تعريفات وقوانين مقتبسة من

كتاب الرياضيات أدبي (توجيهي)

أ. عبد الرحمن عبد العاطي

جوال: 0597226796

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من $س_1$ إلى $س_2$ فإن:

التغير في قيمة س = $س_2 - س_1$، ويرمز له بالرمز Δس

التغير في قيمة ص = $ص_2 - ص_1$ = ق($س_2$) − ق($س_1$) ويرمز له بالرمز Δص

إذا كان ص = ق(س) معرفاً عند س = أ، وكانت $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(أ+هـ) - ق(أ)}{هـ}$ موجودة، فإن ق(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س = أ وتسمى المشتقة الأُولى للاقتران ق(س) عند س = أ .

ويرمز لها بالرمز قَ(أ) أو $\frac{دص}{دس}$. أو $صَ|_{س=أ}$

قاعدة (١): إذا كانت ص = ق(س) = أ ، حيث أ عدد حقيقي، فإن قَ(س) = $\frac{دص}{دس}$ = صفر.

قاعدة (٢): إذا كانت ص = أ س + ب، حيث أ ، ب عددان حقيقيان، فإن $\frac{دص}{دس}$ = أ .

إذا كان ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من $س_1$ إلى $س_2$ فإن:

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$ ، $س_1 \neq س_2$

ميل القاطع للمستقيم في النقطتين $(س_١، ص_١)$ $(س_٢، ص_٢)$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

قاعدة (٣): إذا كان ق(س) = $س^ن$، فإنّ قَ(س) = ن $س^{ن-١}$ ،حيث:
ن عدد حقيقي، ن ≠ ٠، س ≠ ٠ عندما ن < ١.

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقترانا قابلاً للاشتقاق، وكان أ عدداً حقيقياً، أ ≠ ٠، فإن الاقتران هـ(س) = أ.ق(س) هو اقتران قابل للإشتقاق، وتكون هـَ(س) = أ.قَ(س)

قاعدة (١): إذا كان ق(س) و هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ك(س) = ق(س) ± هـ(س) فإن: الاقتران ك(س) يكون قابلاً للاشتقاق، ويكون كَ(س) = قَ(س) ± هـَ(س).

قاعدة (٢): إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س = أ فإن:

(ق × هـ)َ(أ) = ق(أ) × هـَ(أ) + هـ(أ) × قَ(أ).

وبالكلمات:

مشتقة حاصل ضرب اقترانين= الاقتران الأَول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأَول

قاعدة (٣): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان هـ (س) ≠ ٠ عند س = أ فإن:

$$\left(\frac{ق}{هـ}\right)َ(أ) = \frac{(هـ(أ) \times قَ(أ)) - (ق(أ) \times هـَ(أ))}{(هـ(أ))^٢}$$ ، وبالكلمات:

$$\text{مشتقة ناتج قسمة اقترانين} = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

معادلة الخط المستقيم الذي ميله(م)، ويمر بالنقطة $(س_١، ص_١)$:

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

قاعدة (١): ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (س$_1$=أ) يساوي قَ(أ).

يكون المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند س = س$_1$ أفقياً اذا كان المماس موازياً لمحور السينات ويكون ميله صفراً.

يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [أ ، ب]،إذا كان: لكل س$_2$ > س$_1$، فإنَّ:
ق(س$_2$) > ق(س$_1$) لأي عددين س$_1$، س$_2$ ∈ [أ ، ب].
ويكون ق(س) متناقصاً على الفترة [أ ، ب]، إذا كان: لكل س$_2$ > س$_1$، فإنَّ ق(س$_2$) < ق(س$_1$)
لأَي عددين س$_1$، س$_2$ ∈ [أ ، ب].

تسمى الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ميل المماس (هـ).
إذا كانت الزاوية (هـ) حادة يكون الميل موجباً. وإذا كانت الزاوية (هـ) منفرجة يكون الميل سالباً.

قاعدة: اذا كان ق(س) معرفاًعلى الفترة [أ ، ب]، فإن ق(س) يكون:

١) متزايداً في الفترة [أ ، ب]، إذاكانت قَ(س) > صفر لكل س في الفترة]أ،ب[.

٢) متناقصاً في الفترة [أ ، ب]، إذاكانت قَ(س) < صفر لكل س في الفترة]أ،ب[.

