## الورقة الأولى + الثانية

# كراسة السراج

## نماذج اختبارات الضفة الغربية – الفرع العلمي

## -- مـادة الرياضيات --

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم / محافظة طولكرم

الامتحان الموحد في مبحث الرياضيات
للصف الثاني الثانوي العلمي (التوجيهي)
الـــورقةا لاولى

التاريخ: ٣ / ٥ / ٢٠٢١
مدة الامتحان : ساعتان ونصف
مجموع العلامات : ( ١٠٠ علامة )

---

**ملاحظة : يتكون الاختبار من ثمانية أسئلة أجب عن خمسة منها .**

**القسم الأول : يتكون هذا القسم من ستة أسئلة ،أجب عن ( أربعة )على ان يكون السؤال الأول اجباريا**

**السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة ثم ضع إشارة ( × ) في المكان المخصص في دفتر الإجابة : ( ٢٠ علامة )**

**١ ) اذا كان $ق(س) = |س - ٢| + [س]$ ما متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من صفر الى -٣ ؟**

أ ) ـ ٢ ب ) صفر جـ ) $\frac{١٠}{٣}$ د ) ١

**٢ ) أي من الاقترانات التالية قابلا للاشتقاق على مجاله ؟**

أ ) $ق(س) = \sqrt{س + ١}$ ب) $ق(س) = \sqrt{س^{٢} + ٤س + ٤}$ جـ) $ق(س) = |س + ١|$ د) $ق(س) = \frac{١}{س}$

**٣) اذا كان** $ص = ظا(س ص) + ٢$ ، ما ميل المماس المرسوم لمنحنى العلاقة عند النقطة ( ٠ ، ٢ ) ؟

أ ) صفر ب ) $\frac{١}{٤}$ جـ) ٢ د) ١

**٤) اذا كان** $ل(س) = ق(س^{٢}) - ق^{٢}(س)$ **اذاعلمت ان** $لَ(١) = ٦$ ، $ق(١) = ٢$ ، جد $قَ(١)$ حيث س > صفر .

أ ) -٣ ب ) -٦ جـ) ٣ د) – ١٨

**٥)** اذا كان $ق(س) = س^{٢} + مس$ ، ما قيمة م اذا علمت أن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + ٣هـ) - ق(١)}{٢هـ} = ٦$ ؟

أ ) ٤ ب ) ٢ جـ) ٥ د) ٦

**٦ ) يتحرك جسيم على خط الاعداد بحيث ان بعده عن نقطة الأصل ف بالامتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة**
$ف(ن) = \sqrt{٢ن^{٢} + ١٨}$ ، ما بعد الجسم عن نقطة الاصل عندما تكون سرعته ١ م/ث ؟

**أ ) ٣ م ب) ٩ م جـ) ٦ م د) ١٨ م**

**٧ ) اذا كان** $ق(س) = لو_{هـ}(جاس)$ ، $س \in ]٠، \pi[$ ما الفترة التي يكون فيها الاقتران ق ( س ) متناقصا ؟

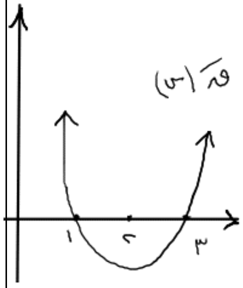
أ ) $]٠، \frac{\pi}{٣}]$ ب) $[٠، \pi[$ جـ) $]٠، \frac{\pi}{٢}]$ د) $[\frac{\pi}{٢}، \pi[$

**لاحظ الصفحه التاليه**

**يتبع صفحه ( ٢ ) ......................**

**٨)اذا كان ق(س) =** { س$^{٢}$ − ٢س ، ٠ ≤ س < ٢ ؛ ٢س − ٤ ، ٢ ≤ س < ٤ ما مجموعة قيم س التي يكون للاقتران ق (س) نقطة حرجة في مجاله ؟

**أ )** {٠،١،٢،٤}      **ب)** {٠،١}      **جـ)** {٠،١،٤}      **د)** {٠،٢}



**٩) الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س)** ما مجموعة حل المتباينة ق$''$ (س) ≥ ٠ ؟

**أ )** ]−∞، ٢[      **ب)** [−∞، ٢]      **جـ)** ]١، ٣[      **د)** [٢، ∞]

**١٠) اذا كان ق(س) = س هـ$^{-س}$ ، س ∈ ]٠، ٢[ ما القيمة العظمى المطلقة للاقتران ق ( س ) ؟**

**أ ) صفر**      **ب)** ١      **جـ)** $\frac{١}{هـ}$      **د)** $\frac{١}{هـ^{٢}}$

**السؤال الثاني ( ٢٠ علامة ) :**

**أ) قذف جسم راسيا الى أعلى من قمة برج ارتفاعه ٢٥ م عن سطح الارض بحيث ان ارتفاعه ف بالامتار عن قمة البرج بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن$^{٢}$ جد :-**

**١) اقصى ارتفاع يصله الجسم عن قمة البرج .**

**٢) سرعة الجسم عندما يصل الى سطح الأرض .** **( ٨ علامات )**

**ب) ليكن ق(س) = س$^{٣}$ − ٦س$^{٢}$ + ٩س − ٢ س ∈ ح** جد :-

**١) فترات التزايد و التناقص للاقتران ق ( س ) .**

**٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق ( س ) .**

**٣) مجالات التقعر للاعلى و للاسفل لمنحنى ق ( س ) .**

**٤) نقطة / نقط الانعطاف ( ان وجدت ) لمنحنى ق ( س )** **( ١٢ علامة )**

**السؤال الثالث ( ٢٠ علامة ) :**

**أ ) اذا كان هـ(س) = س$^{٣}$ + أ ق(س) ، وكان متوسط تغير الاقتران هـ ( س ) في الفترة ]١، ٣[** يساوي ١٦ ، و متوسط تغير الاقتران ق ( س ) في الفترة ]١، ٣[ يساوي ٦ ، جد قيمة أ . **( ٧ علامات )**

**ب) اذا كان الاقتران ق(س) = أس$^{٣}$ + بس$^{٢}$ + ١ له نقطة انعطاف عند النقطة ( -١ ، ٣ ) جد قَ(١) .** **( ٦ علامات )**

**جـ) جد** $\frac{دص}{دس}$ لمنحنى العلاقة **س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٥** عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم ص = س − ١ حيث س > صفر .
**( ٧ علامات )**

**السؤال الرابع ( ٢٠ علامة ) :**

**أ ) باستخدام قاعدة لوبيتال جد** $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{\text{س}\,\text{جا}٢\text{س}}$ . **( ٦علامات )**

**ب ) اذا كان** $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢\text{س} ، \text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$ ، جد $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س})$ **عند س = ١ . ( ٦ علامات )**

**جـ ) جد النقطة التي تقع على منحنى** $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١٠}$ و بعدها عن النقطة ( ١ ، ٠ ) أقل ما يمكن . **(٨ علامات )**

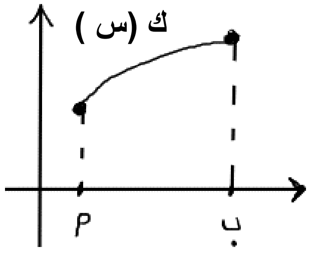
**السؤال الخامس : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) جد اكبر قيمة و أصغر قيمة للمقدار** $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$ . **( ١٠ علامات )**

**ب ) اذا كان المماس لمنحنى** $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + ٢$ عند النقطة $(١ ، \frac{١}{٢})$ **يوازي العمودي على المماس لمنحنى** $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١٠$ **عند النقطة ( -٢ ، ٢ ) ، جد قيمتي أ ، ب . ( ١٠ علامات )**

**السؤال السادس : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) الشكل المجاور يمثل منحنى ك (س ) المعرف على الفترة** $[\text{أ} ، \text{ب}]$



بين أن $\frac{\text{ك}'(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})} - ٥\text{س}$ **هو اقتران متناقص على** $]\text{أ} ، \text{ب}[$ . **( ٧علامات)**

**ب ) باستخدام اختبار المشتقة الثانية اثبت ان للاقتران** $\text{ق}(\text{س}) = \text{قا}^{٢}\text{س}$ قيمة قصوى محلية عند س = صفر مبينا نوعها و ما قيمتها ؟ **( ٧ علامات )**

**جـ ) اذا كان** $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أ}\text{س}}$ ، جد قيمة الثابت أ التي تحقق صحة المعادلة $\text{ص}'' - ٥\text{ص}' + ٦\text{ص} = ٠$ **( ٦ علامات )**

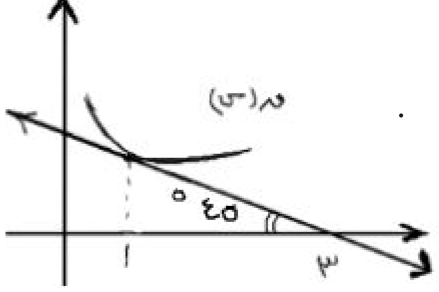
**القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن سؤال واحد فقط**

**السؤال السابع : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) اذا كانت** $\text{س} = \text{جتاص} ، \text{ص} \in \left] ٠ ، \frac{\pi}{٢} \right[$ بين أن $\bar{\text{ص}} = \frac{-١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$ . **( ٦علامات )**

**ب ) الشكل المجاور يمثل منحنى ق ( س ) بالاعتماد عليه جد قيمة المقدار** $\text{ق}(١) + \bar{\text{ق}}(١)$ .

( ٦علامات )



**جـ ) اذا كان المماس لمنحنى** $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(-\text{س})$ **عندما س = -١ يقطع محوري السينات و الصادات في النقطتين ب ، جـ على الترتيب ، جد مساحة المثلث م ب جـ ، حيث م نقطة الأصل .** **( ٨علامات )**

---

**السؤال الثامن : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) اذا كان** $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - ١)^{٢} [\text{س}]$ **جد** $\bar{\text{ق}}(١)$

**( ٦علامات )**

**ب) باستخدام التفاضل أثبت أن الاقتران** $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٣} + ٥٠$ ليس له جذور على ح.

**( ٦علامات )**

**جـ) خزان على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوح من الأعلى سعته ١٩٢ $\pi$ م$^{٣}$ ، اذا علمت ان سعر كل ١ م$^{٢}$ من البلاستيك المستخدم في صنع القاعدة يعادل ٣ أمثال سعر ١ م ٢ من البلاستيك المستخدم لصنع الجوانب ، جد ابعاد الخزان ذو الأقل تكلفة .**

**( ٨علامات )**

**انتهت الأسئلة**

## السؤال الثاني ( ٢٠ علامة ) :

**أ) قذف جسم راسيا الى أعلى من قمة برج ارتفاعه ٢٥ م عن سطح الارض بحيث ان ارتفاعه ف بالامتار عن قمة البرج بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن$^{٢}$ جد :-**

**١) اقصى ارتفاع يصله الجسم عن قمة البرج .**

**٢) سرعة الجسم عندما يصل الى سطح الأرض .** **( ٨ علامات )**

[أ] الحل ① عند اقصى ارتفاع (ع = ٠)

ع = ف'(ن) = ٢٠ − ١٠ن

صفر = ٢٠ − ١٠ن ⟵ ن = ٢ ث

ف(٢) = ٢٠×٢ − ٥×٤ = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠م

② عند وصول الجسم سطح الأرض فإن ف = −٢٥

٢٠ن − ٥ن$^{٢}$ = −٢٥ ⟵ −٥ن$^{٢}$ + ٢٠ن + ٢٥ = ٠ ⟵ −٥(ن$^{٢}$ − ٤ن − ٥) = ٠ ⟵ (ن−٥)(ن+١) = ٠

ن = −١ ✗ او ن = ٥ ⟵ ع(٥) = ٢٠ − ٥٠ = −٣٠م/ث

**ب) ليكن ق(س) = س$^{٣}$ − ٦س$^{٢}$ + ٩س − ٢ س ∈ ح جد :-**

**١) فترات التزايد و التناقص للاقتران ق ( س ) .**

**٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق ( س ) .**

**٣) مجالات التقعر للاعلى و للاسفل لمنحنى ق ( س ) .**

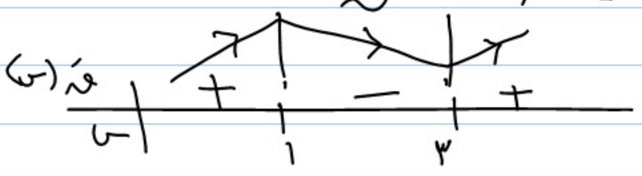
**٤) نقطة / نقط الانعطاف ( ان وجدت ) لمنحنى ق ( س )** **( ١٢ علامة )**

الحل ق(س) متصل على ح كثير حدود

ق'(س) = ٣س$^{٢}$ − ١٢س + ٩

٠ = ٣(س$^{٢}$ − ٤س + ٣)

٠ = ٣(س−٣)(س−١) ⟵ س = ١ ، ٣



١) ق(س) متزايد ∀ س ∈ ]−∞، ١]

ق(س) متزايد ∀ س ∈ [٣، ∞[

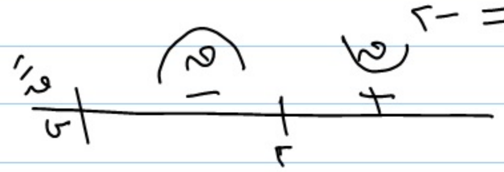
ق(س) متناقص ∀ س ∈ [١، ٣]

٢) ق(١) عظمى محلية = ١ − ٦ + ٩ − ٢ = ٢

ق(٣) صغرى محلية = ٢٧ − ٥٤ + ٢٧ − ٢ = −٢

٣) ق''(س) = ٦س − ١٢

٠ = ٦س − ١٢ ⟵ س = ٢



ق(س) مقعر للأعلى ∀ س ∈ ]٢، ∞[

ق(س) مقعر للأسفل ∀ س ∈ ]−∞، ٢[

٤) (٢، ق(٢)) = (٢، ٠) نقطة انعطاف

ق(٢) = ٨ − ٦×٤ + ٩×٢ − ٢ = ٨ − ٢٤ + ١٨ − ٢ = صفر

لأن ① ق(س) متصل عند س = ٢ ② تغيرت اشارة ق''(س) حول س = ٢

## السؤال الثالث ( ٢٠ علامة ) :

**أ ) اذا كان هـ(س) = س ^٣^ + أ ق(س) ، وكان متوسط تغير الاقتران هـ ( س ) في الفترة [١،٣]** يساوي ١٦ ، و متوسط تغير الاقتران ق ( س ) في الفترة [١،٣] يساوي ٦ ، جد قيمة أ . **( ٧ علامات )**

الحل

$$\text{م.ت}_{\text{هـ}}[١،٣] = \frac{\text{هـ}(٣)-\text{هـ}(١)}{٣-١} = \left(٢٧ + \text{أ ق}(٣) - (١ + \text{أ ق}(١))\right) \times \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{٢٦}{٢} + \text{أ}\,\frac{(\text{ق}(٣)-\text{ق}(١))}{٢} = ١٣ + \text{أ}\ \text{م.ت}_{\text{ق}}[١،٣] = ١٦$$

$$\text{أ} \times \text{م.ت}_{\text{ق}}[١،٣] = ٣ \Rightarrow \text{أ} \times ٦ = ٣ \Rightarrow \text{أ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

**ب) اذا كان الاقتران ق(س) = أس ^٣^ + بس ^٢^ + ١ له نقطة انعطاف عند النقطة ( -١ ، ٣ ) جد قَ(١) . ( ٦ علامات )**

الحل :

$\text{ق}(-١) = ٣ \Rightarrow -\text{أ} + \text{ب} + ١ = ٣ \Rightarrow -\text{أ} + \text{ب} = ٢$ --- ①

$\text{ق}''(-١) = ٠$ (لأنها انعطاف لكثير حدود)

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{أ}\text{س}^٢ + ٢\text{ب}\text{س}$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{أ}\text{س} + ٢\text{ب} \Rightarrow \text{ق}''(-١) = (-٦\text{أ} + ٢\text{ب} = ٠) \times \frac{١}{-٢} \Rightarrow ٣\text{أ} - \text{ب} = ٠$ --- ②

بحل المعادلتين ① و ② $\begin{array}{r} -\text{أ} + \cancel{\text{ب}} = ٢ \\ ٣\text{أ} - \cancel{\text{ب}} = ٠ \\ \hline \end{array} \Rightarrow ٢\text{أ} = ٢ \Rightarrow \text{أ} = ١ \Rightarrow -١ + \text{ب} = ٢ \Rightarrow \text{ب} = ٣$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + ٣\text{س}^٢ + ١ \Rightarrow \text{قَ}(١) = ٣\text{س}^٢ + ٦\text{س}\Big|_{\text{س}=١} = ٣ + ٦ = ٩$

**جـ) جد** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لمنحنى العلاقة **س ^٢^ + ص ^٢^ = ٢٥** عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم ص = س – ١ حيث س > صفر .
**( ٧ علامات )**

الحل : نجد التقاطع بين $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢٥$ مع $\text{ص} = \text{س} - ١$

$\text{س}^٢ + (\text{س}-١)^٢ = ٢٥$

$\text{س}^٢ + \text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١ = ٢٥$

$٢\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٢٤ = ٠$

$٢(\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢) = ٠$

$٢(\text{س}-٤)(\text{س}+٣) = ٠ \Rightarrow \text{س} = ٤ ،\ \text{س} = -٣ \times$ نرفض .

