا كان مَ(س)= ∫($\frac{٤}{س^{٢}}$ + ٢س)دس اوجد مَ(٢)

الحل: مَ(س) = $\frac{٤}{س^{٢}}$ + ٢س

مَ (٢)= $\frac{٤}{٢^{٢}}$ + ٢×٢ = $\frac{٤}{٤}$ + ٤ = ١ + ٤ = ٥

(اكمال ٢٠١٩) اذا كان كَ(س) = ∫(٢س ٣ +جـ) دس، وكان كَ(−١) = ٥ فما قمة جـ؟

لجنه (٢٠٠٩) اذا كان ق(س) = ∫(٢س^{٢} − ٣)دس فأن ق(٢) =

ق(س) = ٢س^{٢} − ٣

ق(٢) = ٢(٢)^{٢} − ٣ = ٨ − ٣ = [٥]

وزاري (٢٠١٠) اذا كانت ص= ∫(١/٣ س^{٣})دس فأن د ص/د س

⟸ د ص/د س = ١/٣ س^{٣}

اذا كانت ص= ∫س(٤س − ٢)دس فأن د ص/د س =

د ص/د س = س(٤س − ٢)

= ٤س^{٢} − ٢س

(٢٠١٦)اذا علمت ان

ق(س)=∫(−س^{٢} + ٥س + ١)دس ، فان ق(١)

وزاري ٢٠١٠): اذا كان ∫ق(س)دس = س^{٣} + ٢س + جـ، جد ق(٢)

الحل:

ق(س) = س^{٣} + ٢س + جـ

ق(س) = ٣س^{٢} + ٢

ق(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٢

ق(٢) = ٣×٤ + ٢ = [١٤]

٢٠١٥:اذا كان

∫ق(س)دس = س^{٤} − ٦س^{٢} + ٨، جد ق(٢)

اكمال ٢٠١٣ : اذا كان ∫ق(س)دس = ٣س^{٢} − ٥س + جـ اذا كان ∫ق(س)دس = ٣س^{٣} − ٢س^{٢} + جـ

فان ق(٢)

فان ق(٢)

(٢٠١٧) اذا كان ص= ∫(٤س^{٣} + ١)دس فان د ص/د س =

قواعد التكامل غير المحدود

: لقد تعرفنا في الدروس السابقة على التفاضل وكيفيه ايجاد المشتقة لأي اقتران ق(س) وسنتعرف في الدروس القادمة على مجموعه من القواعد العكسية التي تمكننا من ايجاد الاقتران الاصلي للمشتقة واليك القواعد .

القاعدة الاولى : اذا كان ق(س) = ﻫ ﻫ ∋ ح فأن ⌠ ﻫ دس = ﻫ س + جـ

امثلة

١) ⌠ ٩ دس = ٩س+جـ

٢) ⌠ ٧ دس = ٧س+جـ

٣) ⌠ −٥ دس = −٥س+جـ

٤) ⌠ $\frac{١}{٢}$ دص = $\frac{١}{٢}$ ص+جـ

٥) ⌠ π دنـ = π نـ+جـ

٦) ⌠ $\sqrt{٧}$ دس = $\sqrt{٧}$ س+جـ

⌠ π $س^{٢}$ دس = (٢٠١٦)

القاعدة الثانية : ⌠ $س^{ن}$ دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ +جـ

١) ⌠ $س^{٣}$ دس = $\frac{س^{٣+١}}{٣+١}$ +جـ = $\frac{س^{٤}}{٤}$ +جـ

٢) ⌠ $س^{٥}$ دس = $\frac{س^{٦}}{٦}$ +جـ

٣) ⌠ $س^{٧}$ دس = $\frac{س^{٨}}{٨}$ +جـ

٤) ⌠ $س^{-٣}$ دس = $\frac{س^{-٢}}{-٢}$ +جـ

٥) ⌠ $س^{-٧}$ دس = $\frac{س^{-٦}}{-٦}$ +جـ

٦) ⌠ $\frac{١}{س^{٣}}$ دس = ⌠ $س^{-٣}$ دس

= $\frac{س^{-٢}}{-٢}$ +جـ = $\frac{-١}{٢س^{٢}}$ +جـ

قائمة الاعداد

(١) $\frac{١}{س^{ن}}$ = $س^{-ن}$

(٢) $\sqrt[ن]{س^{ن}}$ = $س^{\frac{ن}{ن}}$

اذا وجد أحد الاعداء بالمسألة نقوم بما يلي

١- تهيئه ٢- تكامل ٣- تبسيط

يجب ان لا تحتوي الاجابة على قوى سالبة او كسرية وان وجد نرجعها الى أصلها

١- القوى السالبة ← المقام

٢- القوى الكسرية ← الجذر ← جذر بالمقام

تكامل القوى الكسرية

- نبتعد قليلا ثم نضع المتغير
- نجمع بسط القوة +مقامها وتوضع كقوة جديدة
- نقلب القوة الجديدة في الفراغ
- نجمع ج ثم نرجعها الى الجذر

٧) $\int \frac{١}{س^{٥}}\,ds = \int س^{-٥}\,ds = \frac{س^{-٤}}{-٤} + ج = \frac{-١}{٤س^{٤}} + ج$

٨) $\int \frac{١}{س^{٧}}\,ds = \int س^{-٧}\,ds = \frac{س^{-٦}}{-٦} + ج = \frac{-١}{٦س^{٦}} + ج$

٩) $\int س^{\frac{١}{٢}}\,ds = \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + ج = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ج$

١٠) $\int س^{\frac{٣}{٥}}\,ds = \frac{٥}{٨}س^{\frac{٨}{٥}} + ج = \frac{٥}{٨}س^{٨}\sqrt[٥]{س^{٣}} + ج$

١١) $\int \sqrt{س}\,ds = \int س^{\frac{١}{٢}}\,ds = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + ج$

١٢) $\int \sqrt[٣]{س^{٢}}\,ds = \int س^{\frac{٢}{٣}}\,ds = \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} + ج = \frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{س^{٥}} + ج$

١٣) $\int \sqrt[٣]{س^{٥}}\,ds = \int س^{\frac{٥}{٣}}\,ds = \frac{٣}{٨}س^{\frac{٨}{٣}} + ج = \frac{٣}{٨}\sqrt[٣]{س^{٨}} + ج$

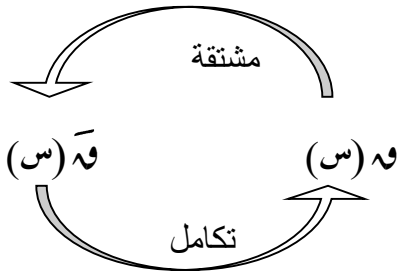
١٤) $\int \sqrt{س^{٧}}\,ds = \int س^{\frac{٧}{٢}}\,ds = \frac{٢}{٩}س^{\frac{٩}{٢}} + ج = \frac{٢}{٩}\sqrt{س^{٩}} + ج$

١٥) $\int \frac{١}{\sqrt{س}}\,ds = \int \frac{١}{س^{\frac{١}{٢}}}\,ds = \int س^{\frac{-١}{٢}}\,ds = \frac{٢}{١}س^{\frac{١}{٢}} + ج = ٢\sqrt{س} + ج$

١٦) $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\,ds = \int \frac{١}{س^{\frac{٢}{٣}}}\,ds = \int س^{\frac{-٢}{٣}}\,ds$

$= \frac{٣}{١}س^{\frac{١}{٣}} + ج = ٣\sqrt[٣]{س} + ج$

ايجاد قاعدة الاقتران ق(س) اذا علم ميل المماس لمنحنى الاقتران ونقطة عليه



اذا اعطى في السؤال ق(س) وطلب معادله المماس ←نستخدم المشتقة ق َ(س)

اما اذا اعطى في السؤال ق َ(س)وطلب ق(س) ← نستخدم التكامل حيث

$$ق(س) = \int ق َ(س)\,د س$$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطي بالقاعدة

ق َ(س) = ٢س فأوجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأنه يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

الحل:

$$ق(س) = \int ق َ(س)\,د س$$
$$= \int ٢س\,د س$$
$$= \frac{٢س^{٢}}{٢} + جـ$$
$$ق(س) = س^{٢} + جـ$$
$$ق(٠) = (٠)^{٢} + جـ = ٣$$
$$\Leftarrow \boxed{جـ = ٣}$$
$$ق(س) = س^{٢} + ٣$$

- اعطى ق َ(س)وطلب ق(س) ← نستخدم التكامل

واليك خطوات الحل

(١) نكتب القانون

(٢) نعوض ق َ(س) من السؤال في القانون

(٣) نجري عمليه التكامل

(٤) نجد قيمة جـ حيث ق(س)= ص " نعوض قيمة س من النقطة بالاقتران تساوي ص

(٥) نعوض جـ التي حصلنا عليها مكانها في الاقتران ق(س)