٣) ثابتاً في الفترة [أ ، ب]، إذاكانت قَ(س) = صفر لكل س في الفترة]أ،ب[.

يكون للاقتران ق(س) المعرف على ح قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند س= أ ، إذا كان:

١. قَ(أ) = صفراً. ٢. يغيّر ق(س) من سلوكه حول س= أ من التزايد إلى التناقص أو العكس.

إذا كان ق(س) اقتراناً مشتقته الأُولى قَ(س)، فإن التكامل غير المحدود للاقتران قَ(س) بالنسبة لـ س يساوي ق(س) +جـ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز $\int$ ، وبصورة عامة فإنَّ:

$\int$ قَ(س) ءس = ق(س) + جـ، حيث جـ عدد حقيقي.

$\int$ أ ءس = أ س+جـ، حيث أ،جـ عددان حقيقيان.

$\int$ سⁿ ءس = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ، حيث ن،جـ عددان حقيقيان، ن $\neq$ -١

إذا كان ق(س) ، هـ(س) إقترانين قابلين للتكامل فإن:

$\int$ (ق ± هـ) (س) ءس = $\int$ ق(س) ءس ± $\int$ هـ(س) ءس

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان ع(س) = ك. ق(س)، حيث ك عدد حقيقي، ك $\neq$ ٠،

فإن: $\int$ ع(س) ءس = $\int$ ك. ق(س) ءس = ك. $\int$ ق(س) ءس

المتقدمون

التكامل المحدود: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن: $\int_{أ}^{ب}$ قَ(س) ءس = ق(س) $\Big|_{أ}^{ب}$ = ق(ب) – ق(أ)،

حيث أ: الحد الأدنى ، ب: الحد الأعلى ، أ ، ب عددان حقيقيان.

أتعلم

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفرً دائماً.

أتعلم

$\int_{ب}^{ب}$ ق(س) ءس = صفر، حيث: ب عدد حقيقي

أتعلم

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = – $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) ءس

إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ، ب]، وكان جـ عدد حقيقي بحيث ﺃ < جـ < ب، فإنَّ:

$\int_{ﺃ}^{ب}$ ق(س) ءس = $\int_{ﺃ}^{جـ}$ ق(س) ءس + $\int_{جـ}^{ب}$ ق(س) ءس . وتسمى هذه الخاصية خاصية الإضافة.

المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات، والمستقيمين (س= ﺃ)، (س= ب) والواقعة فوق (أو تحت) محور السينات تساوي $\int_{ﺃ}^{ب}$ | ق(س)| ءس

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لأعداد حقيقية على هيئة صفوف عددها (م) وأعمدة عددها(ن)، محصورة بين قوسين من النوع [ ]، ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية، وتكون المصفوفة من **الرتبة** م × ن.

أتعلم

يسمّى كل عدد في المصفوفة ﺃ مدخلة، ويرمز له بالرمز $ﺃ_{ي هـ}$ ، حيث:

(ي): الصف الذي تقع فيه المدخلة، (هـ): العمود الذي تقع فيه المدخلة.

أتعلم

من أنواع المصفوفات:

- **مصفوفة الصف:**

هي المصفوفة التي تتكوَّن من صف واحد فقط، و(ن) من الأعمدة، وتكون رتبتها ١×ن.

- **مصفوفة العمود:**

هي المصفوفة التي تتكوَّن من عمود واحد فقط، و(م) من الصفوف، وتكون رتبتها م×١.

- **المصفوفة المربعة:**

هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة ويساوي (ن)، وتسمى المصفوفة مربعة من الرتبة النونية.

- **المصفوفة الصفرية:** هي المصفوفة التي تكون كل مدخلة فيها تساوي صفراً، ويرمز لها بالرمز(و).

تعريف

تتساوى المصفوفتان ﺃ، ب إذا كان لهما الرتبة نفسها، وكانت جميع مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

تعريف

إذا كانت ٱ، ب مصفوفتين كل منهما من الرتبة نفسها م ×ن فإن مجموع المصفوفتين ٱ+ ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م ×ن، وتكون كل مدخلة في المصفوفة جـ مساوية لمجموع المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين ٱ، ب ،أي أن: $جـ_{ي هـ} = ٱ_{ي هـ} + ب_{ي هـ}$

أتعلم

عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية.