نشتق العلاقة $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢٥$ ضمنياً بالنسبة لـ س

$٢\text{س} + ٢\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠ \Rightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

نجد ص عندما س = ٤ فإن ص = ٤ - ١ = ٣

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{(٤،٣)} = \frac{-٤}{٣}$$

## السؤال الرابع ( ٢٠ علامة ) :

أ ) باستخدام قاعدة لوبيتال جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{\text{س جا}٢\text{س}}$ .   ( ٦ علامات )

الحل : $\frac{١ - \text{جتا}٠}{٠ \times \text{جا}٠} = \boxed{\frac{٠}{٠}}$

$$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{(١ - \text{جتا}٢\text{س})'}{(\text{س جا}٢\text{س})'} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{٢\text{جا}٢\text{س}}{\text{س} \times ٢\text{جتا}٢\text{س} + \text{جا}٢\text{س} \times ١} \rightarrow \boxed{\frac{٠}{٠}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{٤\text{جتا}٢\text{س}}{٢\text{س} \times -٢\text{جا}٢\text{س} + ٢\text{جتا}٢\text{س} \times ١ + ٢\text{جتا}٢\text{س}} = \frac{٤\text{جتا}٠}{٠ + ٢\text{جتا}٠ + ٢\text{جتا}٠} = \frac{٤ \times ١}{٢ + ٢} = ١$$

ب ) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢\text{س}$، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$ ، جد $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س})$ عند س = ١ .   ( ٦ علامات )

الحل $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(١) = \text{ق}'(\text{هـ}(١)) \times \text{هـ}'(١)$

$= \text{ق}'(٢) \times \text{هـ}'(١) = ٦ \times ٢ = ١٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} + ٢ \leftarrow \text{ق}'(٢) = ٦$

$\text{هـ}'(\text{س}) = ٢\text{س} \longleftarrow \text{هـ}'(١) = ٢$

ج ) جد النقطة التي تقع على منحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١٠}$ و بعدها عن النقطة ( ١ ، ٠ ) أقل ما يمكن . (٨ علامات )

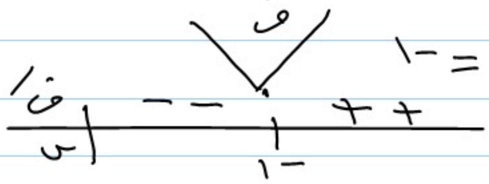
الحل $\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢}}$

$= \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١ + \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١٠}$

$\text{ف} = \sqrt{٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١١}$

$\text{ف}' = \frac{٤\text{س} + ٤}{٢ \times \sqrt{٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١}} \longleftarrow \text{موجب} \neq ٠$

$\text{ف}' = ٠ \longleftarrow ٤\text{س} + ٤ = ٠ \longleftarrow \text{س} = -١$



اذن النقطة $(-١ ، \text{ص}(-١)) = (-١ ، \sqrt{٥})$

$\text{ص}(-١) = \sqrt{١ - ٦ + ١٠} = \sqrt{٥}$

## السؤال الخامس : ( ٢٠ علامة )

أ ) جد اكبر قيمة و أصغر قيمة للمقدار $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}\sqrt{١ - \text{س}^٢}$ . ( ١٠ علامات )

الحل نجد مجال ق(س)

$١ - \text{س}^٢ \geq ٠$ ، ـــه $١ - \text{س}^٢ = ٠$ ـــه $\text{س}^٢ = ١$ ـــه $\text{س} = -١ ، ١$

$١ - \text{س}^٢$ : × − | −١ | + | ١ | − ×

مجال ق(س) = [−١ ، ١]

ق(س) متصل على [−١ ، ١] لأنه متصل $\times\sqrt{\text{متصل}}$ = متصل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\cancel{٢}\text{س} \times -٢\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{١-\text{س}^٢}} + \sqrt{١-\text{س}^٢} \times ٢$$

$$= \frac{-٢\text{س}^٢ + ٢(١-\text{س}^٢)}{\sqrt{١-\text{س}^٢}} = \frac{-٢\text{س}^٢ + ٢ - ٢\text{س}^٢}{\sqrt{١-\text{س}^٢}} = \frac{-٤\text{س}^٢ + ٢}{\sqrt{١-\text{س}^٢}}$$

س الحرجة ١) ق'(س) = ٠ ـــه $-٤\text{س}^٢ + ٢ = ٠$ ـــه $\text{س}^٢ = \frac{١}{٢}$ ـــه $\text{س} = \pm\frac{١}{\sqrt{٢}} \in ]-١ ، ١[$

٢) ق'(س) = غ.م ـــه عند س = −١ ، ١ ( أطراف مجال وهي اصفار مقام ق'(س) )

$\text{ق}(\frac{١}{\sqrt{٢}}) = \frac{٢}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}\times\sqrt{٢}} = \frac{٢}{٢} = ١$

$\text{ق}(\frac{-١}{\sqrt{٢}}) = \frac{-٢}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{\frac{١}{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}\times\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{٢} = -١$

$\text{ق}(-١) = -٢ \times \sqrt{١-١}$ = صفر

$\text{ق}(١) = ٢ \times \sqrt{١-١}$ = صفر

١ عظمى مطلقة ، −١ صغرى مطلقة .

ب ) اذا كان المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^٢ + \text{ب}\text{س} + ٢$ عند النقطة $(١ ، \frac{١}{٢})$ يوازي العمودي على المماس لمنحنى $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٦\text{س} + ١٠$ عند النقطة ( -٢ ، ٢ ) ، جد قيمتي أ ، ب . ( ١٠ علامات )

ميل المماس لمنحنى هـ(س) $\Big|_{\text{س}=-٢} = \text{هـ}'(-٢) = ٢\text{س} + ٦ \Big|_{\text{س}=-٢} = -٤ + ٦ = ٢$

ميل العمودي $= \frac{-١}{٢}$

ميل المماس لمنحنى ق(س) $\Big|_{\text{س}=١} = \frac{-١}{٢}$

ميل المماس لمنحنى ق $\Big|_{\text{س}=١} = \text{ق}'(١) = ٢\text{أ}\text{س} + \text{ب} \Big|_{\text{س}=١} \leftarrow ٢\text{أ} + \text{ب} = \frac{-١}{٢}$

$-٤\text{أ} - ٢\text{ب} = ١$ ——— ①

$\text{ق}(١) = \frac{١}{٢}$ ـــه $\text{أ} + \text{ب} + ٢ = \frac{١}{٢} \leftarrow ٢\text{أ} + ٢\text{ب} + ٤ = ١$ ـــه $٢\text{أ} + ٢\text{ب} = -٣$ ——— ②

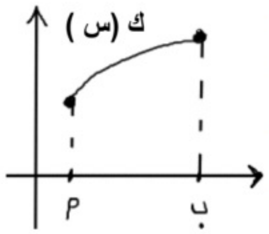
بحل المعادلتين ① ، ② $\left\{ \begin{array}{l} -٤\text{أ} - ٢\text{ب} = ١ \\ ٢\text{أ} + ٢\text{ب} = -٣ \end{array} \right.$ ـــه $-٢\text{أ} = -٢$ ـــه $\text{أ} = ١$

$٢ + ٢\text{ب} = -٣$ ـــه $٢\text{ب} = -٥$ ـــه $\text{ب} = \frac{-٥}{٢}$

(٦)

## **السؤال السادس : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) الشكل المجاور يمثل منحنى ك (س ) المعرف على الفترة [أ، ب]**



بين أن $\frac{\text{ك}'(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})}$ − ٥س **هو اقتران متناقص على ]أ، ب[ .** **( ٧علامات )**

ع(س) = $\frac{\text{ك}'(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})}$ − ٥س

ع َ(س) = $\frac{\text{ك}(\text{س}) \times \text{ك}''(\text{س}) - \text{ك}'(\text{س}) \times \text{ك}'(\text{س})}{(\text{ك}(\text{س}))^{2}}$ − ٥

= $\frac{\text{موجب} \times \text{سالب} - (\text{موجب} \times \text{موجب})}{\text{موجب}}$ + سالب = سالب + سالب + سالب = سالب

بما ان ع َ(س) < ٠ ← ع(س) متناقص في ]أ، ب[ ،

ك(س) > ٠ ، لأنه فوق محور السينات .

ك َ(س) > ٠ . لأن ك(س) متزايد

ك َ َ(س) < ٠ لأن ك(س) مقعر للأسفل

**ب ) باستخدام اختبار المشتقة الثانية اثبت ان للاقتران ه(س) =قا$^{٢}$س** قيمة قصوى محلية عند س = صفر مبينا نوعها

و ما قيمتها ؟ **( ٧ علامات )**

الحل

ه َ(س) = ٢(قاس)$^{١}$ × قاس ظاس = ٢ قا$^{٢}$س ظاس

ه َ(٠) = ٢ × قا$^{٢}$٠ × ظا٠ = ٢ × ١ × ٠ = ٠

ه َ َ(س) = ٢ [قا$^{٢}$س × قا$^{٢}$س + ظاس × ٢ قاس × قاس ظاس]

= ٢ [قا$^{٤}$س + ٢ قا$^{٢}$س ظا$^{٢}$س]

ه َ َ(٠) = ٢ [قا$^{٤}$٠ + ٢ قا$^{٢}$٠ × ظا$^{٢}$٠]

= ٢ [١ + ٠] = ٢

بما أن { ه َ(٠) = ٠ ، ه َ َ(٠) > ٠ } ← ه(٠) صغرى محلية

ه(٠) = قا$^{٢}$٠ = ١

**جـ ) اذا كان ص = هـ$^{\text{أس}}$** ، جد قيمة الثابت أ التي تحقق صحة المعادلة ص$''$ − ٥ص َ + ٦ص = ٠ **( ٦ علامات )**

الحل : ص َ = أ هـ$^{\text{أس}}$

ص َ َ = أ$^{٢}$ هـ$^{\text{أس}}$

أ$^{٢}$ هـ$^{\text{أس}}$ − ٥أ هـ$^{\text{أس}}$ + ٦ هـ$^{\text{أس}}$ = ٠ ← هـ$^{\text{أس}}$ (أ$^{٢}$ − ٥أ + ٦) = ٠ ، هـ$^{\text{أس}}$ ≠ ٠

(أ$^{٢}$ − ٥أ + ٦) = ٠ ← (أ − ٣)(أ − ٢) = ٠ ← أ = ٣ ، ٢

## القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن سؤال واحد فقط

**السؤال السابع : ( ٢٠ علامة )**

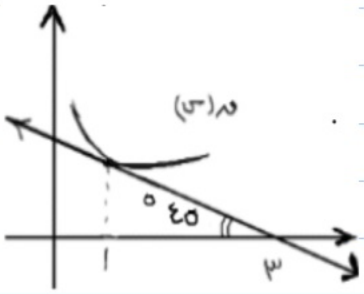
**أ ) اذا كانت س = جتاص، ص ∋** $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$ بين أن $صَ = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ . **( ٦ علامات )**

الحل نشتق العلاقة (س = جتاص) بالنسبة لـ س ← ١ = − جاص × $\frac{دص}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{جاص}$

$س^{٢} = جتا^{٢}ص$ ⟵ $س^{٢} = ١ - جا^{٢}ص$ ⟵ $جا^{٢}ص = ١ - س^{٢}$ ← $جاص = {}^{+}\sqrt{١ - س^{٢}}$ لأن ص ∋ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$



**ب ) الشكل المجاور يمثل منحنى ق ( س ) بالاعتماد عليه جد قيمة المقدار ق(١) + قَ(١) .**

**( ٦ علامات )**

ميل المماس$|_{س=١}$ = قَ(١) = ظا ١٣٥° = − ظا ٤٥° = −١

النقطة (٣،٠) تقع على معادلة المماس

معادلة المماس : ص − ٠ = −١ (س − ٣) ← ص = −س + ٣

نجد ص عندما س = ١ ⟸ ص = ٢ ← ق(١) = ٢

ق(١) + قَ(١) = ٢ + −١ = ١

**جـ ) اذا كان المماس لمنحنى ق(س) =** $لو_{هـ}(-س)$ **عندما س = -١ يقطع محوري السينات و الصادات في النقطتين ب ، جـ على الترتيب ، جد مساحة المثلث م ب جـ ، حيث م نقطة الأصل .** **( ٨ علامات )**

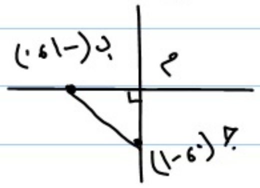
الحل : نجد معادلة المماس : ميل المماس$|_{س=-١}$ = قَ(−١) = $\frac{-١}{-س}\Big|_{س=-١} = \frac{١}{س}\Big|_{س=-١} = -١$

نجد نقطة التماس : ق(−١) = $لو_{هـ}١$ = صفر ⟵ (−١، ٠) نقطة التماس

معادلة المماس : ص − ٠ = −١ (س − −١) ⟶ ص = −س − ١

تقاطع المماس مع المحورين : ١) مع محور السينات ص = ٠ ⟶ س = −١

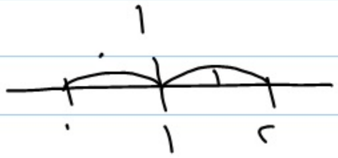
٢) " " الصادات س = ٠ ⟶ ص = −١



م = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ١ = $\frac{١}{٢}$ وحدة مساحة .

**السؤال الثامن : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) اذا كان $ق(س) = (س - ١)^{٢} [س]$ جد $قَ(١)$ ( ٦ علامات )**



الحل نعيد تعريف $ق(س)$ حول جوار $س = ١$

طول الدرجة $= ١$

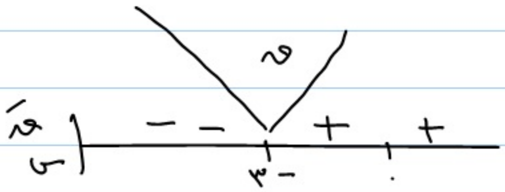
$$ق(س) = \begin{cases} صفر (س-١)^{٢} = ٠ & ، \quad ٠ \le س < ١ \\ ١ \times (س-١)^{٢} & ، \quad ١ \le س < ٢ \end{cases}$$

$ق(س)$ متصل عند $س = ١$ لأن $\lim\limits_{س \to ١^{-}} = \lim\limits_{س \to ١^{+}} (س-١)^{٢} = ق(١) = ٠$

$$قَ(س) = \begin{cases} صفر & ، \quad ٠ < س < ١ \\ ٢(س-١)^{١} \times ١ & ، \quad ١ < س < ٢ \end{cases}$$

$قَ(١)^{-} = قَ(١)^{+} = ٠ \rightarrow قَ(١) = صفر$

**ب) باستخدام التفاضل أثبت أن الاقتران $ق(س) = س^{٤} + ٤س^{٣} + ٥٠$ ليس له جذور على ح. ( ٦ علامات )**



الحل $ق(س)$ متصل على ح كثير حدود

$قَ(س) = ٤س^{٣} + ١٢س^{٢}$

$= ٤س^{٢}(س + ٣)$

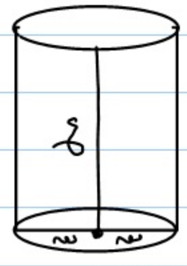
$قَ(س) = ٠ \longrightarrow س = ٠$ ، او $س + ٣ = ٠ \longrightarrow س = -٣$

يوجد للاقتران $ق(س)$ قصوى وحيدة عند $س = -٣$ لأن $ق(-٣)$ صغرى مطلقة

$ق(-٣) = (-٣)^{٤} + ٤ \times (-٣)^{٣} + ٥٠ = ٨١ - ١٠٨ + ٥٠ = ٢٣$

بما أن أصغر قيمة لمنحنى $ق(س) = ٢٣$ إذن منحنى $ق(س)$ لا يقطع محور السينات (أي لا يوجد لـ $ق(س)$ جذور)