نشاط (٥) أوجد قاعدة الاقتران ق(س) الذي مشتقته ق'(س) = $\sqrt[4]{س^{3}}$ علماً بأن ق(١) = ١

ق(س) = ∫ ق'(س) ءس

= ∫ $\sqrt[4]{س^{3}}$ ءس = ∫ $س^{\frac{3}{4}}$ ءس = $\frac{4}{7}$ $س^{\frac{7}{4}}$ + جـ

ق(١) = $\frac{4}{7}$ (١) $^{\frac{7}{4}}$ + جـ = ١ ⇐ جـ = $\frac{3}{7}$

⇐ ق(س) = $\sqrt[4]{س^{7}}$ + $\frac{3}{7}$

(اكمال ٢٠١٧) اذا كان ميل المماس عند اي نقطة عليه يعطى بالعلاقة ق'(س) = ٢ – ٣س ^{٢} جد قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن ق(١)= ٣

اكمال (٢٠٠٨) اذا كان ميل المماس للاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطي بالعلاقة

ق'(س) =٢س– ١ فجد قاعدة ق(س) علماً الاقتران يمر بالنقطة (١ ، ٤)

ق(س) = ∫ ق'(س) ءس

= ∫ (٢س– ١)ءس = $\frac{٢س^{٢}}{٢}$ – س+جـ

ق(س) = $س^{٢}$ – س+جـ

ق(١) = $(١)^{٢}$ – ١+جـ = ٤

⇐ جـ = ٤

ق(س) = $س^{٢}$ – س + ٤

الاقتران يمر بالنقطة (١ ، ٤)

أي ان ق(١) = ٤

(لجنة٢٠١١) اذا كانت ق'(س) = $س^{٢}$ + ٤س + ٤ جد قاعدة ق(١) = ٤علماً بأنه يمر نقطة الاصل .

ن(س) = ∫ ق'(س) ءس

= ∫ ($س^{٢}$ + ٤س + ٤) ءس

⇐ ق(س) = $\frac{س^{٣}}{٣}$ – $\frac{٤س^{٢}}{٢}$ + ٤س+جـ

ق(س) = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ٢$س^{٢}$ + ٤س+جـ

⇐ ق(٠) = $\frac{(٠)^{٣}}{٣}$ + ٢$(٠)^{٢}$ + ٤ × ٠ +جـ = ٠

جـ = ٠

⇐ ق(س) = $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ٢$س^{٢}$ + ٤س

عندما يذكر بالسؤال نقطة الاصل

أي النقطة (٠ ، ٠)

أي ان

ق(٠) = ٠

⇐جـ = ٠

(لجنة ٢٠١٨) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند اي نقطة عليه يعطى بالعلاقة ق'(س) = ٦س – ٨ جد قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن ق(٢)= ٥

القاعدة الثالثة : $\int$ ا ق(س) ص س = ا $\int$ ق(س) ص س

(١) $\int$ ٦س^{٢} ص س = ٦ $\int$ س^{٢} ص س = ٦ × $\frac{س^{٣}}{٣}$ + جـ = ٢س^{٣} + جـ

(٢) $\int$ ٤س^{٣} ص س = ٤ × $\frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ = س^{٤} + جـ

(٣) $\int$ ٢س ص س = ٢ × $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ = س^{٢} + جـ

(٤) $\int$ ٥س^{٣} ص س = $\frac{٥س^{٤}}{٤}$ + جـ

(٥) $\int$ $\frac{٣}{س^{٤}}$ ص س = $\int$ ٣س$^{-٤}$ ص س = $\frac{٣س^{-٣}}{-٣}$ + جـ = $\frac{-١}{س^{٣}}$ + جـ

(٦) $\int$ $\frac{٥}{س^{٣}}$ ص س = $\int$ ٥س$^{-٣}$ ص س = $\frac{٥س^{-٢}}{-٢}$ + جـ = $\frac{-٥}{٢س^{٢}}$ + جـ

(٧) $\int$ $\frac{٣}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ ص س = $\int$ ٣س$^{-\frac{٢}{٣}}$ ص س = ٣ × $\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{٣}{٣}}$ + جـ = ٥ $\sqrt[٣]{س^{٣}}$ + جـ

القاعدة الرابعة : $\int$ (ق(س)+هـ(س)) ص س = $\int$ ق(س) ص س + $\int$ هـ(س) ص س

(١) $\int$ (س^{٣} + س) ص س = $\int$ س^{٣} ص س + $\int$ س ص س

= $\frac{س^{٤}}{٤}$ + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ

(اكمال ٢٠١٤) $\int$ (س^{٣} − $\frac{٦}{س^{٤}}$) ص س =

---

(٢) $\int$ (٥س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢س^{١} + ٢) ص س = $\frac{٥س^{٥}}{٥}$ + $\frac{٣س^{٣}}{٣}$ + $\frac{٢س^{٢}}{٢}$ + ٢س + جـ

= س^{٥} + س^{٣} + س^{٢} + ٢س + جـ

---

(٣) وزاري ٢٠٠٨

$\int$ (س^{٣} − $\frac{٦}{س^{٢}}$) ص س = $\int$ (س^{٣} − ٦س$^{-٢}$) ص س

= $\frac{س^{٤}}{٤}$ − $\frac{٦س^{-١}}{-١}$ + جـ = $\frac{س^{٤}}{٤}$ + $\frac{٦}{س^{١}}$ + جـ

نشاط (٦)

$\int$ (س$^{-٣}$ + س$^{-٥}$) ص س = $\frac{س^{-٢}}{-٢}$ + $\frac{س^{-٤}}{-٤}$ + جـ

= $\frac{-١}{٢س^{٢}}$ + $\frac{-١}{٤س^{٤}}$ + جـ

(٤) $\int (س^{٤} - س^{\frac{١}{٢}})$ د س $= \int (س^{٤} - \sqrt{س})$ د س

$= \frac{س^{٥}}{٥} - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{س^{٥}}{٥} - \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + ج$

---

(٥) $\int (\frac{٢}{س^{٣}} + \sqrt[٥]{س^{٢}})$ د س $= \int (٢س^{-٣} + س^{\frac{١}{٥}})$ د س

$= \frac{٢س^{-٢}}{-٢} + \frac{٥}{٦} س^{\frac{٦}{٥}} + ج = \frac{-١}{س^{٢}} + \frac{٥}{٦} \sqrt[٥]{س^{٦}} + ج$

---

(٦) $\int (\frac{٣}{\sqrt{س^{٣}}} + \frac{٣}{س^{٥}})$ د س $= \int (٣س^{\frac{٣}{٢}} + ٣س^{-٥})$ د س

$= \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{-٣}{٤س^{٤}} + ج = \frac{٢}{٥} \sqrt{س^{٥}} + ج$

اكمال (٢٠١٦) $\int (س^{-٤} + ٣)$ د س $=$

(٢٠١٦) $\int \frac{٥}{س^{٢}}$ د س $=$

تمارين ومسائل [١-٦] ص٣٥

١) احسب كلا من التكاملات الاتية :

أ) $\int (٣س^{٢} + ٤س - ٥)\,دس$

$= \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{٤س^{٢}}{٢} - ٥س + جـ$

$= س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س + جـ$

ب) $\int س^{\frac{٢}{٥}}\,دس =$

$= \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

$\frac{٥}{٧} \sqrt[٥]{س^{٧}} + جـ$

جـ) $\int \sqrt[٧]{س}\,دس = \int س^{\frac{١}{٧}}\,دس$

$= \frac{٧}{٨} س^{\frac{٨}{٧}} + جـ = \frac{٧}{٨} \sqrt[٧]{س^{٨}} + جـ$

د) $\int (٦س^{-٤} + \frac{٢}{٥س^{٢}})\,دس$

$= \int (٦س^{-٤} + \frac{٢}{٥} س^{-٢})\,دس$

$= \frac{٦س^{-٣}}{-٣} + \frac{٢س^{-١}}{-١ \times ٥} + جـ = \frac{-٢}{س^{٣}} - \frac{٢}{٥س} + جـ$

و) $\int (٥٦س^{٣} + ٧س^{٢} + ٣س)\,دس$

$= \frac{٥٦س^{٤}}{٤} + \frac{٧س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + جـ$

و) $\int (٥)^{٤٠٠٢}\,دس$

$= (٥)^{٤٠٠٢} س + جـ$

٢) اذا كان ن(س) $= \int (س^{٥} - ٤س^{٣} + ٨)\,دس$ = اجد نَ(١)

تذكر:

مشتقة التكامل غير المحدود تساوي ما بداخل التكامل

$نَ(س) = (س^{٥} - ٤س^{٣} + ٨)$

$نَ(١) = ((١)^{٥} - ٤(١)^{٣} + ٨)$

$= (١ - ٤ + ٨) =$ ٥

تذكر:

للتخلص من التكامل نشتق الطرفين

٣) اذا كان $\int نَ(س)\,دس = (٣س^{٢} + ٢س + جـ)$ اجد نَ(سـ)

$\int نَ(س)\,دس = (٣س^{٢} + ٢س + جـ)$

$نَ(س) = ٦س + ٢$

٤) اذا كان ص $= \int (س^{٢} + ٣)\,دس$ اجد $\frac{دص}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = س^{٢} + ٣$

الدرس السادس (١-٦) : التكامل المحدود

اولاً : التكامل المحدود .