أتعلم

عملية جمع المصفوفات هي عملية تجميعية.

أتعلم

المصفوفة الصفرية (و) هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.

تعريف

إذا كانت ٱ مصفوفة من الرتبة م×ن، وكان جـ عدداً حقيقياً فإن جـ .ٱ مصفوفة من الرتبة م×ن، حيث تكون كل مدخلة فيها مساوية للمدخلة المناظرة لها في المصفوفة ٱ مضروبة بالثابت جـ. أي أن: $جـ(ٱ_{ي هـ}) = (جـ ٱ_{ي هـ})$

تعريف

إذا كانت ٱ، ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م×ن، فإن ناتج طرح المصفوفتين:

ٱ - ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م×ن. وتكون كل مدخلة في جـ مساويةً لناتج طرح المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين ٱ، ب،

أي أن: $جـ_{ي هـ} = ٱ_{ي هـ} - ب_{ي هـ}$

أتعلم

إذا كانت ٱ، ب مصفوفتين حيث: ٱ + ب = ب + ٱ = و، فإن ب هي النظير الجمعيّ للمصفوفة ٱ، كما أن المصفوفة ٱ هي النظير الجمعيّ للمصفوفة ب.

تعريف

إذا كانت ٱ مصفوفة من الرتبة م× ن، ب مصفوفة من الرتبة ن ×هـ، فإن:

$ٱ_{م×ن} \times ب_{ن×هـ} = جـ_{م×هـ}$ ، حيث: $جـ_{ي هـ} = ٱ_{ي١} . ب_{١هـ} + ٱ_{ي٢} . ب_{٢هـ} + ... + ٱ_{ي ن} . ب_{ن هـ}$

أتعلم

عملية ضرب المصفوفات ليست تبديليّة.

أتعلم

حاصل ضرب مصفوفتين غير صفريتين قد يكون مصفوفة صفرية.

أتعلم

المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية، ويرمز لها بالرمز $م_٢$، ويطلق عليها أيضاً اسم **مصفوفة الوحدة**.

أتعلم

تتوزع عملية ضرب المصفوفات على عملية الجمع، بحيث تكون عمليتا الجمع والضرب معرفتان.

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة ثنائيّة مربعة، فإن **محدد المصفوفة** $ﺃ = \begin{bmatrix} ﺃ_{١١} & ﺃ_{٢١} \\ ﺃ_{١٢} & ﺃ_{٢٢} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقيّ ويرمز له بالرمز $|ﺃ|$ حيث $|ﺃ| = (ﺃ_{١١} \times ﺃ_{٢٢}) - (ﺃ_{١٢} \times ﺃ_{٢١})$.

تعريف

تُسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر بالمصفوفة **المنفردة**.

أتعلم

إذا كانت ﺃ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، ك عدد حقيقي ،فإن $|ك ﺃ| = ك^٢|ﺃ|$

تعريف

إذا كانت ﺃ مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة ﺃ إذا كان $ﺃ \times ب = ب \times ﺃ = م_٢$، حيث $م_٢$ المصفوفة المحايدة.

ويرمز للنظير الضربيّ للمصفوفة ﺃ بالرمز $ﺃ^{-١}$، أي أن $ﺃ \times ﺃ^{-١} = ﺃ^{-١} \times ﺃ = م_٢$

أتعلم

المصفوفة المنفردة ليس لها نظير ضربي.

تعريف

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$ ، حيث |أ| $\neq$ صفر، فإن: أ$^{-١}$ = $\frac{١}{|أ|}$ $\begin{bmatrix} -أ_{٢١} & أ_{٢٢} \\ أ_{١١} & -أ_{١٢} \end{bmatrix}$

أتعلـــم

$(أ^{-١})^{-١} = أ$

طريقة النظير الضربي لحل نظام المعادلات :

١- نرتب المعادلة على الصورة أ × ع = جـ

٢- نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات أوهو أ$^{-١}$.

٣- نضرب طرفي المعادلة من اليمين بالنظير الضربي أ$^{-١}$.