**جـ) خزان على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوح من الأعلى سعته ١٩٢ π م٣ ، اذا علمت ان سعر كل ١ م٢ من البلاستيك المستخدم في صنع القاعدة يعادل ٣ أمثال سعر ١ م ٢ من البلاستيك المستخدم لصنع الجوانب ، جد ابعاد الخزان ذو الأقل تكلفة ( ٨ علامات )**



الحل: تكلفة الخزان = تكلفة القاعدة + تكلفة الجوانب

$ت = ٣ \times نق^{٢} \pi + ٢نق \pi \times ع$

$= ٣\pi نق^{٢} + ٢نق \pi \times \frac{١٩٢}{نق^{٢}}$

$= \pi \left(٣نق^{٢} + \frac{٣٨٤}{نق}\right)$

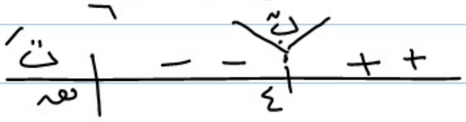
$تَ = \pi \left(٦نق - \frac{٣٨٤}{نق^{٢}}\right)$

$تَ = \pi \left(\frac{٦نق^{٣} - ٣٨٤}{نق^{٢}}\right) \longrightarrow تَ = ٠ \leftarrow ٦نق^{٣} - ٣٨٤ = ٠ \rightarrow نق^{٣} = \frac{٣٨٤}{٦}$

$نق^{٣} = ٦٤ \rightarrow نق = ٤م \rightarrow ع = \frac{١٩٢}{١٦} = ١٢م$

حجم الخزان $= نق^{٢} \pi \times ع = ١٩٢\pi$

$ع = \frac{١٩٢}{نق^{٢}}$



اجابه السؤال الأول .

| رقم | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رمز الاجابه الصحيحه | ب | د | ج | م | ب | ج | د | ب | م | ج. |

بسم الله الرحمن الرحيم

**الورقة الأولى**

**الفرع العلمي**

**دولة فلسطين**
**وزارة التربية والتعليم**
**مديرية التربية والتعليم - سلفيت**

**المبحث : الرياضيات**
**مجموع العلامات ( ١٠٠ علامة )**
**مدة الامتحان : ساعتان ونصف**
**اليوم والتاريخ : / /**

---

**ملاحظة : عدد أسئلة الورقة (ثمانية) أسئلة ، أجب عن ( خمسةٍ ) منها فقط .**

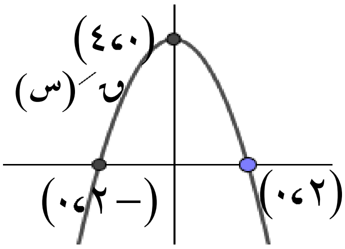
**القسم الأول : يتكون هذا القسم من ستة أسئلة ، وعلى المشترك أن يجيب عن اربعةٍ منها ، على أن يكون السؤال الأول اجبارياً**

**السؤال الاول ( اجباري) : (٢٠ علامة )**

**اختر الاجابة الصحيحة ، ثم ضع اشارة ( × ) في المكان المخصص له في ورقة الاجابة الخاصة بك :**

١) اذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = جتاس − أجاس في الفترة $\left[\pi ، \frac{\pi}{٢}\right]$ يساوي $\left(\frac{٤}{\pi}\right)$ فما قيمة الثابت أ؟

أ) ٥ ب) ٦ ج) ٣ د) $\frac{٣}{٢}$



٢) الشكل المجاور يمثل منحنى ق´(س) فما هي نقطة الانعطاف لمنحنى ق(س) ؟

أ) (٠،٤) ب) (−٢،٠)

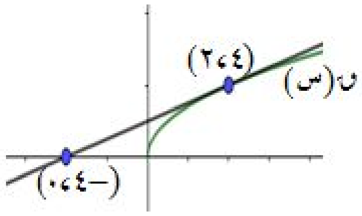
ج) (٠،ق(٠)) د) (٢،٠)

٣) إذا كانت ص جتاس − ص جاس = $\frac{١}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$ فما قيمة ص´ ؟

أ) جتاس − جاس ب) ٢قا٢س ظا٢س ج) ٢قتا٢س ظتا٢س د) −٢قتا٢س ظتا٢س

٤) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - س ، & ٠ \le س \le ١ \\ س - ١ ، & ١ < س < ٣ \end{cases}$ فما قيمة / قيم س التي يكون عندها نقطة حرجة للاقتران ق(س) ؟

أ) $\left\{٠ ، \frac{١}{٢}\right\}$ ب) $\left\{٠ ، \frac{١}{٢} ، ١\right\}$ ج) $\left\{٠ ، \frac{١}{٢} ، ١ ، ٣\right\}$ د) $\{٠ ، ١ ، ٣\}$



٥) في الشكل المجاور اذا كانت ص = ق$^٢$(س) + س فما قيمة $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٤}$ ؟

أ) −١ ب) −٤ ج) ١ د) ٢

٦) اذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (٣،٤) الواقعة عليه هي ص − ٥س + ١١ = ٠ ما قيمة $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س^٢ - س - ٦}$ ؟

أ) ٥ ب) $\frac{١}{٥}$ ج) −١ د) ١

٧) اذا كان ق(س) = س$^٣$ − س$^٢$ ، هـ(س) = $\frac{٨}{س}$ فما قيمة (هـ´ ∘ ق´)´(١) ؟

أ) ٤ ب) ١٦ ج) ٦٤ د) ١٢٨

٨) اذا كان ق(س) = $س^{جـ+٣}$ ، جـ > −٢ وكان ق″(٨) = ق″(٤) فما قيمة الثابت جـ ؟

أ) −٣ ب) ١ جـ) −١ د) ٤

٩) اذا كان ق(س) = ٣ ( أ − ٢)$س^{٢}$ + ٨س + ٥ فما قيمة الثابت أ التي تجعل ق(س) مقعراً للأسفل ؟

أ) ]−∞ ، ٢[ ب) ]٢، ∞[ جـ) ]−٢ ، ٢[ د) ]−∞ ، ∞[

١٠) اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود له قيمة عظمى محلية عند س=١ ، ق″(٢) < ٠ فما العبارة الصحية فيما يلي ؟

أ) ق″(٢) × ق″(١) < ٠ ب) ق″(٢) × ق″(١) ≥ ٠

جـ) ق″(٢) × ق″(١) = ٠ د) ق′(٢) × ق′(١) < ٠

**السؤال الثاني : ( ٢٠ علامة )**

أ) اذا كان ق(س) = { أ$س^{٢}$ + بس − ٦ ، س ≥ ٢ ؛ أس + ب − ١٢ ، س < ٢ } جد قيمة الثوابت أ،ب علماً أن " ١٠ علامات "

ق(س) متصل على مجاله و ق′(٢) = ٦

ب) اسقط جسم من ارتفاع ٣٠٠م عن سطح الأرض بحيث كانت المسافة التي يقطعها بالأمتار " ١٠ علامات "

بعد ن ث هي ف(ن) = ٥$ن^{٢}$ جد سرعة الجسم عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٧٥م من سطح الأرض .

**السؤال الثالث : ( ٢٠ علامة )**

أ) اذا كان ق(س) = $جتا^{٢}$س − $جا^{٢}$س ، س ∋ [٠، $\pi$] جد " ١٢ علامة "

١- مجالات تزايد وتناقص ق(س) ٢- مجالات تقعر الإقتران ق(س)

ب) ص = $م^{٢}$ − ١ ، ٢م س = ٣س + ٣م جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٢ " ٨ علامات "

**السؤال الرابع : ( ٢٠ علامة )**

أ) ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان ق(س) + ق′(س) = $س^{٣}$ + ٦$س^{٢}$ − ٣س + ٢ " ١٢ علامة "

جد القيم القصوى للاقتران ق(س)

ب) (ق ∘ هـ)(س) = س ، ق′(س) = ١ + $(ق(س))^{٢}$ جد هـ′(س) " ٨ علامات "

**السؤال الخامس : ( ٢٠ علامة )**

أ) هـ(١) = −٣، هـ′(١) = ٢ ، ق′(−٣) = ٥ جد $\frac{د}{دس}\left(\frac{هـ(س^{٢})}{س} - ق(س-٤)\right)\Big|_{س=١}$ " ٨ علامات "

ب) اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة يمر منحناه بالنقطة (١،٥) وله نقطة انعطاف " ١٢ علامة "

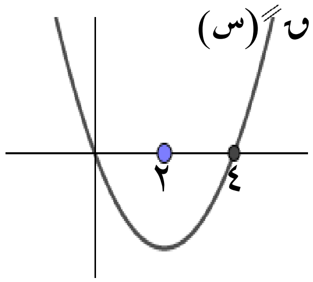
عند س = ٢ أن معادلة المماس عند نقطة الانعطاف هي ٣س + ص = ٧ جد قاعدة ق(س)

**السؤال السادس : ( ٢٠ علامة )**

أ) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{م}(\text{س}))}{\text{س}}$ وكان $\text{م}(1) = \text{هـ}^{2}$ ، $\text{م}'(1) = 2\text{هـ}$ جد $\text{ق}'(1)$ " ٨ علامات "

ب) الشكل المجاور يمثل منحنى $\text{ق}''(\text{س})$ وأن للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ " ١٢ علامة "

٣ نقاط حرجة عند $\{-2 ، 2 ، 6\}$ حيث ق(س) كثير حدود أوجد



١) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

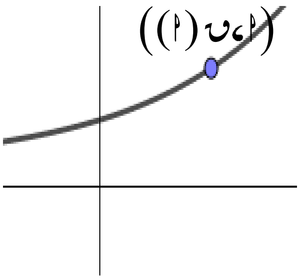
٢) فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س) .

**القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط .**

**السؤال السابع : ( ٢٠ علامة )**

أ) الشكل المجاور يمثل جزءاً من منحنى كثير الحدود ق(س) فإذا كان "١٠ علامات"

$\text{ك}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) \times \text{ق}'(\text{س})$ بين أن $\text{ك}'(\text{أ}) > 0$



ب) مثلث متساوي الساقين رأسه في نقطة الأصل وقاعدته موازيه لمحور السينات ونهايتي "١٠ علامات"

القاعدة تقعان على منحنى الإقتران $\text{س}^{2} = 36 - 12\text{ص}$ ، أوجد أكبر مساحة ممكنه للمثلث

**السؤال الثامن : ( ٢٠ علامة )**

أ)اذا كان ص = قاس + ظاس أثبت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{1 - \text{جاس}}$ "١٠ علامات"

ب) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + 1}$ ، س ∋ [٣ ، ب] جد قيمة الثابت ب علماً أن "١٠ علامات"

متوسط تغير ق(س) في نفس الفترة يساوي $\frac{1}{2 + \sqrt{5}}$

انتهت الأسئلة

مديرية التربية والتعليم / للقنيطرة　　　بسم الله الرحمن الرحيم　　　العام الدراسي

الاجابة النموذجية لامتحان الرياضيات ٢٠٢٠ / ٢٠٢١م

الصف الثاني عشر العلمي الورقة الأولى

السؤال الأول :-

① متوسط التغير للاقتران ق(س) = جتاس - أ جاس في [π/٢ ، π] يساوي $\frac{٤}{\pi}$ فما قيمة الثابت أ .

الحل :- متوسط التغير ق(س) = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{ق(\pi) - ق(\frac{\pi}{٢})}{\pi - \frac{\pi}{٢}}$

$$\frac{(جتا\,\pi - أ\,جا\,\pi) - (جتا\,\frac{\pi}{٢} - أ\,جا\,\frac{\pi}{٢})}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٤}{\pi}$$

$$\frac{(-١ - أ \times ٠) - (٠ - أ \times ١)}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٤}{\pi}$$

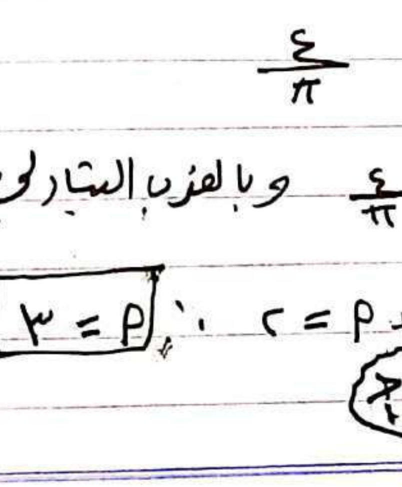
$\frac{-١ - - أ}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٤}{\pi}$ وبالضرب التبادلي

$-١ + أ = \frac{\cancel{٤}}{\cancel{\pi}} \times \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{٢}}$ ⟸ $-١ + أ = ٢$ ∴ $\boxed{أ = ٣}$

ضع ج

---

② الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س) فما هي نقطة الانعطاف



نلاحظ ان المشتقة متزايدة من ]-∞ ، ٠]

ومتناقصة من [٠ ، ∞[

∴ اشارة قً(س) هي

∪　　∩

+ + + + * - - - - - -

اشارة قً(س)

∴ النقطة (٠ ، ق(٠)) هي نقطة الانعطاف لانه يوجد تحول في اشارة المشتقة الثانية من موجبا (مقعر للاعلى) الى سالبا (مقعر للاسفل

② وبما ان المشتقه الاولى موجوده عند الصفر ∴ الاقتران متصل عندما س = ٠ ∴ (٠ ، ق(٠)) هي نقطه الانعطاف (فرع جـ)

---

③ اذا كانت ص جتاس - ص جاس = $\frac{1}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$ فما قيمه صَ؟

الحل :-

$$\frac{\text{ص}\,(\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}})}{\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}}} = \frac{1}{(\text{جتاس} + \text{جاس})(\text{جتاس} - \text{جاس})}$$

متطابقه

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}$$ لكن (جتا²س - جا²س = جتا٢س)

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{جتا٢س}} = \text{قا٢س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صَ} = \text{٢ قا٢س ظا٢س}$$ (فرع ب)

---

④ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - \text{س} & \text{، } ٠ \le \text{س} \le ١ \\ \text{س} - ١ & \text{، } ١ < \text{س} < ٣ \end{cases}$ فما قيمه

س التي تكون عندها نقطه حرجه للاقتران ق(س) ؟ .

الحل: مجال الاقتران [٠ ، ٣ ] ∴ ٣ ليست نقطه حرجه

∴ فرع حـ ، د خاطئه .

النقطه الحرجه هي النقطه قَ(س) = صفر او غير موجوده

نبحث في اتصال ق(س) عندما س = ١

① ق(١) = ١² - ١ = صفر (معرف)

② $\lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \text{س}^2 - \text{س} = ١^2 - ١ = \text{صفر}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١^+} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ١^+} \text{س} - ١ = ١ - ١ = \text{صفر}$ وبما ان

$\lim\limits_{\text{س} \to ١^+} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \text{ق(س)}$ ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق(س)}$ موجوده

③ ق(١) = نهـا ق(س) ∴ من ①، ②، ③ ق(س) اقتران متصل
س←١

عندما ن = ١ ، نجد مشتقة قَ(س) = { ٢س - ١ ، ٠ < س < ١
١ ، ١ < س < ٣
غير موجودة ، س = ٠، ٣ }

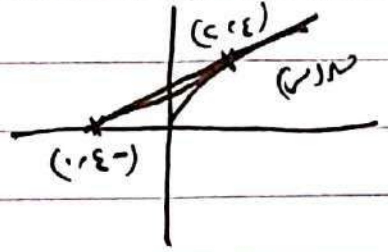
قَ(١)⁺ = ١ ، قَ(١)⁻ = ٢×١ - ١ = ١ ∴ قَ(١) موجودة
اي ان $\boxed{١}$ ليست نقطة حرجة.