تذكر : لقد درسنا في الدرس السابق موضوع التكامل غير المحدود وتعرفنا على قواعد ايجاده وانطلاقا من ذلك سنتعرف على التكامل المحدود فقد كان لدينا

$\int ق'(س)\,د س = ق(س)+جـ$ ← تكامل غير محدود

تعريف التكامل المحدود : اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق ، فان

$\int_{أ}^{ب} ق'(س)\,د س = ق(س)\Big|_{أ}^{ب}$

$= ق(ب) - ق(أ)$ ← تكامل محدود من أ الى ب

مثال (١) اوجد كلاً من التكاملات الاتية:

(١) $\int (٢س+٥)\,د س = \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٥س + جـ = س^{٢} + ٥س + جـ$

(٢) $\int_{٠}^{٢} (٢س+٥)\,د س = \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٥س\Big|_{٠}^{٢} = س^{٢} + ٥س\Big|_{٠}^{٢}$

$= (٢^{٢} + ٥\times٢) - (٠^{٢} + ٥\times٠)$

$= (٤ + ١٠) - (٠) = ١٤ - ٠ = \boxed{١٤}$

---

(٣) $\int_{-١}^{١} (٦س^{٢} - ٧)\,د س = \frac{٦س^{٣}}{٣} - ٧س\Big|_{-١}^{١} = ٢س^{٣} - ٧س\Big|_{-١}^{١}$

$= (٢\times١^{٣} - ٧\times١) - (٢\times(-١)^{٣} - ٧\times(-١))$

$= (٢-٧) - (-٢+٧)$

$= -٥ - ٥ = \boxed{-١٠}$

---

(٤) $\int_{١}^{٨} (\sqrt[٣]{س} + ٢)\,د س$

$= \int_{١}^{٨} (س^{\frac{١}{٣}} + ٢)\,د س$

$= (\frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} + ٢س)\Big|_{١}^{٨} = (\frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{س^{٤}} + ٢س)\Big|_{١}^{٨}$

$= (\frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{٨^{٤}} + ٢\times٨) - (\frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{١^{٤}} + ٢\times١)$

$= (\frac{٣}{٤}\times٢^{٤} + ١٦) - (\frac{٣}{٤}\times١^{٤} + ٢)$

$= (١٢ + ١٦) - (\frac{٣}{٤} + ٢) = ٢٨ - (٢,٧٥)$

$= \boxed{٢٥,٢٥}$

(٥) أ) $ص = \int_{٢}^{٤} ٨س - ٧ ؤس$

$\leftarrow ص = \frac{٨س^{٢}}{٢} - ٧س \Big|_{٢}^{٤} = ٤س^{٢} - ٧س \Big|_{٢}^{٤}$

$= (٤)٤^{٢} - ٧ \times ٤) - (٢)٤^{٢} - ٧ \times ٢)$

$= (١٦ \times ٤) - ٢٨) - (٤ \times ٤ - ١٤)$

$= (٦٤ - ٢٨) - (١٦ - ١٤)$

$= ٣٦ - ٢ = \boxed{٣٤}$

$\leftarrow \boxed{ص = ٣٤}$

ب) اوجد $\frac{ؤص}{ؤس}$

$\frac{ؤص}{ؤس}$ = صفر ماذا تلاحظ

- مشتقه التكامل غير المحدود = ما بداخل التكامل
- مشتقه التكامل المحدود = صفر دائما

(٢٠١٥لجنة) احسب $\int_{-٣}^{-١} (\frac{٣}{س^{٢}} - ٦س + ٢) ؤس$

٢٠١٩لجنة) اوجد قيمة $\int_{١}^{٤} (١ - \frac{٢}{\sqrt{س}}) ؤس$

مثال مهم جداً : اوجد $\frac{ؤص}{ؤس}$ في كل مما يلي :

(١) $ص = \int \frac{٣س - ٢}{٢س - ١} ؤس \leftarrow \frac{ؤص}{ؤس} = \frac{٣س - ٢}{٢س + ١}$

---

(٢) $ص = \int_{١}^{٣} ٢س(٤س - ٢) ؤس \leftarrow \frac{ؤص}{ؤس} = ٠$

---

(٣) $ص = \int ٢س^{٢} + ١ ؤس - \int_{١}^{٤} ٣س + ٥ ؤس$

$\Leftarrow \frac{ؤص}{ؤس} = ٢س + ١ - ٠$

$= ٢س + ١$

---

(٤) $ص = \int_{١}^{٣} ٢س + ٤ ؤس + \int (٥س + ٢) ؤس - ٧س^{٢}$

$\Leftarrow \frac{ؤص}{ؤس} = ٠ + ٥س + ٢ - ١٤س$

$= -٩س + ٢$

---

٥) $ص = س^{-٢} - \int_{١}^{٤} \frac{٣}{س} + ٥س ؤس$

$\Leftarrow \frac{ؤص}{ؤس} = ٠ - ٢س = -٢س$

اكمال(٢٠١٧) اذا كان

$ن(س) = س^{٤} + \int ٣س^{٢} ؤس$ فان قيمة $ن(١)$

لجنة(٢٠١٩) اذا كان $ص = س^{٣} + \int (٦س^{٢} + ٤) ؤس$ فان قيمة $\frac{ؤص}{ؤس}$ تساوي:

سنتعرض في الصفحات الاتية الى ثلاث افكار هامة يجب التركيز عليها لأهميتها في الامتحانات :

الفكرة الاولى : اذا كان التكامل المحدود يحتوي على مجاهيل

اذا كان $\int_{١}^{أ} ٢س\,ءس = ٨$ فجد قيمة الثابت أ.

$$\frac{٢س^{٢}}{٢}\Big|_{١}^{أ} = ٨ \Leftarrow س^{٢}\Big|_{١}^{أ} = ٨$$
$$\Leftarrow (أ^{٢}) - (١^{٢}) = ٨ \Leftarrow أ^{٢} - ١ = ٨$$
$$\Leftarrow \sqrt{أ^{٢}} = \sqrt{٩} \Leftarrow \boxed{أ = \pm ٣}$$

(لجنة ٢٠١٨) جد قيمة / قيم جـ التي تجعل $\int_{٩}^{٤} \frac{جـ}{\sqrt{س}}\,ءس = -٤$

الفكرة الثانية : اذا أعطى قيم الحدود وطلب التكامل المحدود

مثال (٢) اذا كان $ق'(س)$ هي مشتقه ق(س) وكان ق(-١) = ٥، ق(٢)= ٧ فجد قيمة $\int_{-١}^{٢} ٢ق'(س)\,ءس$

الحل :

$$\int_{-١}^{٢} ٢ق'(س)\,ءس = ٢(ق(س)\Big|_{-١}^{٢})$$
$$= ٢(ق(٢) - ق(-١))$$
$$= ٢(٧ - ٥)$$
$$= \boxed{٤}$$

(لجنة ٢٠١٩) اذا كان ق(٧) = ٨، ق(٥)= -٢ فجد قيمة $\int_{٥}^{٧} ٢ق'(س)\,ءس$

الفكرة الثالثة : اذا أعطى قيمة التكامل غير المحدود وطلب التكامل المحدود

اذا كان $\int ق'(س)\,ءس = ٢س^{٢} + ٤س + جـ$ اوجد $\int_{١}^{٣} ق'(س)\,ءس$

$$\int_{١}^{٣} ق'(س)\,ءس = ٢س^{٢} + ٤س\Big|_{١}^{٣}$$
$$= (٢(٣)^{٢} + ٤ \times ٣) - (٢ \times (١)^{٢} + ٤ \times ١)$$
$$= (٢ \times ٩ + ١٢) - (٢ \times ١ + ٤)$$
$$= (١٨ + ١٢) - (٤ + ٢) = ٢٤$$

$$\int ق'(س)\,ءس = ق(س) + جـ$$
$$\int_{أ}^{ب} ق'(س)\,ءس = ق(س)\Big|_{أ}^{ب}$$
$$= ق(ب) - ق(أ)$$