$(أ^{-١} \times أ) \times ع = أ^{-١} \times جـ$

قاعدة كريمر:

تستخدم قاعدة كريمر لحلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، والذي يمكن كتابته بالصورة المصفوفية كالآتي: أ . ع = جـ، حيث:

أ :مصفوفة المعاملات، ع: مصفوفة المتغيرات، جـ: مصفوفة الثوابت، |أ| $\neq$ صفر فيكون:

س = $\frac{|أ_س|}{|أ|}$ و ص = $\frac{|أ_ص|}{|أ|}$ حيث:

أس: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

أص:المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

أتذكّر:

لتكن أ ، م، ن ∈ ح ، أ ≠ ١ فإن:

١) $(أ)^م \times (أ)^ن = أ^{م+ن}$

٢) $\frac{(أ)^م}{(أ)^ن} = أ^{م-ن}$

٣) $((أ)^م)^ن = أ^{م\times ن}$

٤) $(أ)^٠ = ١$

أتذكّر:

١) لـوم س = جـ تكافئ أ^جـ = س ، أ > ٠، س > ٠، أ ≠ ١

٢) لـوم (س × ص) = لـوم س + لـوم ص

٣) $لـو_م (\frac{س}{ص}) = لـو_م (س) - لـو_م (ص)$

٤) $لـو_م س^ن = ن \times لـو_م س$ ، س > ٠

تعريف

المتسلسلة ($\sum_{ر=١}^{ن}$ حـر) تمثّل مجموع حدود المتتالية (حـر) المقابلة لها، ويرمز لها بالرمز($\sum_{ر=١}^{ن}$ حـر) ،

ويعبر جـن عن مجموع حدودها.

أتذكّر:

المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقداراً ثابتاً دائماً.

ويرمز لها بالرمز حـن = أ + (ن – ١) د، حيث أ: الحد الأول، د: الأساس، ن: رتبة الحد.

أتعلـــم

تعرف المتسلسلة الحسابية بأَنها مجموع المتتالية الحسابية المرتبطة بها.

أتعلـــم

مجموع أَول ن حداً من حدود متسلسلة حسابية حدها الأَول أ وأَساسها د ، يعطي بالقانون:

$$ج_ن = \frac{ن}{٢}\left(٢أ + (ن-١) \times د\right).$$

نتيجة: يمكن إِيجاد مجموع أَول ن حدود من متسلسلة حسابية حدها الأَول أ ، و حدها الأَخير **ل** بالقاعدة:

$$ج_ن = \frac{ن}{٢}\left(أ + ل\right)$$

أتذكّر:

المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي تكون النسبة بين أي حدين متتاليين فيها متساوية دائماً.

ويرمز لها بالرمز $ح_ن = أ\, ر^{(ن-١)}$، حيث أ: الحد الأول، ر: الأساس، ن: رتبة الحد

أتعلـــم

تعرف المتسلسلة الهندسية بأَنها مجموع المتتالية الهندسية المرتبطة بها.

أتعلـــم

مجموع أَول ن حد من حدود متسلسلة هندسية حدها الأَول أ وأَساسها ر ،

يعطي بالقانون $ج_ن = أ\left(\frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر}\right)$، $ر \neq ١$

تعريف

العلامة المعيارية: إِذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات يساوي (μ) وانحرافها المعياريσ،

فإن العلامة المعيارية(ع) المقابلة للعلامة الخام (س) تمثِّل عدد الانحرافات المعيارية عن الوسط الحسابي.

وبالرموز فإِنّ: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

أتعلـــم

الوسط الحسابي لجميع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفر، وانحرافها المعياري يساوي واحد.

تعريف

منحنى التوزيع الطبيعي المعياري هو منحنى تكراري لتوزيع العلامات المعيارية مقابل تكراراتها، بوسط حسابي يساوي صفر، وانحراف معياري يساوي واحد.

خصائص المنحنى الطبيعي :

١ـ متماثل حول ع = ٠

٢-يقسم المحور الافقي فيه بمقدار انحراف معياري واحد بكل وحدة .

٣ـ المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور الافقي تساوي وحدة مربعة واحدة .

أتعلـــم

نسبة المساحة المحصورة تحت منحنى التوزيع الطبيعي عندما $(ع < ع_١)$ إلى المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي المساحة تحت $(ع = ع_١)$

تصميم الأستاذ\ عبد الرحمن عبد العاطي جوال/٠٥٩٧٢٢٦٧٩٦