قَ(س) = صفر ⟸ ٢س - ١ = صفر ⟸ $\boxed{\text{س} = \frac{١}{٢}}$ نقطة حرجة

وعندما $\boxed{\text{س = صفر}}$ المشتقة غير موجودة وهي تنتمي للمجال
∴ النقاط الحرجة هي { ٠، $\frac{١}{٢}$ } فرع ٩

---

⑤ في الشكل المجاور اذا كانت ص = ق²(س) + س جد قيمة



$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \Big|_{\text{س}=٤}$ ؟؟

الحل : ص = ق²(س) + س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ق(س) × قَ(س) + ١
= ٢ق(٤) قَ(٤) + ١    لكن ق(٤) = ٢

قَ(٤) = ميل المماس = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = $\frac{٠ - ٢}{-٤ - ٤}$ = $\frac{-٢}{-٨}$ = $\frac{١}{٤}$

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ × ق(٤) × قَ(٤) + ١
= ٢ × ٢ × $\frac{١}{٤}$ + ١ = ١ + ١ = ٢ فرع ٤ د

⑥ اذا كانت معادلة المماس لمنحنى د(س) عند النقطة (٣، ٤) الواقعه عليه هي ص - ٥س + ١١ = صفر فاحسب

$$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{د(س)} - \text{د(٣)}}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦} \quad ؟$$

$\boxed{١}$ ص = ٥س - ١١     ∴ ميل المماس = $\text{د}'(٣) = \boxed{٥}$ ، د(٣) = ٤

الطريقة الدولي

$$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{د(س)} - \text{د(٣)}}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)} = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{د(س)} - \text{د(٣)}}{\text{س} - ٣} \times \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س} + ٢}$$

لكن $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{د(س)} - \text{د(٣)}}{\text{س} - ٣} = \text{د}'(٣)$

$$∴ \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{د(س)} - \text{د(٣)}}{\text{س} - ٣} \times \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س} + ٢} = \text{د}'(٣) \times \frac{١}{٣ + ٢}$$

$$= ٥ \times \frac{١}{٥} = \boxed{١}$$ ضع د

الطريقه الثانيه قاعده لوبيتال :،

$$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{د(س)} - \text{د(٣)}}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦} = \frac{\text{د(٣)} - \text{د(٣)}}{٩ - ٣ - ٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{د}'\text{(س)}}{٢\text{س} - ١} = \frac{\text{د}'(٣)}{٢ \times ٣ - ١} = \frac{٥}{٥} = ١$$

---

⑦ اذا كان $\text{د(س)} = \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}$ ، $\text{هـ(س)} = \frac{٨}{\text{س}}$ فاحسب $(\text{هـ} \circ \text{د}')'(١)$ ؟؟

$\text{د}'\text{(س)} = ٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س}$ ، $\text{د}''\text{(س)} = ٦\text{س} - ٢$ ، $\text{هـ(س)} = ٨\text{س}^{-١}$

$\text{هـ}'\text{(س)} = ٨ \times -١\,\text{س}^{-٢} = -٨\text{س}^{-٢}$     فرع ج

$\text{هـ}''\text{(س)} = -٨ \times -٢\,\text{س}^{-٣} = \frac{١٦}{\text{س}^{٣}}$

$$(\text{هـ} \circ \text{د}')'(١) = \text{هـ}''(\text{د}'(١)) \times \text{د}''(١) = \text{هـ}''(١) \times ٤ = ١٦ \times ٤$$
$$= \boxed{٦٤}$$

⑧ اذا كان $ق(س) = س^{جـ+٣}$ ، $جـ > -٢$ وكان $\ddot{ق}(٨) = \ddot{ق}(٤)$ فما قيمة الثابت جـ ؟؟

$\dot{ق}(س) = (جـ+٣)\, س^{جـ+٢}$ ، $\ddot{ق}(س) = (جـ+٣)(جـ+٢)\, س^{جـ+١}$

$\ddot{ق}(٨) = \ddot{ق}(٤)$

$(جـ+٣)(جـ+٢) \times ٨^{جـ+١} = (جـ+٣)(جـ+٢) \times ٤^{جـ+١}$

لكن $٨ = ٢^٣$ ، $٤ = ٢^٢$

$(جـ+٣)(جـ+٢) \times (٢^٣)^{جـ+١} - (جـ+٣)(جـ+٢) \times (٢^٢)^{جـ+١} = صفر$

وباخراج عامل مشترك .

$(جـ+٣)(جـ+٢)\left(٢^{٣جـ+٣} - ٢^{٢جـ+٢}\right) = صفر$

اما $جـ+٣ = صفر$ ← $جـ = -٣$ مرفوضة لان $جـ > -٢$

او $جـ+٢ = صفر$ ← $جـ = -٢$ مرفوضة لان $جـ > -٢$

او $٢^{٣جـ+٣} = ٢^{٢جـ+٢}$ ← $\frac{٢^{٣جـ} \times \cancel{٢^٣}}{\cancel{٨} \times ٢^{٢جـ}} = \frac{\cancel{٢^{٢جـ}} \times ٢^٢}{٨ \times \cancel{٢^{٢جـ}}}$

$٢^{جـ} = \frac{١}{٢} = ٢^{-١}$ ← $\boxed{جـ = -١} > -٢$

وهو المطلوب (فرع جـ)

---

⑨ اذا كان $ق(س) = ٣(أ-٢)\, س^٢ + ٨س + ٥$ فما قيمة الثابت أ التي تجعل ق(س) مقعر للاسفل .

① $\dot{ق}(س) = ٣(أ-٢) \times ٢س + ٨$

$\ddot{ق}(س) = \frac{٣(أ-٢) \times ٢}{٦} = \frac{صفر}{٦}$ ← $أ-٢ = صفر$ ← $\boxed{أ = ٢}$

يكون الاقتران مقعر عندما تكون قً(س) < صفر

$$\underset{٢}{\underline{+\ +\ +\ +\ \times\ -\ -\ -\ -}}$$ إشارة (أ − ٢)

∴ قيمة أ التي تجعل الاقتران مقعر للأسفل من ]−∞ ، ٢[ .

فرع أ

---

⑩ إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود له قيمة عظمى محلية عندما س = ١ ، قً(٢) > صفر فما العبارة الصحيحة مما يلي ؟

بما انه يوجد له قيمة عظمى محلية عندما س = ١ ∴ قً(١) < صفر حسب اختبار المشتقة الثانية .

ومن المعطيات قً(٢) > صفر يوجد قيمة صغرى عندما $\boxed{س = ٢}$

∴ قً(٢) × قً(١) ≤ صفر فرع ب

---

## السؤال الأول

| رقم السؤال | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رمز الإجابة | ج | ج | ب | أ | د | د | ج | ج | أ | ب |

---

## السؤال الثاني :-

فرع أ ق(س) = { أس³ + ب س² − ٦ ، س ≤ ٢
أس + ب − ١٢ ، س > ٢

جد قيمة الثوابت أ ، ب علما ان ق(س) متصل على مجاله
قَ(٢) = ٦

الحل: ق(٢) = ٦ ، ق(س) = { ٢أس + ب ، س < ٢ ؛ أ ، س ≥ ٢ }

ق(٢) = أ = ٦ وبما ان ق(٢) موجودة ∴ ق(٢)$^{+}$ = ق(٢)$^{-}$

ق(٢)$^{-}$ = ٢أ × ٢ + ب = ٦

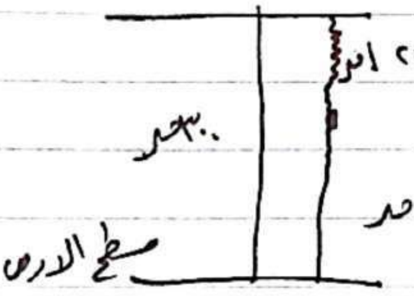
ق(٢)$^{+}$ = أ = ٦ ⟸

٢ × ٦ × ٢ + ب = ٦ ⟸ ب = ٦ − ٢٤ = −١٨

---

الثاني فرع ب

أسقط جسم من ارتفاع ٣٠٠م عن سطح الارض بحيث كانت المسافة التي يقطعها بالامتار بعد ن ثانية هي ف(ن) = ٥ن$^{2}$ جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ١٧٥م من سطح الارض



عندما يكون الجسم على الارتفاع ١٧٥متر من سطح الارض يكون قطع

٢٠٠ − ١٧٥ = ١٢٥م .

الزمن المستغرق لقطع ١٢٥ متر

ف = $\frac{٥}{٥}$ن$^{2}$ = $\frac{١٢٥}{٥}$

ن$^{2}$ = ٢٥ ⟸ ن = ∓٥ ، ن = −٥ تهمل

∴ ن = ٥ ثواني ∴ ع = $\frac{دف}{دن}\Big|_{ن=٥}$ = ٥ × ٢ن = ٥ × ٢ × ٥

= ٥٠ متر/ث

وبما ان الجسم نازل ∴ السرعة = ٥٠م/ث وهو نازل

---

السؤال الثالث فرع أ

اذا كان ق(س) = جتا$^{4}$س − جا$^{4}$س ، س ∈ [٠ ، π]

① مجالات تزايد وتناقص ق(س) ٢- مجالات تقعر الاقتران ق(س)

ق(س) = جتا²س − جا²س = جتا٢س ، س ∈ [٠، π]

ق(س) اقتران متصل لأنه اقتران دائري.

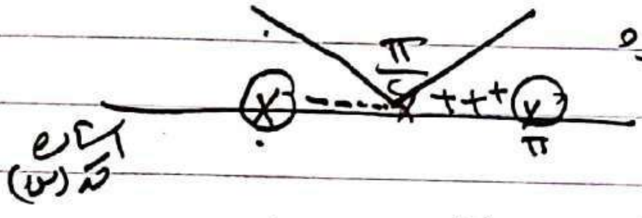
ق'(س) = −٢ جا٢س = صفر

لكن جا٢س = صفر عندما ٢س = صفر، π، ٢π

٢س = صفر ← $\boxed{\text{س = صفر}}$ ، $\frac{٢س}{٢} = \frac{π}{٢}$ ← $\boxed{س = \frac{π}{٢}}$ وعندما

$\frac{٢س}{٢} = \frac{٢π}{٢}$ ← $\boxed{س = π}$ لكن عندما $\boxed{\text{س = صفر}}$ و $\boxed{س = π}$

المشتقة غير موجودة طرف فترة



ق'(٣٠) = −٢ جا ٢×٣٠ = −٢ جا ٦٠

= −٢ × $\frac{√٣}{٢}$ = −√٣

ق'(١٢٠) = −٢ جا ٢×١٢٠ = −٢ جا ٢٤٠ = سالب × سالب = موجب

ق'(س) < صفر ∀ س ∈ ]٠، $\frac{π}{٢}$[ ∴ ق(س) اقتران متناقص ∀ س ∈ [٠، $\frac{π}{٢}$]

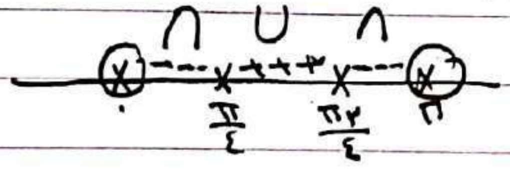
ق'(س) > صفر ∀ س ∈ ]$\frac{π}{٢}$، π[ ∴ ق(س) اقتران متزايد ∀ س ∈ [$\frac{π}{٢}$، π]

② ق''(س) = −٢ × ٢ جتا ٢س = −٤ جتا٢س = صفر

جتا٢س = صفر عندما ٢س = $\frac{π}{٢}$ ، $\frac{٣π}{٢}$

٢س = $\frac{π}{٢}$ ← $\boxed{س = \frac{π}{٤}}$ ، ٢س = $\frac{٣π}{٢}$

∴ $\boxed{س = \frac{٣π}{٤}}$



د''(٣٠) = −٤ جتا ٢ × ٣٠ = −٤ جتا ٦٠ = −٤ × $\frac{1}{2}$ = (−٢) سالب

د''(٦٠) = −٤ جتا ٢ × ٦٠ = −٤ جتا ١٢٠ = سالب × سالب = موجب

د''(١٥٠) = −٤ جتا ٢ × ١٥٠ = −٤ جتا ٣٠٠ = سالب × موجب = سالب

إشارة د''(س) < صفر ∀ س ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{4}$[ ∪ ]$\frac{3\pi}{4}$ ، π[

∴ د(س) مقعر للأسفل ∀ س ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{4}$[ ∪ ]$\frac{3\pi}{4}$ ، π[

إشارة د''(س) > صفر ∀ س ∈ ]$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[ ∴ د(س) مقعر
للأعلى في ]$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$[ .

---

الثالث ب

ص = م$^2$ − ١ ، ٢م س = ٣س + ٣م جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٢

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دم}}$ × $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ عندما س = ٢ فإن ٢م × ٢ = ٣ × ٢ + ٣م

٤م − ٣م = ٦ ، $\boxed{(\text{م} = ٦)}$ عندما س = ٢ .

(٢م س)' = (٣س + ٣م)'

$\boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دم}} = \text{٢م}}$ ، م.الأول × الثاني + م.الثاني × الأول = ٣ + ٣ $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$

٢ $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ × س + ١ × ٢م = ٣ + ٣ $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ وعندما س=٢ ، م=٦

٢ × $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ × ٢ + ٢ × ٦ = ٣ + ٣ $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$

∴ ٤ $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ − ٣ $\frac{\text{دم}}{\text{دس}}$ = ٣ − ١٢ = −٩

$\boxed{\frac{\text{دم}}{\text{دس}} = -٩}$

$$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{\substack{س=٢\\ م=٦}} = \frac{د ص}{د م} \times \frac{د م}{د س}$$

$$= ٢م \times -٩ = ٢ \times ٦ \times -٩ = ١٢ \times -٩$$

$$= \boxed{-١٠٨}$$

---

السؤال الرابع فرع أ

(أ) ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان ق(س) + قَ(س) = $س^٣ + ٦س^٢ - ٣س + ٢$ جد القيم القصوى للاقتران ق(س)

الحل :-

$ق(س) = أس^٣ + بس^٢ + جـس + د$ .

$قَ(س) = ٣أس^٢ + ٢بس + جـ$

$ق(س) + قَ(س) = س^٣ + ٦س^٢ - ٣س + ٢$

$أس^٣ + بس^٢ + جـس + د + ٣أس^٢ + ٢بس + جـ = س^٣ + ٦س^٢ - ٣س + ٢$

$أس^٣ = س^٣ \Leftarrow \boxed{أ = ١}$

$(ب + ٣أ)س^٢ = ٦س^٢ \Leftarrow ب + ٣أ = ٦$

$ب + ٣ \times ١ = ٦$

$\therefore ب = ٦ - ٣ = ٣ \Leftarrow \boxed{ب = ٣}$

$(جـ + ٢ب)س = -٣س \Leftarrow جـ + ٢ \times ٣ = -٣$

$جـ + ٦ = -٣ \Leftarrow \boxed{جـ = -٩}$

$د + جـ = ٢ \Leftarrow د - ٩ = ٢ \Leftarrow \boxed{د = ١١}$

$\therefore ق(س) = س^٣ + ٣س^٢ - ٩س + ١١$

$قَ(س) = \frac{٣}{٣}س^٢ + \frac{٦}{٣}س - \frac{٩}{٣} =$ صفر

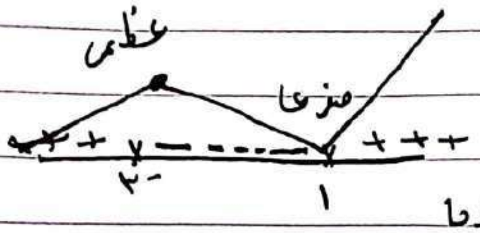
$قَ(س) = س^٢ + ٢س - ٣ =$ صفر

٤م) $س^{٢} + ٢س - ٣ = صفر$

$(س + ٣)(س - ١) = ٠$ ∴ س + ٣ = صفر ⟸ $\boxed{س = -٣}$

أو س - ١ = صفر ∴ $\boxed{س = ١}$

ندرس إشارة المشتقة الأولى



تحولت إشارة المشتقة من موجب عندما س < −٣ الى سالب عندما س > −٣ ∴ يوجد قيمة عظمى للاقتران

وقيمتها $ق(-٣) = (-٣)^{٣} + ٣ × (-٣)^{٢} - ٩ × -٣ + ١١$

$= \cancel{-٢٧} + \cancel{٢٧} + ٢٧ + ١١ = \boxed{٣٨}$

∴ (−٣، ٣٨) عظمى للاقتران

تحولت إشارة المشتقة من سالب عندما س < ١ الى موجب عندما س > ١ ∴ يوجد قيمة صغرى للاقتران وقيمتها

$ق(١) = ١^{٣} + ٣ × ١^{٢} - ٩ × ١ + ١١ = ١ + ٣ - ٩ + ١١ = ٦$

∴ (١، ٦) صغرى محلية

---

الرابع ب

$(ق \circ هـ)(س) = س$ ، $قَ(س) = ١ + (ق(س))^{٢}$ جد هـَ(س)

الحل: $(ق \circ هـ)'(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س) = ١$

لكن $قَ(هـ(س)) = ١ + (ق(هـ(س)))^{٢} = ١ + ((ق \circ هـ)(س))^{٢}$

$= ١ + س^{٢}$

∴ $قَ(هـ(س)) × هـَ(س) = ١$

$$هـَ(س) = \frac{١}{١ + س^{٢}}$$

الخامس فرع أ

ه(١) = -٣ ، هَ(١) = ٢ ، قَ(-٣) = ٥ ، جد

د/دس ( ه(س²)/س − ق(س−٤) ) | س=١

= ( (المقام × م. البسط − البسط × م. المقام)/(المقام)² − قَ(س−٤) × ١ ) | س=١

= (س × هَ(س²) × ٢س − ه(س²) × ١)/س² − قَ(س−٤)

= (١ × هَ(١²) × ٢ × ١ − ه(١²))/١² − قَ(١−٤)

= (هَ(١) × ٢ − ه(١))/١ − قَ(-٣)

= (٢ × ٢ − -٣)/١ − ٥ = ٧ − ٥ = ٢

---

الخامس فرع ب

اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة يمر منحناه بالنقطة (١، ٥) وله نقطة انعطاف عندما س = ٢ أن معادلة المماس عند نقطة الانعطاف هي ٣س + ص = ٧ جد قاعدة ق(س).