اسئلة اضافية مهمة جدا

السؤال الاول :احسب قيمة كل من التكاملات الاتية

(أ) $\int_{0}^{4} 7س\,د س = 7س^{4}\Big|_{0}$

$= (7\times4)-(7\times0)$

$= 28-0$

$= \boxed{28}$

(ب) $\int_{1}^{3} (8س-5)د س = \frac{8س^{2}}{2}-5س\Big|_{1}^{3}$

$= 4س^{2}-5س\Big|_{1}^{3}$

$= (4(3)^{2}-5\times3)-(4(1)^{2}-5\times1)$

$= (36-15)-(4-5) = 21+1$

$= \boxed{22}$

جـ) $\int_{-2}^{2} 3س^{2}\,د س = \frac{3س^{3}}{3}\Big|_{-2}^{2}$

$= س^{3}\Big|_{-2}^{2}$

$= (2^{3})-(-2)^{3}$

$= 8-(-8) = \boxed{16}$

(د) $\int_{1}^{16} 4س^{3}\,د س = \frac{4س^{4}}{4}\Big|_{1}^{16} = س^{4}\Big|_{1}^{16}$

$= (16)^{4}-(1)^{4} = 16-1 = 15$

(هـ) $\int_{4}^{9} \frac{3}{\sqrt{س}}\,د س = \int_{4}^{9} 3س^{-\frac{1}{2}}\,د س$

$= 3\times\frac{2}{1}س^{\frac{1}{2}}\Big|_{4}^{9} = 6\sqrt{س}\Big|_{4}^{9}$

$= (6\sqrt{9})-(6\sqrt{4})$

$= 18-3\times6 = \boxed{6}$

و) $\int_{1}^{2} (\frac{1}{س^{2}}+\frac{1}{3س})د س = \int_{1}^{2} س^{-2}+س^{-3}\,د س$

$= \frac{س^{-1}}{-1}+\frac{س^{-2}}{-2}\Big|_{1}^{2} = \frac{-1}{س}-\frac{1}{2س^{2}}\Big|_{1}^{2}$

$= (\frac{-1}{2}-\frac{1}{2(2)^{2}})-(\frac{-1}{1}-\frac{1}{2(1)^{2}})$

$= (\frac{-1}{2}-\frac{1}{4\times2})-(-1-\frac{1}{2})$

$= (\frac{-1}{2}-\frac{1}{8})-(-1-\frac{1}{2})$

$= \frac{-1}{2}-\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2} = 1+\frac{-1}{8}$

$= \frac{-1}{8}+\frac{8}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$

(لجنة ٢٠١٨) $\int_{1}^{2} (\frac{1}{4س})د س =$

السؤال الثاني : اذا كانت $قـ'(س)$ هي مشتقه الاقتران $قـ(س)$ وكان ق(٣) = ٨ ق(٦)=١٢ فأوجد قيمة

$\int_{3}^{6} قـ'(س)د س$ الحل :

$\int_{3}^{6} قـ'(س)د س = قـ(س)\Big|_{3}^{6}$

$= قـ(6)-قـ(3) = 12-8 = \boxed{4}$

السؤال الثالث :اذ كان $\int_{-٢}^{أ} (٢س + ٥) د س = ٠$ فما قيمة أ

$$\frac{٢س^{٢}}{٢} + ٥س \Big|_{-٢}^{أ} = ٠$$
$$= س^{٢} + ٥س \Big|_{-٢}^{أ} = ٠$$
$$= (أ^{٢} + ٥أ) - ((-٢)^{٢} + ٥ \times -٢) = ٠$$

$$= أ^{٢} + ٥أ - (٤ + -١٠) = ٠$$
$$= أ^{٢} + ٥أ - -٦ = ٠$$
$$= أ^{٢} + ٥أ + ٦ = ٠$$
$$= (أ + ٣)(أ + ٢) = ٠$$
$$أ = -٣ ، أ = -٢$$

السؤال الرابع : اذا كان $\int_{٢}^{ب} ٢س د س = ١٨$ جد قيمة الثابت ب

الحل : $\int_{٢}^{ب} ٢س = ١٨$

$$\Leftarrow (ب^{٢} - ٢^{٢}) = ١٨$$
$$ب^{٢} - ٤ = ١٨$$
$$ب^{٢} = ١٨ + ٤$$
$$ب^{٢} = ٢٢$$
$$ب = \sqrt{٢٢}$$

السؤال الخامس : اذا كان $\int_{١}^{٣} ع(س) د س = س^{٣} + ٢س + ج$ احسب قيمة $\int_{١}^{٣} ع(س) د س$:

$$\int_{١}^{٣} ع(س) د س = س^{٣} + ٢س \Big|_{١}^{٣}$$
$$= (٣^{٣} + ٢ \times ٣) - ((١)^{٣} + ٢ \times ١)$$
$$= (٢٧ + ٦) - (١ + ٢)$$
$$= ٣٣ - ٣ = \boxed{٣٠}$$

لجنة(٢٠٠٩): اذا كان ك(س) = $\int_{١}^{٣} (٣س^{٢} + ٢س) د س$ فان ك(١) =

ك(س) = ٠ ← لأنه تكامل محدود

ك(١) = ٠

(وزاري ٢٠١٦) قيمة $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}} د س$ =

$$= \int_{٠}^{٢} س^{\frac{٣}{٢}} \times س^{\frac{١}{٢}} د س$$

(٢٠١٦/ ٢٠٠٧) $\int_{٠}^{٢} س^{\frac{٣}{٢}} \sqrt{س} د س$ =

الحل

$$= \int_{٠}^{٢} س^{\frac{٤}{٢}} د س = \int_{٠}^{٢} س^{٢} د س = \frac{س^{٣}}{٣} \Big|_{٠}^{٢}$$
$$= (\frac{٢^{٣}}{٣}) - (\frac{٠^{٣}}{٣}) = \frac{٨}{٣} - ٠ = \boxed{\frac{٨}{٣}}$$

(٢٠٠٧) $\int_{٢}^{٤}(٨س-٧)$ ءس

$= (\frac{٨س^{٢}}{٢}-٧س)\Big|_{٢}^{٤} = (٤س^{٢}-٧س)\Big|_{٢}^{٤}$

$= (٤)(٤)^{٢}-٧\times٤)-(٢)٤^{٢}-٧\times٢)$

$= (٤\times١٦-٢٨)-(١٦-١٤)$

$= (٦٤-٢٨)-(٢)$

$= ٣٦-٢ = \boxed{٣٤}$

(اكمال ٢٠١٦ قيمة) $\int_{٠}^{٣}$ س$(٣س+٢)$ ءس $=$

مثال (٣)اذا كان $\int_{ب}^{٦}(٤س+٣)$ ءس $= ٩٠$ جد قيمة ب

$\frac{٤س^{٢}}{٢}+٣س\Big|_{ب}^{٦} = ٩٠ \Leftarrow ٢س^{٢}+٣س\Big|_{ب}^{٦} = ٩٠$

$(٢)(٦)^{٢}+٣\times٦)-(٢ب^{٢}+٣ب) = (٩٠)-(٢ب^{٢}+٣ب) = ٩٠$

$(٢ب^{٢}+٣ب) = ٠$

$ب(٢ب+٣) = ٠$

$ب = ٠، \frac{-٣}{٢}$

(اكمال ٢٠١٦) اذا كان $\int_{١}^{٣}(٢س+١)$ ءس $= ٦$ فان أ $=$

$(٢ب^{٢}+٣ب) = ٠$

٢٠١٧) اذا كان $\int_{٢}^{آ}(٢س-١)$ ءس $= ٠$ فإن قيم ب الممكنة هي:

اكمال ٢٠٠٨) اذا كان ق(١) = ٨ ، ق(٥)=٦ فأن $\int_{١}^{٥}$ قَ(س) ءس $=$

$= \int_{١}^{٥}$ قَ(س) ءس $= $ ق$(س)\Big|_{١}^{٥} = $ ق$(٥)-$ ق(١)

$= ٦-٨ = \boxed{-٢}$

وزاري ٢٠٠٩ : جد $\int_{٠}^{٢}٢س(س+٢)$ ءس

$= \int_{٠}^{٢}(٢س^{٢}+٤س)$ ءس

$= \frac{٢س^{٣}}{٣}+\frac{٤س^{٢}}{٢}\Big|_{٠}^{٢} = (\frac{٢س^{٣}}{٣}+٢س^{٢})\Big|_{٠}^{٢}$