الحل: ① ق(١) = ٥ ، قً(٢) = صفر

ص = -٣س + ٧ ∴ الميل = -٣ = قَ(٢)

تابع ٥ ب

ق(٢) = ص |س=٢ =

٣ × ٢ + ص = ٧ ← ص = ٧ − ٦ = ١ ∴ ق(٢) = ١

ق(س) = أس³ + ب س² + جـ س + د .

ق'(س) = ٣أس² + ٢ب س + جـ

ق''(س) = ٦أ س + ٢ب   لكن ق''(٢) = صفر

٦أ × ٢ + ٢ب = صفر ← ١٢أ + ٢ب = صفر ①

ق'(٢) = ٣أ × ٤ + ٢ب × ٢ + جـ = −٣

١٢أ + ٤ب + جـ = −٣ ②

ق(١) = أ + ب + جـ + د = ٥ ③

ق(٢) = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١ ④

نحل ③ مع ④ وبالطرح.

بالطرح /
٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١
أ + ب + جـ + د = ٥

٧أ + ٣ب + جـ = −٤ ⑤

ونحل ⑤ مع ③ ينتج ان

طرح / ٧أ + ٣ب + حـ = −٤

٢أ + ٤ب + حـ = −٣

$\boxed{\text{٥أ − ب = −١}}$ وبحلها مع معادلة رقم (٢)

٢ / ٥أ − ب = −١ ⟸ ١٠أ − $\cancel{\text{٢ب}}$ = −٢

٢أ + ٢ب = صفر ⟸ ٢أ + $\cancel{\text{٢ب}}$ = صفر

$\frac{\text{٢أ}}{\text{٢}} = \frac{-\text{٢}}{\text{٢}}$ ⟸ $\boxed{\text{أ = −١}}$

وبالتعويض ٢أ + ٢ب = صفر

−١٢ + ٢ب = صفر ⟸ ب = $\frac{\text{١٢}}{\text{٢}}$ = ٦

∴ $\boxed{\text{ب = ٦}}$ وبالتعويض ٧أ + ٣ب + حـ = −٤

−٧ + ١٨ + حـ = −٤ ⟸ حـ = −٤ − ١١ = −١٥

∴ $\boxed{\text{حـ = −١٥}}$ وبالتعويض في

أ + ب + حـ + د = ٥

−١ + ٦ + −١٥ + د = ٥ ⟸ د = ٥ + ١٠ = ١٥

∴ $\boxed{\text{د = ١٥}}$

د(س) = −س³ + ٦س² − ١٥س + ١٥

وهو المطلوب

---

السؤال السادس فرع أ .

أ) إذا كان د(س) = $\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{(م(س))}}{\text{س}}$ وكان م(١) = هـ²

مَ(١) = ٢هـ جد دَ(١)

(٢) $$ق''(س) = \frac{\text{المقام} \times \text{م. البسط} - \text{البسط} \times \text{م. المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

$$= \frac{س \times \frac{م'(س)}{م(س)} - لو_{هـ} م(س) \times 1}{(س)^2}$$

$$ق''(1) = \frac{1 \times \frac{م'(1)}{م(1)} - لو_{هـ} م(1) \times 1}{(1)^2}$$

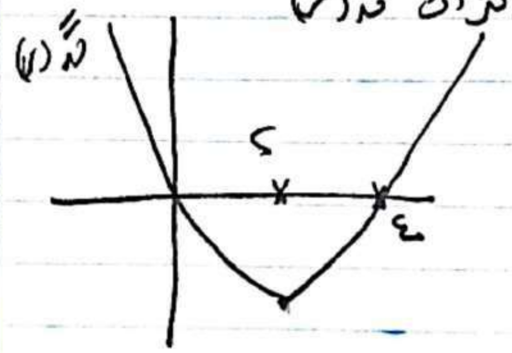
$$= \frac{\frac{2هـ}{هـ^2} - لو_{هـ} هـ^2}{1} = \frac{\frac{2}{هـ} - 2لو_{هـ} هـ}{1}$$

$$= \frac{2}{هـ} - 2 = \boxed{2\left(\frac{1}{هـ} - 1\right)}$$

---

السادس فرع ب

الشكل المجاور يمثل منحنى ق''(س) وان للاقتران ق(س)
٣ نقاط حرجة عند {−٢، ٢، ٦} حيث ق(س) كثير حدود
اوجد ١) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)
٢) فترات التقعر للاعلى وللأسفل للاقتران ق(س)



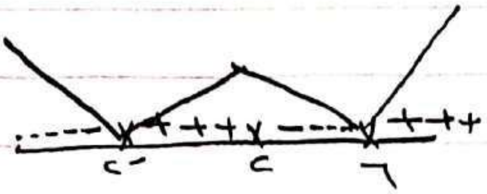
الحل:-

ق''(−٢) موجبة ∴ −٢ قيمة صغرى

ق''(٢) سالبة ∴ ٢ قيمة عظمى

ق''(٦) موجبة ∴ ٦ قيمة صغرى

اشارة قَ(س)



اشارة قَ(س)

① اشارة قَ(س) > صفر ∀ س ∈ ]-٢، ٢[ ∪ ]٦، ∞[

∴ ق(س) اقتران متزايد ∀ س ∈ [-٢، ٢] ∪ [٦، ∞[

② اشارة قَ(س) < صفر ∀ س ∈ ]-∞، -٢[ ∪ ]٢، ٦[

∴ ق(س) اقتران متناقص ∀ س ∈ ]-∞، -٢] ∪ [٢، ٦]

③ اشارة قً(س) المشتقة الثانية تقطع محور السينات عند النقطة (٠، قً(٠)) وعند النقطة (٤، قً(٤)) ⇐ (٠،٠)، (٤،٠)

اشارة قً(س)

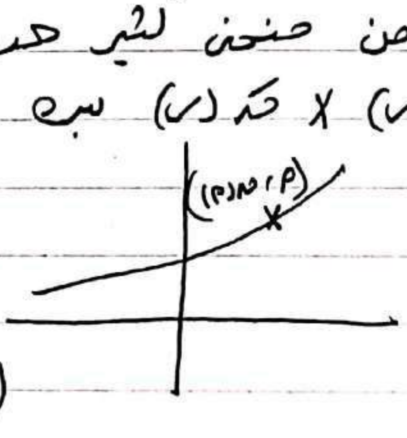
وبما أن ق(س) كثير حدود فهو اقتران متصل وقابل للاشتقاق ∀ س ∈ ح ∴ ق(س) اقتران مقعر للأعلى ∀ س ∈ ]-∞، ٠[ ∪ ]٤، ∞[ لان اشارة قً(س) > صفر

ق(س) مقعر للأسفل ∀ س ∈ ]٠، ٤[ لان قً(س) < صفر

---

السؤال السابع فرع أ

الشكل المجاور يمثل جزء من منحنى كثير حدود ق(س) فاذا كان ل(س) = ق(س) × قَ(س) بين أن لَ(أ) > صفر



٧ أ

ل(س) = جا(س) × قَ(س)

لَ(س) = الاول × م. الثاني + الثاني × م. الاول

= جا(س) × قً(س) + جتا(س) × قَ(س)

نلاحظ من الرسم ان الاقتران متزايد اي ان قَ(أ) > صفر وان الاقتران مقعر للاعلى ∴ قً(أ) > صفر ونلاحظ جا(أ) > صفر

لَ(أ) = جا(أ) × قً(أ) + جتا(أ) × قَ(أ)

= موجب × موجب + موجب × موجب = موجب > صفر

∴ لَ(أ) > صفر وهو المطلوب

---

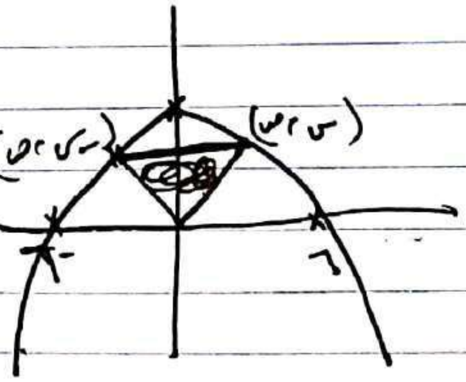
السابع فرع ب

مثلث متساوي الساقين رأسه في نقطة الاصل وقاعدته موازية لمحور السينات ورأسا القاعدة تقعان على منحنى س² = ٣٦ - ١٢ص اوجد اكبر مساحة ممكنة للمثلث

الحل: $\frac{١٢}{١٢}$ص = $\frac{٣٦}{١٢}$ - $\frac{س^٢}{١٢}$ ⟸ ص = ٣ - $\frac{١}{١٢}$س²

م المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع.

= $\frac{١}{\cancel{٢}}$ × $\cancel{٢}$س × ص



م = س ص وبالتعويض عن ص

= س(٣ - $\frac{١}{١٢}$س²)

م = ٣س - $\frac{١}{١٢}$س³

مَ = ٣ - $\frac{١}{١٢}$ × ٣س² = صفر ⟸ ٣ - $\frac{س^٢}{٤}$ = صفر

س² = ١٢ ⟸ س = ±$\sqrt{١٢}$

ندرس اشارة م

نلاحظ تحولت اشارة م من موجب عندما س < $\sqrt{١٢}$ الى سالب عندما س > $\sqrt{١٢}$ ∴ توجد قيمة عظمى للمساحة عندما س = $\sqrt{١٢}$

$$م = س ص = ٣س - \frac{س^٣}{١٢}$$

$$م \Big|_{س=\sqrt{١٢}} = ٣\sqrt{١٢} - \frac{(\sqrt{١٢})^٣}{١٢} = ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{١٢}$$

$= ٢\sqrt{١٢}$ وهي مساحة

---

السؤال الثامن فرع أ

(أ) اذا كان ص = قاس + طاس أثبت ان $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{١-حاس}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = قاس طاس + قا^٢س$

$$= \frac{١}{جتاس} \times \frac{حاس}{جتاس} + \frac{١}{جتا^٢س} = \frac{حاس + ١}{جتا^٢س}$$

لكن $جتا^٢س = ١ - حا^٢س$

$$∴ \frac{دص}{دس} = \frac{حاس + ١}{١ - حا^٢س} = \frac{\cancel{١+حاس}}{(١-حاس)\cancel{(١+حاس)}}$$

$= \frac{١}{١-حاس}$ وهو المطلوب

السؤال الثامن ب

اذا كان $ق(س) = \sqrt{س+١}$ ، $س \in [٣، ب]$ جد قيمة الثابت ب علما بان متوسط تغير الاقتران $ق(س) = \frac{١}{٢+\sqrt{٥}}$ ضمن الفترة

الحل :- متوسط التغير $= \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{ق(ب) - ق(٣)}{ب - ٣} = \frac{١}{٢+\sqrt{٥}}$$

$$\frac{\sqrt{ب+١} - \sqrt{٣+١}}{ب - ٣} = \frac{١}{٢+\sqrt{٥}}$$

$$\frac{\sqrt{ب+١} - ٢}{ب - ٣} = \frac{١}{٢+\sqrt{٥}}$$

$$\frac{\sqrt{ب+١} - ٢}{ب - ٣} \times \frac{\sqrt{ب+١} + ٢}{\sqrt{ب+١} + ٢} = \frac{١}{٢+\sqrt{٥}}$$

$$\frac{\cancel{ب+١ - ٤}}{\cancel{(ب-٣)}(\sqrt{ب+١} + ٢)} = \frac{١}{٢+\sqrt{٥}}$$ وبالقرب التبادلي

$$\cancel{٢} + \sqrt{ب+١} = \sqrt{٥} + \cancel{٢}$$ وبتربيع الطرفين

$$ب + ١ = ٥ \Leftarrow \boxed{ب = ٤}$$

وهو المطلوب

## امتحان الثانوية العامة (التجريبي) للعام 2021/2020م

دولــة فلسطــين | المبحث: الرياضيات | التاريخ: 05/04/2021م
وزارة التربيـة والتعليـم العالــي | الفــرع: العلمي | مدة الامتحان: ساعتان ونصف
مديرية التربية والتعليم الوسطى | الورقــة: الأولى | مجموع العلامات: (100) علامة

**ملاحظة: عدد أسئلة الورقة (8) أسئلة، أجب عن (5) منها فقط.**

**القسم الأول: يتكون هذا القسم من 6 أسئلة وعلى المشترك أن يجيب عن 4 منها على أن يكون السؤال الأول إجباريًا.**

**السؤال الأول: (عشرون علامة)**

**1) ما قيمة $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{هـ^{س+٢} - هـ}{س+١}$ ؟**

أ) هـ ب) صفر ج) هـ−1 د) 1

**2) إذا كان $ص = س + [س+٢,١] + \sqrt{س^{٢}}$ ، فما قيمة $\dfrac{ءص}{ءس}$ عند س = −1 ؟**

أ) صفر ب) 1 ج) 2 د) غ . م

**3) إذا كان $(ق \circ هـ)'(٣) = ١٥$ ، وكان $ق(س) = س^{٢} - ٩$ ، $هـ'(٣) = ٥$ فما قيمة هـ(٣) ؟**

أ) صفر ب) 1,5 ج) 2 د) 3

**4) إذا كان المستقيم 2ص+3س= 7 يمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند س = 1**

**وكان $ل(س) = ٦س \times ق(س)$ فما قيمة $ل'(١)$ ؟**

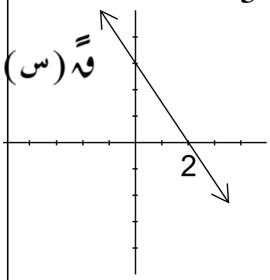
أ) −9 ب) 4 ج) 3 د) 16

**5) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة $ف(ن)ع(ن) = ن$ ، ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، ع(ن) السرعة وكانت $ع(٢) = ٣$ م/ث ، فما قيمة التسارع عندما ن = ٢ ثانية ؟**

أ) −8 م/ث$^2$ ب) 8 م/ث$^2$ ج) 12 م/ث$^2$ د) −12 م/ث$^2$

**6) ما عدد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = لو_{هـ}|س^{٢} - ١|$ ؟**

أ) صفر ب) 1 ج) 2 د) 3



**7) الشكل المجاور يمثل $ق''(س)$ حيث $ق'(٠) = ق'(٤) =$ صفر ،**

**فما هي فترات تزايد الاقتران ق(س)؟**

أ) $[٤،\infty[ \cup ]-\infty،٢]$ ب) $]-\infty،٠]$ ج) $[٠ ، ٤]$ د) $]-\infty،٢]$

**8) إذا كان $ق'(س) = هـ^{س}$ جتاس ، $س \in ]٠ ، ٢\pi[$ ، فما الإحداثي السيني لنقط الانعطاف للاقتران ق(س) إن وجدت ؟**

أ) $\frac{\pi}{٤}، \frac{٣\pi}{٤}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ ج) $\frac{\pi}{٤}، \frac{٥\pi}{٤}$ د) لا يوجد نقط انعطاف

**9) تحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٤} - ١٢ن^{٣} + ٨ن^{٢} - ٦$ ،**

**فما أقل تسارع ممكن للجسم ؟**

أ) 2 ب) −3 ج) 92 د) −92

**10) إذا كان $ق(س) = ٤س^{٣} - س^{٤} - ٢٩$ ، فأي مما صحيح؟**

أ) عند س= 3 قيمة عظمى محلية وليست مطلقة ب) عند س= صفر قيمة صغرى محلية وليست مطلقة

ج) عند س= 3 قيمة عظمى مطلقة د) عند س= صفر قيمة صغرى مطلقة

**السؤال الثاني: (عشرون علامة)**

**أ) إذا كان ق(س) = (س + ١)(٢س − ٣) + ٥س حيث س∈[−٤ ، ٤] جد: (10 علامات)**

1) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

2) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) .

**ب) إذا كان ق(س) كثير حدود وكان** $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نها}}\ \dfrac{\sqrt{\text{س}}\ \text{ق(س)} - \text{٢}}{\text{٢س} - \text{٢}} = \text{٥}$ **وكان** $\text{ك(س)} = \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{ق(س)}}$ **جد** $\text{ك}'\text{(١)}$ .