$(٠)-(٢)٢^{٢}+\frac{(٢)٢^{٣}}{٣} = ٨+\frac{١٦}{٣} = \frac{٤٠}{٣}$

وزاري ٢٠٠٩ $\int_{١}^{٢}(٢س+ب)\,د س = \int_{٣}^{١} ٢ب\,د س$ فما قيمة ب :

$\Leftarrow \frac{٢س^{٢}}{٢} + بس \Big|_{٣}^{١} = ٢بس \Big|_{١}^{٢}$

$\Leftarrow ٣ + ب = -٤ب$

$= ((٢^{٢} + ب\times٢) - (١)^{٢} + ب\times١) = (٢ب\times١) - (٢ب\times٣)$

$\Leftarrow ب + ٤ب = -٣$

$= (٤+٢ب) - (١+ب) = ٢ب - ٦ب$

$\frac{٥ب}{٥} = \frac{-٣}{٥} \Leftarrow = \boxed{\frac{-٣}{٥}}$

$\Leftarrow ٤+٢ب-١-ب = -٤ب$

اكمال ٢٠١١ : اذا كان $ن(س) = \frac{س}{س+١}$ فأن $\int_{٠}^{١} ن'(س)\,د س$

$$\int_{٠}^{١} ن'(س)\,د س = ن(س) \Big|_{٠}^{١} = ن(١) - ن(٠) = \frac{١}{١+١} - \frac{٠}{١+٠} = \boxed{\frac{١}{٢}}$$

وزاري ٢٠١٢ : اذا كان $\int ن'(س)\,د س = \frac{٤}{س} + س^{٢} + جـ$ ، جد : $\int_{١}^{٢} ن'(س)\,د س$

$$\int_{١}^{٢} ن'(س)\,د س = \frac{٤}{س} + س^{٢} \Big|_{١}^{٢} = (\frac{٤}{٢} + ٢^{٢}) - (\frac{٤}{١} + ١^{٢})$$

$$= (٤+٢) - (٤+١) = ٦ - ٥ = \boxed{١}$$

اكمال٢٠١٧) اذا كان $\int ن'(س)\,د س = ٣س^{٢} + ٢س + جـ$

فإن $\int_{١}^{٢} ن'(س)\,د س =$

اذا كانت $ن'(س)$ هي مشتقة الاقتران $ن(س)$ وكان $ن(٣) = ٨$ ، $\int_{٣}^{٦} ن'(س)\,د س = ٢٠$ جد قيمة $ن(٦)$

$$\int_{٣}^{٦} ن'(س)\,د س = ن(س) \Big|_{٣}^{٦} = ٢٠$$

$$= ن(٦) - ن(٣) = ٢٠$$

$$= ن(٦) - ن(٣) = ٢٠$$

$\Leftarrow ن(٦) - ٨ = ٢٠$

$\Leftarrow ن(٦) = ٢٨$

٢٠١٧)اذا كان $ن'(س)$ هي المشتقة الأولى للاقتران $ن(س)$

وكان $ن(٢) = ٩$ ، $\int_{٢}^{٥} ن'(س)\,د س = ١٥$ فان قيمة $ن(٥) =$

٢٠١٨)اذا كان $ن'(س)$ هي المشتقة الأولى للاقتران $ن(س)$وكان

$ن(-٢) = ن(٣) \leftarrow \int_{-٢}^{٣} ن'(س)\,د س = ٣س + ٤$

اذا كان $\int ق(س)دس = ٢س^{٣} + ٢بس + جـ$ وكان $ق(٢) = ٢٦$ جد قيمه الثابت ب .

$\int ق(س)دس = ٢س^{٣} + ٢بس + جـ$

$ق(س) = ٢س^{٣} + ٢بس + جـ$

$ق(س) = ٦س^{٢} + ٢ب$

$ق(٢) = ٦(٢)^{٢} + ٢ب = ٢٦$

$= ٦ \times ٤ + ٢ب = ٢٦$

$٢٤ + ٢ب = ٢٦ \Leftarrow \frac{٢ب}{٢} = \frac{٢}{٢} \Leftarrow$ $\boxed{ب = ١}$

(اكمال ٢٠١٧)اذا كان $\int_{١}^{أ} (٢س + ١)دس = \int_{١}^{٠} (٣س^{٢} - ١)دس$ فاوجد قيمة/ قيم الثابت أ

ثانياً :خصائص التكامل المحدود

الخاصية الاولى : اذا كان ق(س) = ج ← ج ∋ ح

فأن $\int_{أ}^{ب} جـ\,د س = جـ(ب - أ)$

امثلة :

(١) $\int_{١}^{٧} ٤\,د س = ٤(٧ - ١)$

$= ٤ \times ٦ = \boxed{٢٤}$

---

(٢) $\int_{-١}^{٣} ٦\,د س = ٦(٣ - (-١))$

$= ٦ \times ٤ = \boxed{٢٤}$

---

(٣) $\int_{٢}^{ب} ١\,د س = ١٨$

$\Leftarrow ب(٥ - ٢) = ١٨$

$\frac{٣ \times ب}{٣} = \frac{١٨}{٣} \Leftarrow \boxed{ب = ٦}$

(٤) $\int_{١}^{ب} ٢س\,د س = ٦$ وكان ب عدداً حقيقاً موجباً فما قيمة ب

$ب(ب - ١) = ٦$

$ب^{٢} - ب = ٦$

$ب^{٢} - ب - ٦ = ٠$

$(ب - ٣)(ب + ٢) = ٠$

$ب = ٣ \text{ ، } ب = -٢ \Leftarrow \boxed{ب = ٣}$

(٢٠١٨) $\int_{٢}^{ب} ٢س\,د س = -١$ فان قيمة / قيم الثابت ب =

(اكمال ٢٠١٧)

$\int_{-٣}^{٣} ٢جـ\,د س = ٢٤$

، فإن قيمة ج تساوي

الخاصية الثانية :

١) $\int_{ب}^{ب} ق(س)\,د س = ٠$

٢) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,د س$

مثال (١) اذا كان $\int_{٢}^{٤} ق(س)\,د س = ٣ \Leftarrow \int_{٤}^{٢} ق(س)\,د س = -٣$

مثال(٢) : $\int_{٤}^{٤} (\frac{٣س - ٢}{س - ١})\,د س = ٠$ ، $\int_{٦}^{٦} (٢س + ٨)\,د س = ٠$ ، $\int_{٣}^{٣} (س - ٤)^{٤}\,د س = ٠$

الخاصية الثالثة : $\int_{أ}^{ب} جـ د(س) دس = جـ \int_{أ}^{ب} د(س) دس$

الخاصية الرابعة : $\int_{أ}^{ب} (د(س) \pm هـ(س)) دس = \int_{أ}^{ب} د(س) دس + \int_{أ}^{ب} هـ(س) دس$

مثال : اذا كان $\int_{١}^{٢} د(س) دس = ٣$ ، $\int_{١}^{٢} هـ(س) دس = ٢$ اوجد :

١) $\int_{١}^{٢} (د(س) + هـ(س)) دس$

$= \int_{١}^{٢} د(س) دس + \int_{١}^{٢} هـ(س) دس$

$= ٣ + ٢ =$ ٥

٢) $\int_{١}^{٢} ٣ هـ(س) دس = ٣ \int_{١}^{٢} هـ(س) دس$

$= ٣ \times ٢ =$ ٦

٣) $\int_{١}^{٢} (٢د(س) + \frac{هـ(س)}{٢}) دس$

$= ٢ \int_{١}^{٢} د(س) دس + \frac{١}{٢} \int_{١}^{٢} هـ(س) دس$

$= ٢ \times ٣ + \frac{١}{٢} \times ٢ = ٦ + ١ =$ ٧

٤) $\int_{٢}^{١} (هـ(س) - ٢د(س)) دس$

$= \int_{٢}^{١} هـ(س) دس - ٢ \int_{٢}^{١} د(س) دس$

$= ٢^{-} - ٢ \times ٣^{-} = ٦ + ٢^{-} =$ ٤

لجنة ٢٠٠٩ :اذا كان $\int_{٣}^{٥} ٢د(س) دس = -٦$ فأن $\int_{٣}^{٥} ٣د(س) دس =$

ننقي المعطيات $\frac{٢}{٢} \int_{٣}^{٥} د(س) دس = \frac{-٦}{٢} \Leftarrow$ $\int_{٣}^{٥} د(س) دس = -٣$ نقية

المطلوب: $\int_{٣}^{٥} ٣د(س) دس = ٣ \int_{٣}^{٥} د(س) دس \Leftarrow = ٣ \times ٣ =$ ٩

لجنة ٢٠١٩) :اذا كان $\int_{١}^{٤} ٢د(س) دس = ١٠$

فأن $\int_{٤}^{١} \frac{١}{٢} د(س) دس =$

إكمال٢٠٠٧ :اذا كان $\int_{٥}^{٢} د(س) دس = ٤$ فأن $\int_{٢}^{٥} ٢د(س) دس =$

الحل: $\int_{٢}^{٥} ٢د(س) دس = ٢ \int_{٢}^{٥} د(س) دس \Leftarrow = ٢ \times -٤ =$ -٨

لجنة ٢٠٠٩: اذا كان $\int_{١}^{٢} ٢ن(س)\,ودس = ٤$ جد $\int_{١}^{٢} (٣ن(س)+٢)\,ودس$

الحل: اولا المعطيات غير نقيه :نقوم بتنقيتها

$$\int_{١}^{٢} ٢ن(س)\,ودس = ٤ \Leftarrow \frac{٢}{٢}\int_{١}^{٢} ن(س)\,ودس = \frac{٤}{٢} \Leftarrow \boxed{\int_{١}^{٢} ن(س)\,ودس = ٢}$$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٢} (٣ن(س)+٢)\,ودس$$

$$٣\int_{١}^{٢} ن(س)\,ودس + \int_{١}^{٢} ٢\,ودس$$

$$= ٣\times ٢^{-}+٢(٢-١)$$

$$= -٦+٢^{-} \Leftarrow = \boxed{-٨}$$

(اكمال ٢٠١٩) اذا كان $\int_{-١}^{٣} ن(س)\,ودس = ٦$ جد $\int_{-١}^{٢} (ن(س)-٢)\,ودس$

مثال (٥) اذا كان $\int_{١}^{٤} ن(س)\,ودس = ٩$ جد $\int_{٤}^{١} (٧+ن(س))\,ودس$

لجنة ٢٠١٢: اذا كان $\boxed{\int_{١}^{٤} ن(س)\,ودس = ٣}$ جد $\int_{١}^{٤} \left[ن(س)+س^{\frac{-١}{٢}}\right]ودس$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٤} (ن(س)+س^{\frac{-١}{٢}})\,ودس \Leftarrow \int_{١}^{٤} ن(س)\,ودس + \int_{١}^{٤} س^{\frac{-١}{٢}}\,ودس$$

$$\Leftarrow = \frac{٢}{١}س^{\frac{١}{٢}}\Big|_{١}^{٤} + = ٣ - ٢\sqrt{س}\Big|_{١}^{٤} + ٣ -$$

$$= ٣ - ((٢\sqrt{١}) - (٢\sqrt{٤}))$$

$$= ٣ - ((١\times ٢) - (٢\times ٢))$$

$$= ٣ - (٢-٤) = \boxed{١^{-}}$$

اكمال٢٠١٨: اذا كان $\int_{٢}^{٤} ن(س)\,ودس = ٦$

$\int_{٢}^{٤} [ن(س)+ب س]\,ودس = ١٨$ فما قيمة ب؟

لحل أي مسألة تكامل على الخصائص

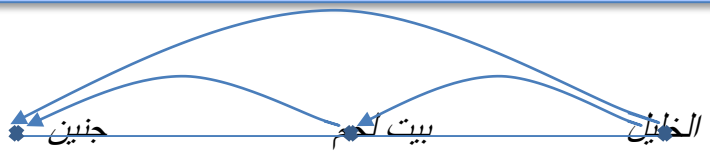
يجب ان نتحقق ان السؤال على الخصائص وذلك!!

(يكون السؤال على الخصائص اذا كان يحتوي بداخله $\int$ ق(س)، هـ(س).... في المعطيات).

حيث نقوم بما يلي

١- ننقي المعطيات اذا كانت غير منقيه ونبروز النقي منها .
٢- نأخذ المطلوب ونوزع التكامل اذا كان به جمع أو طرح.
٣- نستخدم الخصائص لما يحتاج الى خصاص ونحل الباقي كتكامل عادي.

الخاصية الخامسة (خاصية الاضافة) : $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ه س = \int_{أ}^{ج} د(س)\,ه س + \int_{ج}^{ب} د(س)\,ه س$



حتى تتحقق خاصيه الإضافة هناك ثلاث شروط

١- نفس الاقتران

٢- يفصل بينهما اشارة جمع (+)

٣- احد الحدود العليا للتكامل = الحد السفلي للآخر.

مثال(٦) : اذا كان $\int_{-٣}^{٢} د(س)\,ه س = ٢$ ، $\int_{٢}^{٦} د(س)\,ه س = ٤$ اوجد $\int_{-٣}^{٦} ٥د(س)\,ه س$ ؟

$$\int_{-٣}^{٦} ٥د(س)\,ه س$$

$$\Leftarrow ٥\int_{-٣}^{٦} د(س)\,ه س = ٥(\int_{-٣}^{٢} د(س)\,ه س + \int_{٢}^{٦} د(س)\,ه س)$$

$$= ٥(٢+٤)$$

$$= ٥\times٦ = \boxed{٣٠}$$

اكمال ٢٠٠٧ اذا علمت ان $\boxed{\int_{١}^{٥} د(س)\,ه س = ٤}$ ، $\boxed{\int_{١}^{٣} د(س)\,ه س = ١٢}$ ، جد $\int_{٥}^{٣} د(س)\,ه س$

$$= \int_{٥}^{٣} د(س)\,ه س = \int_{٥}^{١} د(س)\,ه س + \int_{١}^{٣} د(س)\,ه س$$

$$= -٤ + ١٢ = ٨$$

(٢٠١٨)اذا كان $\int_{١}^{٢} د(س)\,ه س = ٤$ ، $\int_{٧}^{٢} د(س)\,ه س = ٥$

فان $\int_{١}^{٧} ٢د(س)\,ه س =$

اكمال ٢٠١٤: اذا كان $\int_{١}^{٤} [د(س)+٢س]\,ه س = ٩$ ، $\boxed{\int_{٢}^{٤} د(س)\,ه س = -٤}$ جد قيمة $\int_{١}^{٢} د(س)\,ه س$

(لجنة ٢٠١٦) اذا علمت ان $\int_{٣}^{١} ٣د(س)\,ه س = ١٢$ ، $\boxed{\int_{٥}^{١} د(س)\,ه س = -١٤}$ ، جد $\int_{١}^{٣} د(س)\,ه س$

٢٠٠٧) اذا علمت ان $\int_{1}^{3} ن(س)\,ءس = ٤$ ، $\int_{3}^{1} ٢ن(س)\,ءس = ١٠$ احسب $\int_{3}^{1} (ن(س)+س)\,ءس$

الحل : ننقي المعطيات $\Leftarrow \int_{3}^{1} \frac{٢}{٢} ن(س)\,ءس = \frac{١٠}{٢} \Leftarrow$ $\boxed{\int_{3}^{1} ن(س)\,ءس = ٥}$

نوزع التكامل

$= \int_{3}^{1} ن(س)\,ءس + \int_{3}^{1} س\,ءس$

$= (\int_{3}^{1} ن(س)\,ءس + \int_{1}^{1} ن(س)\,ءس) + \left[\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{3}^{٥}$

$= ((\frac{٣}{٢})^{٢} - (\frac{٥}{٢})^{٢}) + (٤+٥)$

$= (\frac{٩}{٢} - \frac{٢٥}{٢}) + ٩$

$= \frac{١٦}{٢} + ٩ = ٨ + ٩ = \boxed{١٧}$

٢٠١٠ اذا كان $\int_{2}^{٥} هـ(س)\,ءس = ٥$ ، $\int_{٧}^{2} هـ(س)\,ءس = -٣$ جد ١) $\int_{2}^{٧} هـ(س)\,ءس$ ٢) $\int_{2}^{٧} (هـ(س)+٢س)\,ءس$

١) $\int_{2}^{٧} هـ(س)\,ءس = \int_{2}^{٥} هـ(س)\,ءس + \int_{٥}^{٧} هـ(س)\,ءس$

$= ٥ + ٣ = ٨$

٢) $\int_{2}^{٧} (هـ(س)+٢س)\,ءس = \int_{2}^{٥} (هـ(س)+٢س)\,ءس + \int_{٥}^{٧} ٢س\,ءس$

$= ٥ + \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{2}^{٥}$

$= ٥ + (٢٥ - ٤) = ٥ + (٢١) = \boxed{٢٦}$

(وزاري ٢٠١١) اذا كان $\int_{1}^{3} ٢ن(س)\,ءس = ٦$ ، $\int_{٤}^{3} ن(س)\,ءس = ٢$ جد $\int_{1}^{٤} ٢س - ن(س)\,ءس$

$\int_{1}^{3} \frac{٢}{٢} ن(س)\,ءس = \frac{٦}{٢} \Leftarrow$ $\boxed{\int_{1}^{3} ن(س)\,ءس = ٣}$