**(10 علامات)**

**السؤال الثالث: (عشرون علامة)**

**أ) من قمة برج ارتفاعه 135 م عن سطح الأرض قذف جسم رأسياً لأعلى بحيث كانت ازاحته عن قمة البرج بالأمتار بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة** $\text{ف(ن)} = \text{أن} - \text{٥ن}^{\text{٢}}$ **احسب: (10 علامات)**

1) قيمة أ علمًا بأن أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض 180م.

2) سرعة الجسم عندما يكون الجسم على ارتفاع 100 متر عن سطح الأرض.

**ب) جد أكبر وأصغر قيمة للاقتران** $\text{ق(س)} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جتاس}$ **في** $[\text{٠}، \pi]$ **(10 علامات)**

**السؤال الرابع: (عشرون علامة)**

**أ) إذا كان** $\text{ق(س)} = \sqrt[\text{٣}]{\text{٢س} - \text{٦}} + \text{٢}$ **جد: (7 علامات)**

1) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل.

2) نقطة الانعطاف (إن وجدت) .

**ب) إذا كان المستقيم المار بالنقطة (−٢،٠) يمس منحنى العلاقة** $\text{٤س}^{\text{٢}} = \text{٤} - \text{ص}^{\text{٢}}$

**جد نقطة / نقط التماس (8 علامات)**

**ج) إذا كان** $\text{ص} = \text{ع}^{\text{٣}} + \text{٨ع}$ ، $\text{ع س} = \text{٥} + \text{س}$ ، $\text{س} \neq \text{٠}$ **فما قيمة** $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ **عند س=1 (5 علامات)**

**السؤال الخامس: (عشرون علامة)**

**أ) جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته 4 سم وارتفاعه 12 سم، حيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي. (10 علامات)**

**ب) إذا كان** $\text{ص} = \text{جا}\left(\text{٢لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)$ **أثبت أن** $\text{س}^{\text{٢}}\,\text{ص}'' + \text{س}\,\text{ص}' + \text{٤ص} = \text{صفر}$ **(10 علامات)**

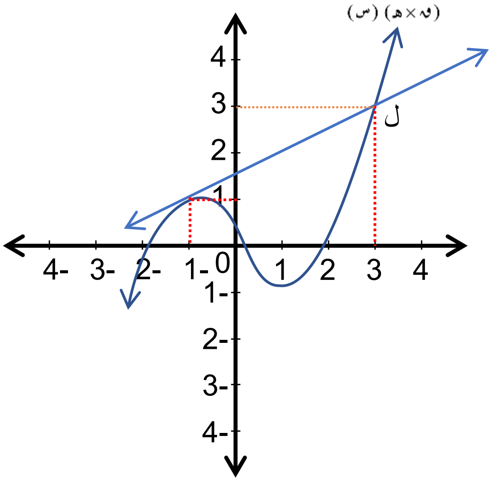
**<u>السؤال السادس: (عشرون علامة)</u>**

أ) إذا كان $ق^{٢}(٢س) = (١+س)هـ\left(\frac{٢}{س}\right)$ جد $\bar{ق}(٤)$ علمًا بأن معادلة المماس لـ هـ(س) عند $س = ١$ هي $ص = ١ + ٤س$ وكان ق(س) يمر بالنقطة $\left(٤ ، \frac{١}{٤}\right)$ . **(10 علامات)**

ب) إذا كان $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ٩}$ ، $س \in [٣ ، ب]$ وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) في $[٣ ، ب]$ مساويًا $\bar{ق}(٥)$ ، فما قيمة ب ؟ **(10 علامات)**

**القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما.**

**<u>السؤال السابع: (عشرون علامة)</u>**



أ) ليكن $ق(س) = \frac{٤س}{س^{٢}+١}$ والشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران (ق × هـ) (س) والمستقيم ل يمس منحنى (ق × هـ) (س) فما قيمة $\bar{هـ}(-١)$. **(10 علامات)**

ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ع^{٢} = ١ + ٢ف^{٢}$ حيث ع السرعة ، ف الإزاحة، جد تسارع الجسيم عندما $ع = \sqrt{٣}$ **(10 علامات)**

**<u>السؤال الثامن: (عشرون علامة)</u>**

أ) إذا كان $ق(س) = س^{٤} + أس^{٣} + بس^{٢} + جس + د$ ، أثبت أن ق(س) ليست له نقطة انعطاف إذا كانت $٣أ^{٢} \le ٨ب$ . **(10 علامات)**

ب) إذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} \left[\!\left[\frac{١}{٣}س\right]\!\right] + ب & ١ \le س < ٣ \\ س^{٢} - أس & ٣ \le س \le ٤ \end{cases}$$
قابلًا للاشتقاق على $]١ ، ٤[$

- أوجد قيمة كل من أ ، ب . **(10 علامات)**

انتهت الأسئلة

## السؤال الأول :

١) $\lim_{س \to -١} \frac{هـ^{س+٢} - هـ}{س+١} = \frac{صفر}{صفر}$ تعويض مباشر

(لوبيتال) $= \lim_{س \to -١} \frac{هـ^{س+٢} \times ١ - صفر}{١} = هـ$ $\boxed{أ}$

---

٢) $ص = س + [س + ٢,١] + |س|$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عند س = -١

**الحل باختصار** ، لان عند س=-١ التعويض المباشر في [ ] يعطي كسر ∉ ص

مشتقة [ ] تساوي صفر

$|س| \leftarrow \frac{س \quad -س}{\quad ⓪ \;-١}$ ← |س| = -س في الفترة التي تحتوى -١

$\frac{دص}{دس} = ١ + صفر + -١$

$\frac{دص}{دس} = ٠ \leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{س=-١} = ٠$ $\boxed{أ}$

---

٣) $(ق \circ هـ)'(٣) = ١٥$ ، $ق(س) = س^٢ - ٩$ ، $هـ'(٣) = ٥$

$ق'(س) = ٢س$

$ق'(هـ(٣)) = ٢هـ(٣)$

$\because (ق \circ هـ)'(٣) = ق'(هـ(٣)) \times هـ'(٣)$

$١٥ = ٢هـ(٣) \times ٥$

$١٥ = ١٠ هـ(٣) \leftarrow هـ(٣) = \frac{١٥}{١٠} = ١,٥$ $\boxed{ب}$

---

٤) المستقيم ٢ص + ٣س = ٧ هو العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند س = ١

منه ميل العمودي = $\frac{-٣}{٢}$ ← ميل المماس = $\frac{٢}{٣}$ ميل المماس = $\boxed{ق'(١) = \frac{٢}{٣}}$

عند س = ١ ← ٢ص + ٣ × ١ = ٧ ← ص = ٢

(١ ، ٢) نقطة تماس ∈ ق(س) ← $\boxed{ق(١) = ٢}$

$\boxed{د}$

$ل(س) = ٦س \times ق(س)$

$ل'(س) = ٦س \times ق'(س) + ق(س) \times ٦ \leftarrow ل'(١) = ٦ق'(١) + ٦ق(١)$

$= ٤ + ١٢ = ١٦$

٥) ف(ن) × ع(ن) = ن ، ع(٢) = ٣

عند ن = ٢

ف(٢) × ع(٢) = ٢

ف(٢) × ٣ = ٢

فمنه ف(٢) = $\frac{٢}{٣}$

نشتق العلاقة ضمنياً بالنسبة لـ ن

$ف \times \frac{دع}{دن} + ع \times \frac{دف}{دن} = ١$

$ف \times ت + ع \times ع = ١$

$\frac{٢}{٣} \times ت + ٣ \times ٣ = ١$

ت = -١٢ م/ث² $\boxed{د}$

---

٦) ما عدد النقط الحرجة للاقتران لوهـ|س²-١| ؟

**الحل** باختصار مجال لوهـ|س²-١| هو |س²-١| > ٠

ومن المتعارف عليه |س²-١| ≥ ٠ (القيمة المطلقة ≥ ٠)

بالتالي مجال لوهـ|س²-١| هو ح - {أصفار ما داخل لو}

ح - {±١}

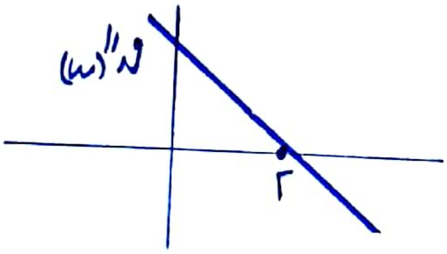
لكنه لوهـ(س²-١) $\xrightarrow{\text{اشتقاق}}$ $\frac{٢س}{س^٢-١} = ٠$ ← ٢س = ٠

س = ٠ ∈ المجال

عدد النقاط الحرجة هي ١ $\boxed{ب}$

---

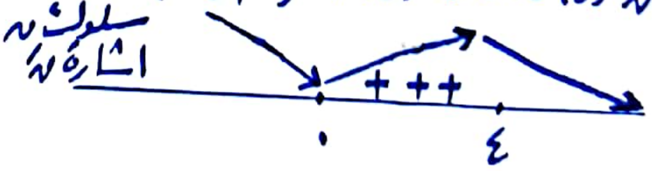
٧) رسم ق''(س) ، المطلوب له علاقة بـ ق'(س)



مدخل الحل اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى

ق'(٠) = ٠ ، ق''(٠) > ٠ (من الرسم) ← ق(٠) ص.م

ق'(٤) = ٠ ، ق''(٤) < ٠ (من الرسم) ← ق(٤) ع.م



ق(س) متزايد على [٠ ، ٤] $\boxed{ج}$

٨) $ق'(س) = هـ^{س}\,\text{جتاس}$ ، $س \in ]0 ، 2\pi[$

$ق''(س) = هـ^{س} \times -\text{جاس} + \text{جتاس} \times هـ^{س} = 0$

$هـ^{س}(-\text{جاس} + \text{جتاس}) = 0$

$هـ^{س} \neq 0$   $-\text{جاس} + \text{جتاس} = 0$

$\text{جاس} = \text{جتاس}$   $45^\circ$   $225^\circ$

$\text{ظاس} = 1$ ، $س = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4} \in ]0 ، 2\pi[$

من الاسناد

| | |
|---|---|
| هـ | $\pi$ - هـ |
| $2\pi$ - هـ | $\pi$ + هـ |

$\boxed{ج}$

---

٩) $ف(ن) = ن^{4} - 12ن^{3} + 8ن^{2} - 6$

تطبيقات عملية على القيم القصوى

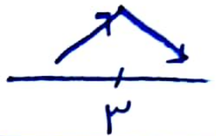
$ع(ن) = 4ن^{3} - 36ن^{2} + 16ن$

$ت(ن) = 12ن^{2} - 72ن + 16$ ——— *

التسارع أقل ما يمكن

$ت'(ن) = 0 \leftarrow 24ن - 72 = 0$

$\boxed{ن = 3}$



$ت(3) = 12 \times 9 - 72 \times 3 + 16 = -92$

$\boxed{د}$

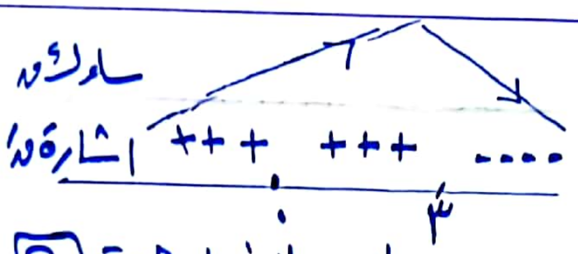
---

١٠) $ق(س) = 4س^{3} - س^{4} - 29$

$ق'(س) = 12س^{2} - 4س^{3} = 0$

$4س^{2}(3 - س) = 0$

$س = 0$ ، $س = 3$



ق(٣) عظمى محلية وهي مطلقة لأنها وحيدة $\boxed{ج}$

## السؤال الثاني :

أ) $ق(س) = (س+١)(٢س-٣) + ٥س$ ، $س \in [-٤ ، ٤]$ جد :

١) فترات التزايد والتناقص لـ ق(س)

٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

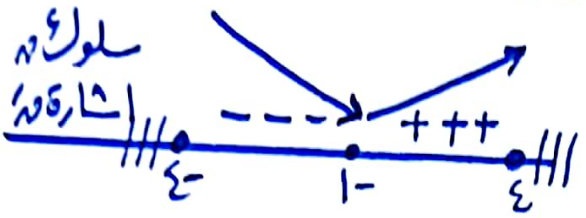
**الحل**

$ق(س) = ٢س^٢ - ٣س + ٢س - ٣ + ٥س$

$ق(س) = ٢س^٢ + ٤س - ٣$ ، ق(س) متصل على مجاله $[-٤ ، ٤]$

$ق'(س) = ٤س + ٤ = ٠$

$س = -١ \in [-٤ ، ٤]$



ق(س) متناقص على $[-٤ ، -١]$

ق(س) متزايد على $[-١ ، ٤]$

$ق(-١) = -٥$ قيمة صغرى محلية

$ق(-٤) = ١٣$ قيمة عظمى محلية (بداية تناقص)

$ق(٤) = ٤٥$ قيمة عظمى محلية (نهاية تزايد)

---

ب) ∵ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}\, ق(س) - ٢}{٢س - ٢} = ٥$

∵ النهاية موجودة ، والتعويض في المقام = صفر ⟵ التعويض في البسط = صفر

$\sqrt{١} \times ق(١) - ٢ = ٠$

$\boxed{ق(١) = ٢}$

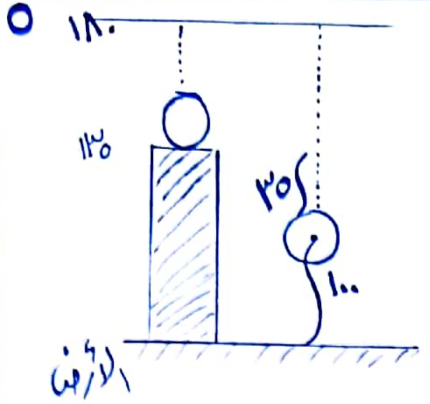
(لوبيتال) ∵ التعويض المباشر $= \frac{صفر}{صفر}$

النهاية $= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} \times ق'(س) + ق(س) \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} - صفر}{٢} = ٥$

$١ \times ق'(١) + ق(١) \times \frac{١}{٢} = ١٠ \leftarrow ق'(١) + ٢ \times \frac{١}{٢} = ١٠ \leftarrow \boxed{ق'(١) = ٩}$

∵ $ك(س) = \frac{س^٢}{ق(س)} \Leftarrow ك'(س) = \frac{ق(س) \times ٢س - س^٢ \times ق'(س)}{(ق(س))^٢}$

$ك'(١) = \frac{ق(١) \times ٢ - ١ \times ق'(١)}{(ق(١))^٢} = \frac{٢ \times ٢ - ١ \times ٩}{(٢)^٢} = \boxed{\frac{-٥}{٤}}$



السؤال الثالث:

أ) $ف_{البرج}(ن) = م ن - ٥ ن^{٢}$

$\boxed{١}$ قيمة م علماً بأن أقصى ارتفاع للجسم عن الأرض ١٨٠ م

∴ هذا يعني أقصى ارتفاع عن قمة البرج $١٨٠ - ١٣٠ = \boxed{٤٥}$ م

لإيجاد أقصى ارتفاع ⇐ ع = صفر

$م - ١٠ن = ٠ \longleftarrow ن = \frac{م}{١٠}$ زمن أقصى ارتفاع

$ف_{البرج}\left(\frac{م}{١٠}\right) = ٤٥$

$م \times \left(\frac{م}{١٠}\right) - ٥ \times \left(\frac{م}{١٠}\right)^{٢} = ٤٥$

$\frac{م^{٢}}{١٠} - \frac{م^{٢}}{٢٠} = ٤٥ \Leftarrow \frac{م^{٢}}{٢٠} = ٤٥ \Leftarrow م^{٢} = ٩٠٠ \Leftarrow \boxed{م = ٣٠}$

$\boxed{٢}$ $ف_{البرج}(ن) = ٣٠ن - ٥ن^{٢}$ ، $ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن$

جد سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٠٠ م عن سطح الأرض $\Leftarrow ف_{الأرض} = ١٠٠ \Leftarrow ف_{البرج} = -٣٥$

$-٣٥ = ٣٠ن - ٥ن^{٢}$

$٥ن^{٢} - ٣٠ن - ٣٥ = ٠$ ÷٥

$ن^{٢} - ٦ن - ٧ = ٠$

$(ن - ٧)(ن + ١) = ٠ \longleftarrow \boxed{ن = ٧}$

$ع(٧) = ٣٠ - ١٠ \times ٧ = -٤٠$ م/ث

---

ب) أكبر قيمة وأصغر قيمة لـ $د(س) = جا^{٢}س + جتاس$ في $[٠، \pi]$

**الحل**

د(س) متصل على مجاله

$د'(س) = ٢جاس جتاس - جاس = ٠$

$جاس (٢جتاس - ١) = ٠$

إما جاس = ٠ ، س = ٠، $\pi$ (أطراف)