(٢٠١٧) اذا كان $\int_{1}^{3} ٢ن(س)\,ءس = ٨$ ، $\int_{٥}^{3} ن(س)\,ءس = ٧$ ، فان $\int_{1}^{٥} ن(س)\,ءس$

$\int_{1}^{٤} ٢س - ن(س)\,ءس = \int_{1}^{٤} ٢س\,ءس - \int_{1}^{٤} ن(س)\,ءس$

$= \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{1}^{٤} - (\int_{1}^{3} ن(س)\,ءس + \int_{3}^{٤} ن(س)\,ءس)$

$= س^{٢}\Big|_{1}^{٤} - (٣ + ٢^{-})$

$= [(٤)^{٢} - (١)^{٢}] - (١)$

$= (١٦ - ١) - ١ = ١٥ - ١ = ١٤$

(٢٠١٧) اذا كان $\int_{١}^{٤} (٢ن(س) + ٣س^{٢}) ءس = ٧٣$ ، $\int_{١}^{٢} ن(س) ءس = ١٠$ ، جد $\int_{٤}^{٢} ن(س) ءس$ يساوي :

$$٢\int_{١}^{٤} ن(س) ءس + \int_{١}^{٤} (٣س^{٢}) ءس = ٧٣ ، \boxed{\int_{١}^{٢} ن(س) ءس = ١٠}$$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٤} (٣س^{٢}) ءس = [س^{٣}]_{١}^{٤}$$

$$= (٤^{٣} - ١^{٣}) = \boxed{٦٣}$$

$$٢\int_{١}^{٤} ن(س) ءس + ٦٣ = ٧٣$$

$$٢\int_{١}^{٤} ن(س) ءس = ١٠$$

$$\boxed{\int_{١}^{٤} ن(س) ءس = ٥}$$

$$\Leftarrow \int_{٤}^{٢} ن(س) ءس = \int_{٤}^{١} ن(س) ءس + \int_{١}^{٢} ن(س) ءس$$

$$= -٥ + ١٠$$

$$= \boxed{٥}$$

(اكمال ٢٠١٧) اذا علمت أن $\int_{١}^{٧} (ن(س) - ١) ءس = ٨$ ، $\int_{٧}^{٣} ن(س) ءس = -٦$ ، جد $\int_{١}^{٣} ن(س) ءس$ الاجابة =٨

تمارين ومسائل (١-٧) ص٤٢

١)احسب التكاملات التالية :

ا) $\int_{-٢}^{١}(٣س+١)\,ds = \left[\frac{٣س^{٢}}{٢}+س\right]_{-٢}^{١}$

$= \left(\frac{٣(١)^{٢}}{٢}+(١)\right)-\left(\frac{٣(-٢)^{٢}}{٢}+(-٢)\right)$

$= (١+\frac{٣}{٢})-(٦-(٢))$

$\boxed{= \frac{-٣}{٢}} = ٣-\frac{٣}{٢}$

ب) $\int_{٢}^{٥}(٧-٢س)\,ds = \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}-٧س\right]_{٢}^{٥} = \left[س^{٢}-٧س\right]_{٢}^{٥}$

$= (٥)^{٢}-(٥)(٧)-(٢)^{٢}-(٢)(٧)$

$= (٢٥-٣٥)-(١٤-٤)$

$\boxed{= ١٠-١٠ = ٠}$

جـ) $\int_{١}^{٤}(٣+٣س+\sqrt{س})\,ds = \int_{١}^{٤}(٣+س^{\frac{١}{٢}}+٣س)\,ds = \left[\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}+٣س\right]_{١}^{٤}$

$= (\frac{٢}{٣}\sqrt{(٤)^{٣}}+٣(٤))-(\frac{٢}{٣}\sqrt{(١)^{٣}}+٣(١))$

$= (\frac{٢}{٣}\times ٨+١٢-\frac{١٦}{٣}) = (\frac{٢}{٣}\times ١+٣)$

$\boxed{= (٩+\frac{١٤}{٣}) = \frac{٤١}{٣}}$

٢)اذا كان $\int_{-٢}^{٢}ع(س)\,ds = ٣س^{٢}-٢س$ فما قيمة $\int_{-٢}^{٢}٢ع(س)\,ds$ ؟

$\int_{-٢}^{٢}٢ع(س)\,ds = ٢\int_{-٢}^{٢}ع(س)\,ds = ٢\left(\left|٣س^{٢}-٢س\right|_{-٢}^{٢}\right)$

$= ((٣(٢)^{٢}-٢(٢))-(٣(-٢)^{٢}-٢(-٢)))$

$= ٢((٤+١٢)-(٤-١٢))$

$= ٢(١٦-٨) = ٢(٨-)$

$\boxed{= (١٦-)}$

٣)اذا كان $\int_{١}^{٥}٣هـ(س)\,ds = ١٢$ فما قيمة $\int_{٥}^{١}(هـ(س)+٢س-١)\,ds$ ؟

$\int_{١}^{٥}٣هـ(س)\,ds = ١٢ \Leftarrow \boxed{\int_{١}^{٥}هـ(س)\,ds = ٤}$

$\int_{٥}^{١}(هـ(س)+٢س-١)\,ds = \int_{٥}^{١}هـ(س)\,ds + \int_{٥}^{١}٢س\,ds - \int_{٥}^{١}١\,ds$

$= -٤+(س^{٢}|_{٥}^{١})-١(١-٥) = -٤+(٢٥-١)+٤$

$\Leftarrow \boxed{= ٢٤-} = ٤+٢٤-٤-$

٤) اذا كان $\int_{٣}^{٥}(٢س+ب)دس = ١٢$ فما قيمة الثابت ب ؟

$$(س^{٢}+بس)\Big|_{٣}^{٥} = ١٢$$
$$((٥)^{٢}+ب(٥))-((٣)^{٢}+ب(٣)) = ١٢$$
$$٢٥+٥ب-٩-٣ب = ١٢$$
$$٢ب+١٦ = ١٢$$
$$٢ب = -٤ \Leftarrow \boxed{ب = -٢}$$

٥) اذا كان $\int_{-١}^{جـ}(٦س)دس = ٠$ فما قيمة / قيم الثابت جـ؟

$$(٣س^{٢})\Big|_{-١}^{جـ} = ٠$$
$$(٣جـ^{٢})-(٣)(-١)^{٢} = ٠$$
$$٣جـ^{٢}-٣ = ٠$$
$$٣جـ^{٢} = ٣$$
$$\boxed{جـ = \pm ١}$$

٦) اذا كان $\int_{-١}^{٥} و(س)دس = ١٣$ ، $\int_{-١}^{٥} هـ(س)دس = ٧$ فما قيمة $\int_{-١}^{٥}(٢و(س)-هـ(س))دس$ ؟

$$\int_{-١}^{٥} و(س)دس = ١٣ \quad ، \quad \int_{-١}^{٥} هـ(س)دس = ٧$$

$$= ٢\int_{-١}^{٥} و(س)دس - \int_{-١}^{٥} هـ(س)دس$$
$$= ٢(١٣+^{-}٧) = ٢\times ٢٠ = \boxed{٤٠}$$

(اكمال ٢٠١٩)اذا كان $\int_{١}^{-١} و(س)دس = ١٣$ ، $\int_{-١}^{١} هـ(س)دس = ٧$

فما قيمة $\int_{-١}^{١}(٢و(س)-هـ(س)+٣س^{٢})دس$ ؟ ٧علامات

٧) اذا كان $\int_{٣}^{٧} و(س)دس = ٣$ ، $\int_{٢}^{٧} ٣و(س)دس = -٩$ فما قيمة $\int_{٢}^{٣} ٤و(س)دس$ ؟ (لجنة ٢٠١٩)

$$\frac{٣}{٣}، \int_{٣}^{٧} و(س)دس = \frac{-٩}{٣} \Leftarrow \boxed{\int_{٣}^{٧} و(س)دس = -٣} \quad \boxed{\int_{٢}^{٧} و(س)دس = ٣}$$

$$= \int_{٢}^{٣} ٤و(س)دس = ٤(\int_{٢}^{٧} و(س)دس + \int_{٧}^{٣} و(س)دس)$$
$$= ٤(٣+٣) = ٤\times ٦ = \boxed{٢٤}$$

تمارين عامة(١)

س١. أختر رمز الإجابة الصحيحة :

١. إذا كان $ن(س) = \frac{٢}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، فما قيمة $ن'(١)$ ؟

أ) -٨ ب) ٨ جـ) -٢ د) ٢

$$ن'(س) = \frac{٤ \times ٨ - ٠ \times س٤}{(س٤)^{٢}} = \frac{-٣٢}{(س٤)^{٢}}$$
$$ن'(س) = \frac{-٣٢}{(١ \times ٤)^{٢}} = \frac{-٣٢}{١٦} = \boxed{٢}$$

٢. ما ميل القاطع الذي يقطع منحنى الاقتران $ن(س) = ٣س^{٢} - ٢$ عند $س_{١} = -١$ ، $س_{٢} = ٢$ ؟

أ) ٣ ب) -٦ جـ) ١٢ د) ٩

ميل القاطع $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ن(س_{٢}) - ن(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ن(٢) - ن(-١)}{٢ - (-١)}$

$$= \frac{(٣)(٢) - (٢)^{٢} - (٣)(-١) - (٢)^{٢}}{٣} = \frac{(١٠ - ١)}{٣} = \frac{٩}{٣} = \boxed{٣}$$

٣. إذا كان متوسط التغير في الاقتران $ن(س)$ يساوي $\frac{٣}{٢}$ ، وكان $\Delta س = ٦$ ، فما قيمة $\Delta ص$ ؟

أ) ٩ ب) ٣ جـ) ١٨ د) ٦

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \frac{\Delta ص}{٦} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ٢\Delta ص = ١٨ \Leftarrow \Delta ص = ٩$$

٤. ما ميل المماس لمنحنى الاقتران $ن(س) = (٥س - ١) \times (٢س)$ عند $س = ١$ ؟

أ) ٨ ب) ١٠ جـ) ١٨ د) ١٠

$$ن'(س) = (٥س - ١) \times ٢ + ٢ \times (٢س) \times ٥$$
$$ن'(١) = (٥(١) - ١) \times ٢ + ٢ \times ((١)٢) \times ٥$$
$$\boxed{١٨} = ٥ \times ٢ + ٢ \times ٤$$

٥. إذا كان $ن(س) = \frac{٣س^{٢} + ١}{٢ - س}$ ، $س \neq ٢$ ، فما قيمة $ن'(٣)$ ؟

أ) ٣٧ ب) -٣٧ جـ) ١٠ د) ١

$$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{-١ \times (١ + \text{س}^{٢}٣) - ٦\text{س} \times (\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$$

$$\text{ن}'(٣) = \frac{-١ \times (١ + (٣)^{٢}٣) - (٣)٦ \times ((٣) - ٢)}{((٣) - ٢)^{٢}}$$

$$\boxed{١٠} = \frac{(-١ \times ٢٨) - (١٨ \times -١)}{(-١)^{٢}}$$

٦. إذا كان ن(٧) = −٥ ، هـ(٧) = ٢ ، ن′(٧) = ٣ ، هـ′(٧) = −١ فما قيمة (ن٢ × هـ٣)′(٧) ؟

أ) ٦٦ ب) -٦ جـ) ٦ د) -١٨

$$(\text{ن}٢ \times \text{هـ}٣)'(٧) = \text{ن}٢(٧) \times \text{هـ}'٣(٧) \times \text{هـ}٣(٧) \times \text{ن}'٢(٧)$$
$$= ٢ \times -٥ \times ٣ \times ١ + ٢ \times ٣ \times ٢ \times ٣$$
$$\boxed{٦٦} = ٣٠ + ٣٦$$

٧. إذا كان للاقتران ن(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (-١٠ ، ٥) ، فما قيمة ن′(−١٠) .

أ) ٥ ب) -١٠ جـ) صفر د) ٣

للاقتران ن(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (-١٠ ، ٥) ، ⇐ ن′(−١٠) = ٠

٨. إذا كان $\int$ ن′(س) دس = ٣س^{٢} − ٤س + جـ ، فما قيمة ن′(٢) ؟

أ) ١٢ ب) صفر جـ) ٧ د) ٨ الحل نشتق الطرفين

$$\text{ن}'(\text{س}) = ٦\text{س} - ٤$$
$$\text{ن}'(٢) = ٦(٢) - ٤ = \boxed{٨}$$

٩. إذا كان $\int_{١}^{٩}$ (٥س^{٣} + ٣س − ٢) دس ، فما قيمة ن′(٨) ؟

أ) ٢٤ ب) ٤٤ جـ) صفر د) ٢ مشتقة التكامل المحدود =صفر

١٠. إذا كان $\int_{٥}^{٧}$ ن٢(س) دس = ٦ ، $\int_{٥}^{١}$ ن(س) دس = ٤ ، فما قيمة $\int_{١}^{٧}$ (ن٣(س) + ٢) دس ؟

أ) ٣٢ ب) ٩ جـ) ٣٣ د) ٣

س٢) اذا كان $ن(س) = س^{٣} - جـس - ٦$ وكانت $ن'(س)$ = صفر اجد قيمة الثابت جـ

$$ن'(س) = ٣س^{٢} - جـ$$
$$ن'(٢) = ٣(٢)^{٢} - جـ = ٠$$
$$جـ = \boxed{١٢}$$

س٣) ما متوسط التغير في الاقتران $ن(س) = \sqrt{س - ٢}$ ، عندما تتغير س من $س_{١} = ١١$ إلى $س_{٢} = ١٨$ ؟

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ن(١٨) - ن(١١)}{١٨ - ١١} = \frac{\sqrt{١٨ - ٢} - \sqrt{١١ - ٢}}{١٨ - ١١}$$
$$= \frac{\sqrt{١٦} - \sqrt{٩}}{١٨ - ١١} = \frac{٤ - ٣}{١٨ - ١١} = \boxed{\frac{١}{٧}}$$

س٤)اذا كان ق(س) = $س^{٣}$ -١٢ س – ٣ ، اجد قيمة /قيم س بحيث $ن'(س)$ = صفر؟

$$ن'(س) = ٣س^{٢} - ١٢$$
$$ن'(٢) = ٣س^{٢} - ١٢ = ٠$$
$$٣س^{٢} = ١٢$$
$$س^{٢} = ٤$$
$$س = \pm ٢$$

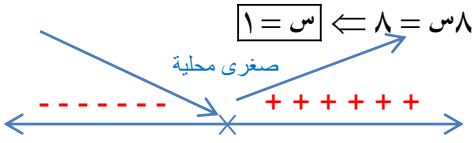
س٥) اذا كان $\int_{ب}^{٠} (٢س + ١) دس = ٢٤$ أجد قيمة /قيم الثابت ب ؟

$$\frac{٢س^{٢}}{٢} + ١س \Big|_{ب}^{٠} = ٢٤ \Leftarrow = س^{٢} + س \Big|_{ب}^{٠} = ٢٤$$
$$((٥)^{٢} + ٥) - (ب^{٢} + ب) = (٣٠) - (ب^{٢} + ب) = ٢٤$$
$$٦ - ب^{٢} - ب = ٠ \Leftarrow ب^{٢} + ب - ٦ = ٠$$
$$(ب + ٣)(ب - ٢) = ٠$$
$$\Leftarrow ب = -٣، ب = ٢$$

س٦) إذا كان $هـ(س) = ٤س^{٢} - ٨س + ١$:

أ) فما فترات التزايد والتناقص للاقتران $هـ(س)$ ؟

$$هـ(س) = ٤س^{٢} - ٨س + ١$$
$$هـ'(س) = ٨س - ٨ = ٠$$
$$٨س = ٨ \Leftarrow \boxed{س = ١}$$



نفس ١ عكس

هـ(س) متناقص على الفترة (-∞،١] لان ق(س) < ٠

هـ(س) متزايد على الفترة [١،∞) لان ق(س) > ٠

ب) ما القيم القصوى للاقتران هـ(س)، وما نوعها ؟

للاقتران هـ(س)قيمة صغرى محلية عند س= -١ قيمتها

$$ص = ٣\٤(-١) - ٤(-١)^{٢} - ٨(-١) + ١$$
$$= ٤ + ٨ + ١ = \boxed{١٣}$$

تمت الوحدة الاولى بحمد الله وتوفيقه

المكتبة الفلسطينية الشاملة للمعلم والطالب
تحضير دروس - اختبارات - أوراق عمل

لتحميل المزيد من موقع المكتبة الفلسطينية الشاملة

www.sh-pal.com

تابعنا على صفحة الفيس بوك: https://www.facebook.com/shamela.pal

تابعنا على قنوات التلجرام: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_42.html

أقسام موقع المكتبة الفلسطينية الشاملة:

الصف الأول: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_24.html

الصف الثاني: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_46.html

الصف الثالث: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_98.html

الصف الرابع: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_72.html

الصف الخامس: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_80.html

الصف السادس: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_13.html

الصف السابع: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_66.html

الصف الثامن: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_35.html

الصف التاسع: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_78.html

الصف العاشر: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_11.html

الصف الحادي عشر: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_37.html

الصف الثاني عشر: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_33.html

ملازم للمتقدمين للوظائف: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_89.html

شارك معنا: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_40.html

اتصل بنا: https://www.sh-pal.com/p/blog-page_9.html