أو ٢جتاس − ١ = ٠

جتاس = $\frac{١}{٢}$ ، س = $\frac{\pi}{٣}$ ∈ ، $\frac{٥\pi}{٣}$ ∉ (٦٠° ، ٣٠٠°)

قيم س للنقاط الحرجة هي $\{٠، \frac{\pi}{٣}، \pi\}$

$د(٠) = ٠ + ١ = \boxed{١}$

$د\left(\frac{\pi}{٣}\right) = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} + \frac{١}{٢} = \boxed{\frac{٥}{٤}}$ عظمى مطلقة

$د(\pi) = ٠ + -١ = \boxed{-١}$ صغرى مطلقة

١− أصغر قيمة لـ د(س)

$\frac{٥}{٤}$ أكبر قيمة لـ د(س)

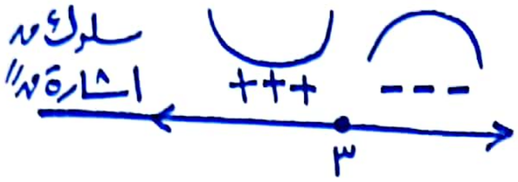
## السؤال الرابع

أ) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{٢س} - ٦)^{\frac{١}{٣}} + ٢$ ، ق(س) متصل على مجاله ح

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}(\text{٢س} - ٦)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٢ = \frac{٢}{٣}(\text{٢س} - ٦)^{\frac{-٢}{٣}}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{٢}{٣} \times \frac{-٢}{٣}(\text{٢س} - ٦)^{\frac{-٥}{٣}} \times ٢ = \frac{-٨}{٩}(\text{٢س} - ٦)^{\frac{-٥}{٣}}$

$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{-٨}{٩(\text{٢س} - ٦)^{\frac{٥}{٣}}} \neq ٠$ ، أصفار المقام $\text{٢س} - ٦ = ٠ \leftarrow \boxed{\text{س} = ٣} \in$ لمجال ق(س)

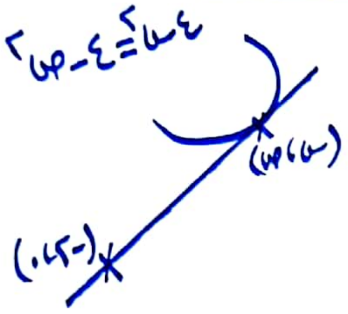


ق(س) مقعر للأعلى على ]−∞، ٣[

ق(س) مقعر للأسفل على ]٣، ∞[

(٣، ق(٣)) = (٣، ٢) نقطة انعطاف لـ ق(س) لأن ق(س) متصل عندها ويغير من اتجاه تقعره حولها.

---



ب) ميل المماس من النقطتين $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - (-٢)} = \frac{\text{ص}}{\text{س} + ٢}$ —— ①

ميل المماس من الاشتقاق $(\text{٤س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٤)$

نشتق ضمنياً بالنسبة لـ س

$\text{٨س} + \text{٢ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٨س}}{\text{٢ص}}$

ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٤س}}{\text{ص}}$ —— ②

$① = ②$ $\frac{\text{ص}}{\text{س} + ٢} = \frac{-\text{٤س}}{\text{ص}} \Leftarrow \text{ص}^٢ = -\text{٤س}^٢ - \text{٨س} \Leftarrow \boxed{\text{٤س}^٢ + \text{ص}^٢ = -\text{٨س}}$

$\boxed{\text{٤س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٤}$ من العلاقة الأساسية

بالتعويض ينتج $-\text{٨س} = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{-١}{٢}}$ ونعوض ↑ $٤ \times \left(\frac{-١}{٢}\right)^٢ + \text{ص}^٢ = ٤$

$١ + \text{ص}^٢ = ٤$

$\boxed{\text{ص} = \pm\sqrt{٣}}$

نقط التماس $\left(\frac{-١}{٢} ، \pm\sqrt{٣}\right)$

ج) إذا كان $\text{ص} = \text{ع}^{٣} + ٨\text{ع}$ ، $\text{ع}\,\text{س} = ٥ + \text{س}$ ، $\text{س} \neq ٠$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = ١$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ٣\text{ع}^{٢} + ٨ = ٣ \times ٣٦ + ٨ = \boxed{١١٦}$

عند $\boxed{\text{س} = ١}$

$\text{ع} \times ١ = ٥ + ١ \leftarrow \boxed{\text{ع} = ٦}$

$\text{ع}\,\text{س} = ٥ + \text{س} \quad \div \text{س}$

$\text{ع} = \frac{٥}{\text{س}} + ١$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{-٥}{\text{س}^{٢}} = \frac{-٥}{١} = \boxed{-٥}$

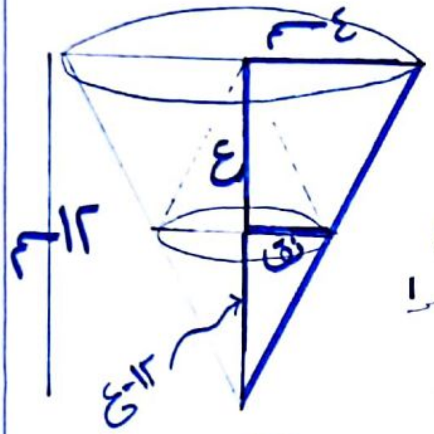
ومنه $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ١١٦ \times -٥ = \boxed{-٥٨٠}$

---

السؤال الخامس :

أ) حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \times \pi \times \text{نق}^{٢} \times \text{ع}$

$\text{ح} = \frac{\pi}{٣} \text{نق}^{٢}\text{ع}$ —— $\boxed{١}$



من التشابه

$\frac{١٢-\text{ع}}{\cancel{١٢}_{٣}} = \frac{\text{نق}}{\cancel{٤}_{١}}$

$\frac{١٢-\text{ع}}{٣} = \text{نق}$

$\text{ع} = ١٢ - ٣\text{نق}$ —— $\boxed{٢}$

$\text{ح} = \frac{\pi}{٣} \text{نق}^{٢} (١٢ - ٣\text{نق})$

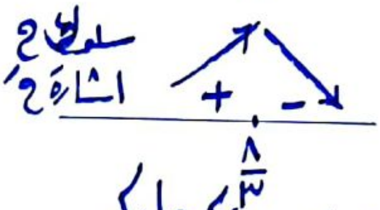
$\text{ح} = \frac{\pi}{٣} (١٢\text{نق}^{٢} - ٣\text{نق}^{٣})$ —*

$\text{ح}' = \frac{\pi}{٣} (٢٤\text{نق} - ٩\text{نق}^{٢}) = ٠$

$٢٤\text{نق} - ٩\text{نق}^{٢} = ٠$

$٣\text{نق} (٨ - ٣\text{نق}) = ٠$

$\text{نق} = \frac{٨}{٣}$



حجم المخروط أكبر ما يمكن عند نق $= \frac{٨}{٣}$

المطلوب ح ، نق $= \frac{٨}{٣}$

$\text{ح} = \frac{\pi}{٣} \left(١٢ \times \left(\frac{٨}{٣}\right)^{٢} - ٣ \times \left(\frac{٨}{٣}\right)^{٣}\right)$

$\text{ح} = \frac{٢٥٦\pi}{٢٧}$

---

ب) $\text{ص} = \text{جا}(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

$\text{ص}' = \text{جتا}(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{٢}{\text{س}}$ —* $\Leftarrow \boxed{\text{س}\,\text{ص}' = ٢\,\text{جتا}(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}$

$\text{ص}'' = \text{جتا}(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{-٢}{\text{س}^{٢}} + \frac{٢}{\text{س}} \times -\text{جا}(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{٢}{\text{س}}$

$\text{ص}'' = \frac{-٢}{\text{س}^{٢}} \text{جتا}(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) - \frac{٤}{\text{س}^{٢}} \text{جا}(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$ —** $\Leftarrow \boxed{\text{س}^{٢}\text{ص}'' = -٢\,\text{جتا}(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) - ٤\,\text{جا}(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}$

الطرف الأيمن $س^{٢} ص'' + س ص' + ٤ص$

$= \cancel{٢جتا(٢لوس)} + (\cancel{-٢جتا(٢لوس)} - \cancel{٤جا(٢لوس)}) + \cancel{٤جا(٢لوس)}$

= صفر = الطرف الأيسر.

السؤال السادس:

أ) ∵ معادلة المماس لـ هـ(س) عند س=١ هي ص=١+٤س

∴ $\boxed{هـ'(١) = ميل المماس = ٤}$ ، عند س=١ ، ص=٥ $\boxed{هـ(١) = ٥}$

ن(س) يمر بالنقطة $(٤ ، \frac{١}{٤})$ ، $\boxed{ن(٤) = \frac{١}{٤}}$

$ن^{٢}(٢س) = (١+س) هـ(\frac{٢}{س})$

نشتق

$٢ن(٢س) × ن'(٢س) × ٢ = (١+س) × هـ'(\frac{٢}{س}) × \frac{-٢}{س^{٢}} + هـ(\frac{٢}{س}) × ١$

$\boxed{عند س=٢}$

$٢ن(٤) × ن'(٤) × ٢ = ٣ × هـ'(١) × \frac{-٢}{٤} + هـ(١)$

$٢ × \frac{١}{٤} × ن'(٤) × ٢ = ٣ × ٤ × \frac{-٢}{٤} + ٥$

$ن'(٤) = -٦ + ٥ \Leftarrow \boxed{ن'(٤) = -١}$

ب) $ن(س) = \sqrt{س^{٢}-٩}$ ، س ∈ [٣، ب]

$\frac{Δن}{Δس} = \frac{ن(ب) - ن(٣)}{ب - ٣} = \frac{\sqrt{ب^{٢}-٩} - ٠}{ب-٣} = \frac{\sqrt{ب^{٢}-٩}}{ب-٣}$ —*

$ن'(س) = \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}-٩}} = \frac{س}{\sqrt{س^{٢}-٩}} \Leftarrow ن'(٥) = \frac{٥}{\sqrt{٢٥-٩}} = \frac{٥}{٤}$ —**

∵ متوسط التغير = ن'(٥)

$\frac{\sqrt{ب^{٢}-٩}}{ب-٣} = \frac{٥}{٤}$ بالتربيع

$\frac{ب^{٢}-٩}{(ب-٣)^{٢}} = \frac{٢٥}{١٦} \Longleftarrow \frac{\cancel{(ب-٣)}(ب+٣)}{(ب-٣)^{\cancel{٢}}} = \frac{٢٥}{١٦} \Leftarrow \frac{ب+٣}{ب-٣} = \frac{٢٥}{١٦}$

-عكسه القسمة على (ب-٣) ، لان ب≠٣

١٦ب + ٤٨ = ٢٥ب - ٧٥

١٢٣ = ٩ب

$\boxed{ب = \frac{١٢٣}{٩} = \frac{٤١}{٣}}$

السؤال السابع :

أ) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٤\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} \Leftarrow \boxed{\text{ن}(-١) = -٢}$

$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٢}+١)\times ٤ - ٤\text{س}\times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}} \Leftarrow \text{ن}'(-١) = \frac{٢\times ٤ - (-٤)(-٢)}{٢^{٢}} \Leftarrow \boxed{\text{ن}'(-١) = ٠}$

من الرسم $\boxed{(\text{ن}\times\text{هـ})(-١) = ١}$ لان النقطة (-١ ، ١) تقع على منحنى $(\text{ن}\times\text{هـ})(\text{س})$

$\because (\text{ن}\times\text{هـ})(-١) = \text{ن}(-١)\times\text{هـ}(-١)$

$١ = -٢ \times \text{هـ}(-١) \Leftarrow \boxed{\text{هـ}(-١) = \frac{١}{-٢}}$

$(\text{ن}\times\text{هـ})'(-١) = \text{ميل المماس (من النقطتين)} = \frac{٣-١}{٣-(-١)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ —— *

$\because (\text{ن}\times\text{هـ})'(-١) = \text{ن}(-١)\times\text{هـ}'(-١) + \text{هـ}(-١)\times\text{ن}'(-١)$

$\frac{١}{٢} = -٢\times\text{هـ}'(-١) + (\frac{١}{-٢})\times ٠ \Leftarrow \boxed{\text{هـ}'(-١) = \frac{١}{-٤}}$

---

ب) $\text{ع}^{٢} = ١ + ٢\text{ف}^{٢}$ ، جد تسارع الجسم عند $\text{ع} = \sqrt{٣}$

عند $\text{ع} = \sqrt{٣}$

$(\sqrt{٣})^{٢} = ١ + ٢\text{ف}^{٢} \Leftarrow ٣ = ١ + ٢\text{ف}^{٢} \Leftarrow \text{ف}^{٢} = ١ \Leftarrow \text{ف} = \pm ١$

نشتق العلاقة ضمنياً

$٢\text{ع} \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٠ + ٤\text{ف} \frac{\text{دف}}{\text{دن}}$

$\cancel{٢\text{ع}} \times \text{ت} = ٤\text{ف} \times \cancel{\text{ع}}$

$\text{ت} = ٢\text{ف}$ عند ف = ١ ⟵ $\boxed{\text{ت} = ٢}$

عند ف = -١ ⟵ $\boxed{\text{ت} = -٢}$

السؤال الثامن

٤) إذا كان $د(س) = س^{٤} + أس^{٣} + بس^{٢} + جـ س + ء$

$د'(س) = ٤س^{٣} + ٣أس^{٢} + ٢بس + جـ$

$د''(س) = ١٢س^{٢} + ٦أس + ٢ب$

د(س) ليس لها نقطة انعطاف هذا يعني لا يوجد أصفار لـ د''(س)

$د''(س) \neq ٠$

مميز المعادلة التربيعية $< ٠$

$المميز = (٦أ)^{٢} - ٤ \times (١٢) \times (٢ب) < ٠$

$= ٣٦أ^{٢} - ٩٦ب < ٠ \qquad \div ١٢$

$٣أ^{٢} - ٨ب < ٠$

$٣أ^{٢} < ٨ب$ #

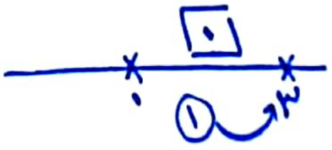
$\because ٣أ^{٢} < ٨ب$ هذا يعني $د''(س) \neq ٠$، هذا يثبت عدم وجود نقطة انعطاف لـ د(س)

ب) إذا كان $د(س) = \begin{cases} [\frac{١}{٣}س] + ب & ، ١ \leq س < ٣ \\ س^{٢} - أس & ، ٣ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ ، قابلاً للاشتقاق على $]١، ٤[$

أوجد قيمة كل من أ، ب

الحل

إعادة تعريف $[\frac{١}{٣}س]$



$د(س) = \begin{cases} ب & ، ١ \leq س < ٣ \\ س^{٢} - أس & ، ٣ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ ، $د'(س) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < س < ٣ \\ ٢س - أ & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

$\because$ د(س) قابلاً للاشتقاق عند $س = ٣$

$د'(٣^{+}) = د'(٣^{-})$

$٢ \times ٣ - أ = ٠$

$٦ - أ = ٠$

$\boxed{أ = ٦}$

د(س) متصل عند $س = ٣$

$د(٣^{+}) = د(٣^{-}) = د(٣)$

$(٣)^{٢} - ٦ \times ٣ = ب$

$٩ - ١٨ = ب$

$\boxed{ب = -٩}$

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم / جنوب الخليل
الفرع العلمي / الورقة الأولى

بسم الله الرحمن الرحيم

الامتحان التجريبي الموحد الجلسة الأولى
للعام الدراسي ٢٠٢٠-٢٠٢١ م

المبحث : الرياضيات
التاريخ: / / ٢٠٢١
الزمن : ساعتان ونصف
مجموع العلامات : ( ١٠٠ )

**ملاحظة: الامتحان يتكون من ثمانية أسئلة ، ويجيب الطالب عن خمسة أسئلة فقط .**

**القسم الأول :- يتكون من ستة أسئلة وعلى الطالب أن يجيب عن أربعة أسئلة، على أن يكون السؤال الأول إجباريا.**

<u>السؤال الأول :</u> انقل رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي إلى ورقة الإجابة : ( ٢٠ علامة )

١) إذا كان $ق(س) = (س^{٢} + ٢)هـ^{س^{٢} - س}$ فإن متوسط التغير للاقتران ق(س) على $[٠ ، ١]$ =

أ) ١ ب) صفر ج) هـ د) ٢

٢) إذا كان المستقيم ٢ص + ٦س = ٥ يوازي العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة ( ١ ، ق(١) )

فإن $ق^{\prime}(١)$ =

أ) −٣ ب) $\frac{-١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) ٣

٣) إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق و كان $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{ق(س) - ٣}{س + ٢} = ٦$ فإن $\frac{ء}{ءس}(ق(\frac{س}{٢}))$ عندما س = −٤ هي:

أ) −١٨ ب) ١٨ ج) ٣ د) ٦

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف ع = ن ، حيث ف بعد الجسم عن نقطة ثابتة ، ع سرعة الجسم في اللحظة ن ، وكانت ع(٢) = ٣م/ث ، فإن تسارع الجسيم عندما ن = ٢ ثانية يساوي:

أ) − ٨ م/ث$^{٢}$ ب) ٨ م/ث$^{٢}$ ج) ١٢ م/ث$^{٢}$ د) −١٢ م/ث$^{٢}$

٥) أكبر قيمة للاقتران ق(س)=جاس+جتاس في $[٠ ، \frac{\pi}{٤}]$ =

أ) ١ ب) $\sqrt{٢}$ ج) ٢$\sqrt{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$

٦) إذا كان $م(س) = هـ^{جاس} + لو_{هـ}(س^{٢} + ١)^{٢}$ فإن قيمة $م(٠) \times م^{\prime}(٠)$ =

أ) ١ ب) هـ ج) ١+ هـ د) صفر

٧) إذا كان ق(س) معرف على [٠ ، ٣]، وكان ق´(١) = ٠ ، ق´´(١) = ٢ق(١) = −٤ ، فإن القيمة العظمى للاقتران =

أ) −٤ ب) −٢ جـ) صفر د) ١

٨) إذا كان ق(س) اقتراناً متزايداً على الفترة [١ ، ٣] ، هـ(س) اقتراناً متناقصاً على [١ ، ٣] فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً :

أ) (ق − هـ)(س) متناقص على الفترة [١ ، ٣] ب) (ق − هـ)(س) متزايد على الفترة [١ ، ٣]

جـ) (ق − هـ)(١) عظمى مطلقة . د ) (ق − هـ)(٣) صغرى مطلقة .

٩) $$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to ٠}\ \frac{\text{ظا}^{٣}(\text{س}+٢\text{هـ})-\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣\text{هـ}} =$$

أ) ٣ظا$^{٢}$س ب) ٢ظاسقا$^{٢}$س جـ) ٢ظا$^{٢}$سقا$^{٢}$س د) ٣قا$^{٢}$س

١٠) إذا كان $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢}-٦\text{س} & ، \quad ٠<\text{س}<٤ \\ -٨ & ، \quad ٤\le\text{س}\le ٨ \end{cases}$$

فإن مجموعة الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة لـ ق(س) هي .

أ) { $\frac{١}{٤}$ ، ٣ } ∪ [ ٤ ، ٨ ] ب) { ٣ ، ٤ ، ٨ } جـ) { ٠ ، ٣ ، $\frac{١}{٤}$ ، ٤ ، ٨ } د) { ٣ } ∪ [ ٤ ، ٨ ]

**السؤال الثاني( عشرون علامة )**

أ) قذف جسم رأسياً لأعلى من قمة برج ارتفاعه ١٢٠م ، حسب العلاقة ف = ٤٠ن − ٥ن$^{٢}$ حيث ف ارتفاع الجسم عن سطح البرج في اللحظة ن . ( حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني )

١. جد المسافة الكلية بعد ٧ ثواني من بدء الحركة

٢. جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٢٠ م عن الأرض ( ١٠ علامات )

ب ) إذا كان ق(س) = س$^{٢}$ × |س − ٣| ، س ∈ [٠ ، ٥] ،

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ٥]. ( ١٠ علامات )

**السؤال الثالث( عشرون علامة )**

أ) إذا كان $ق(س) = أس^{٢} - ٢بس + ١$ يمس منحنى الاقتران $هـ(س) = أس^{٣} - بس$

عند النقطة ( -١ ، ك ) جد :-

١- قيمة الثابتين أ، ب. ٢-معادلة المماس المشترك عند النقطة ( -١ ، ك ) . ( ١٠ علامات )

ب) إذا كان $ق(س) = س + \frac{٩}{س + ٢}$ ، س∈[-١ ، ٤]

جد القيم القصوى المحلية والمطلقة للاقتران ق(س) في الفترة [-١ ، ٤]. ( ١٠ علامات )

**السؤال الرابع( عشرون علامة )**

أ) جد معادلة العمودي على منحنى الدائرة $س^{٢} + ٥س + ص^{٢} = ١٠$ عند نقطة تقاطعها مع المنحنى $ص - ١٠س = ٢س^{٢} - ١٠$ الواقعة في الربع الأول. ( ١٠ علامات )

ب) إذا كان $ق(س) = أ\ جاس ، هـ(س) = \frac{٣س}{س^{٢} + ١}$ .

جد قيمة الثابت أ علماً بأن $(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٦}) = ٠$ ، $أ \neq ٠$ ( ١٠ علامات )

**السؤال الخامس( عشرون علامة )**

أ) إذا كان $ق(٢س + ٥) = ٣س^{٣} - س$ ، جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢هـ + ٣) + ٢}{٥هـ}$ ( ١٠ علامات )

ب) إذا كان $ص = ق(س) = \sqrt{قا٢س}$ أثبت أن : $ص'' + ص = ٣ص^{٥}$. ( ١٠ علامات )

**السؤال السادس( عشرون علامة )**

أ) إذا كان $ق(س) = جتا\frac{س}{٢}$ ، $س \in ]٠ ، ٢\pi[$ .

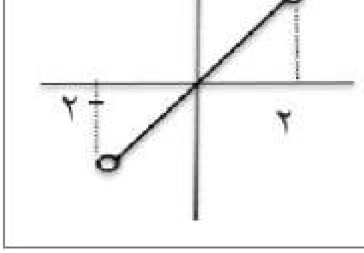
عين فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقط الانعطاف إن وجدت لمنحنى الاقتران على مجاله . ( ١٠ علامات )

ب ) الشكل المجاور يمثل منحنى $ق''(س)$ للاقتران كثير الحدود ق(س) ، س∈[-٢ ، ٢]

فإذا كان $ق'(-١) = ق'(١) =$ صفر . جد ما يلي :-

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

٢- نقط الانعطاف إن وجدت . ( ١٠ علامات )



**القسم الثاني :- يتكون هذا القسم من سؤالين على الطالب أن يجيب عن أحدهما فقط**

**السؤال السابع**( عشرون علامة )

أ) إذا كان ك(س)= هـ$^{\text{لـو}_{\text{هـ}}(٢٥-\text{س}^{٢})}$ × لـو$_{\text{هـ}}$ق(س) ، س∈[١ ، هـ] و كان ق(س) متناقص ويقع منحناه في الربع الأول في [١ ، هـ]، ق(س) > هـ.

أثبت أن ك(س) متناقص في [١ ، هـ]، حيث هـ العدد النيبيري ( ٧ علامات )

ب) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على الفترة [١ ، ٣] يساوي ٦ ، ق(س) ≠ ٠،

وكان ق(٣) = −٤− ق(١) ، وكان هـ(س) = ق$^{٢}$(س) + $\frac{٢٤}{\text{ق(س)}}$

جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) على الفترة [١ ، ٣]. ( ٧ علامات )

جـ) إذا كان ص$^{٢}$+٣س ص = ١٨ ، ع = ٥ص -ص$^{٢}$+ ٨ ، جد $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ عندما ص = ٦ ( ٦ علامات )

**السؤال الثامن**( عشرون علامة )

أ) إذا كانت (س + ص)$^{٣}$ = هـ$^{٥}$س$^{٢}$ص ، حيث هـ العدد النيبيري ، أثبت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$. ( ٦ علامات )

ب) إذا كان لمنحنى الاقتران كثير الحدود ل(س)قيمة صغرى محلية عند س = جـ ، وللاقتران م(س)قيمة عظمى محلية عند س = جـ وكان ل(س)> ٠ ، حيث ل$''$(جـ)×م$''$(جـ) < ٠ ، أثبت أن

للاقتران ق(س) = ل$^{٢}$(س) − م(س) قيمة صغرى محلية عند س = جـ . ( ٧ علامات )

جـ) مستطيل محيطه ٢٤ سم ثني ليكون اسطوانة ، أوجد أكبر حجم ممكن لهذه الاسطوانة . ( ٧ علامات )

---

وفقكم الله تعالى لما يحبه ويرضاه

انتهت الأسئلة

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم/ نابلس
الفرع :- العلمي
المبحث: الرياضيات

State of Palestine
Ministry of Education
مدة الامتحان: ساعتان ونصف.
اليوم والتاريخ:٢٠٢٠/٤/٢٣
مجموع العلامات: (١٠٠) علامة

امتحان رياضيات(ورقة أولى)

ملاحظة : عدد أسئلة الورقة (ستة) أسئلة ، أجب على خمسة منها فقط

**القسم الأول : يتكون هذا القسم من أربعة أسئلة ، و على المشترك أن يجيب عنها جميعها**

**السؤال الأول**: (٣٠ علامة)

اختر الإجابة الصحيحة ، ثم ضع إشارة ( x ) في المكان المخصص في دفتر الإجابة

١- اذا كانت النقطة (٣ ، ٤) نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) وكان ق′(٣) = $\sqrt[٢]{٣}$ ، ق′(٤) = ١ فإن قياس زاوية الانعطاف عند النقطة (٣ ، ٤)

أ) $\frac{\pi}{٦}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ جـ) $\frac{\pi}{٢}$ د) $\frac{\pi}{٣}$

٢- اذا كان ص = $\frac{١}{س}$ : س ≠ ٠ فإن س$^{٢}$ ص″ + س ص′ =

أ) $\frac{١}{ص}$ ب) ١ جـ) ٣ ص د) ص

٣- اذا كان ص = لـــــو$_{هـ}$(س+٣)$^{١٦}$ + هـ$^{(٥-س)}$ فإن ص′ عندما س = ٥

أ) ٢ ب) ١ جـ) - ٣ د) ٣

٤- من نقطة على سطح الارض قذف جسم رأسيا الى أعلى وكان ارتفاعه بالامتار بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ٣٠ن – ٥ن$^{٢}$ فإن اقصى ارتفاع يصله الجسم

ا) ١٣٥ م ب) ٦٠ م جـ) ٥٠ م د) ٤٥ م

٥- اذا كان ص = ع$^{٢}$ - $\frac{١}{ع}$ ، ع = ٢س$^{٢}$ ، س = ك م ، وكان $\frac{دص}{دم}$ = ٨٥ عندما س= ١، فإن الثابت ك=

أ) ٥ ب) $\frac{١٧}{٣}$ جـ) $\frac{١٥}{٤}$ د) $\frac{٥}{٢}$

٦- اذا كان (ق′٥ هـ)′ (٣) = ١٥ ، ق(س) = س$^{٣}$ - ٩ وكان هـ′(٣) = ٥ فإن هـ(٣)=

أ) ٢ ب) صفر جـ) $\frac{١}{٢}$ د) – ٣

٧- اذا كان ق(س) = $\sqrt[٢]{س - ٢}$ معرفا على الفترة [٢ ، ٤] فإن قيمة جـ التي تحددها نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) هي

أ) ٣ ب) ٢,٥ جـ) ٣ د) غير موجودة

لاحظ الصفحة التالية

يتبع صفحة (٢) ←

٨- اذا كان ق(س) ، هـ(س) كثيرا حدود معرفان على [١ ، ٤] ويقع كل منهما في الربع الأول ، وكان ق(س) متزايدا في مجاله ، هـ(س) متناقصا في مجاله : هـ(س)≠صفر ، فإن $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)$(س) يكون

أ) متزايدا على [١ ، ٤]    ب) متناقصا على [١ ،٤]

جـ) ثابتا على [١ ، ٤]    د) متزايدا على [١ ، ٢]ومتناقصا على[٢ ،٤]

٩- اذا كان ص = $\frac{\text{٢ - جتا } \pi}{\text{جتا س}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =

أ) صفر    ب) قاس ظاس    جـ) ٣قاس ظاس    د) -٣قاس ظاس

١٠- اذا كان ق(س) = س|س| فما العبارة الصحيحة فيما يأتي

أ) ق´(١) غير موجود    ب) ق(٠) قيمة عظمى محلية

جـ) ق(٠) قيمة صغرى محلية    د) ( ٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف

١١-اذا كان ق( ص + ١) = س$^{٢}$ وكان ق(٥) = ٨ ، ق´(٥) = ٤ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما ص= ٤

أ) ٤    ب) ٣    جـ) ١٢    د) ٤٨

١٢- اذا كان ق(س) اقتران معرف على ]-٣ ، ٣[ ، وكان ق´(- ٢) = ق´ (٢) = صفر حيث ق´´(س) > صفر في الفترة ]- ٣ ، ١[ فإن العبارة الصحيحة دائما من العبارات التالية

أ) ق( - ٢) قيمة عظمى محلية    ب) ق( - ٢) قيمة صغرى محلية

جـ) ق(٢) قيمة صغرى محلية    د) ب + جـ

١٣- اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٣ \text{ ، } -١ < \text{س} \le ٢ \\ ٣ - \text{س} \text{ ، } ٢ < \text{س} \le ٣ \end{cases}$ معرفا على ]-١ ، ٣ ]

فإن الإحداثي السيني للنقاط الحرجة للاقتران ق(س) هي

أ) {٠، ٢، ٣}    ب) {-١، ٢، ٠، ٣}    جـ) {-١ ، ٠، ٣}    د) { ٠ ، ٣ }

١٤- اذا كان س . ص = ص . س = م فإن العبارة الصحيحة دائما فيما يلي (س،ص مربعتان من نفس الرتبة)

أ) س$^{-١}$ = ص    ب) ص مصفوفة منفردة    جـ) س = ص    د) س = - ص

١٥- اذا كان أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتب الثالثة وكان |٢أ| = ١٦ ، |أ ب$^{-١}$ |= ١٠ فإن |٥ب| =

أ) ٢٥    ب) ٦٢٥    جـ) ١٠٠    د) ٥٠

لاحظ الصفحة التالية ← يتبع صفحة (٣)

١٦- اذا كان أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها وكان ب = ٣ $\text{أ}^{-١}$ فإن $(\text{أ} . \text{ب})^{-١}$ =

أ) ٣          ب) ٣م          ج) $\frac{١}{٣}$          د) $\frac{١}{٣}$م

١٧- اذا كان $\begin{vmatrix} ٥ & -١ & ٢ \\ ٠ & \text{س} & ٠ \\ ٤ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢\text{س} & ٤ \\ ١ & \text{س} \end{vmatrix}$ فإن قيمة/قيم س

أ) ٠، -١          ب) ١ ، ٢          ج) ٠ ، ٢          د) -١ ، ٢

١٨- اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{pmatrix}$ ، وكان | أ| = ٥ فإن $\begin{vmatrix} ٣\text{ع} & ٣\text{ل} \\ \text{س} - ٣\text{ع} & \text{ص} - ٣\text{ل} \end{vmatrix}$

أ) ٥          ب) ٣          ج) - ١٥          د) - ٥

١٩- اذا كان $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & \text{س} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -١٤ \\ ٢ & -٧ \end{pmatrix}$ فإن قيم س ، ص على الترتيب

أ) -١ ، ٣          ب) ٢ ، -٣          ج) ٣ ، ١٠          د) ١ ، -٣

٢٠- $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٣}(\text{س} + ٢\text{هـ}) - \text{جا}^{٣}\text{س}}{٣\text{هـ}} =$

أ) $\text{جا}^{٢}$س جتاس          ب) صفر          ج) جاس حا٢س          د) $\text{جتا}^{٣}$ س

***السؤال الثاني*** :- (٢٠ علامة)

أ) اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} + \text{أس} & ، \quad ٠ \le \text{س} < ١ \\ \text{ب س}^{٢} + \text{جـ س} & ، \quad ١ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$ وكان ق يحقق شروط نظرية رول على [٠ ، ٢ ]

(١٠علامات)

١) جد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ

٢) جد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية

ب) اذا كان ق(س) = س$^{٤}$ – س$^{٣}$ اقترانا معرفا على ح جد (١٠علامات)

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢) القيم القصوى للاقتران ق(س)

٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق(س)

***السؤال الثالث***:- ( ٢٠ علامة)

أ) اذا كان ( س – ٢ص )$^{٢}$ + لـــوهـ ص = ٢٠ + ص$^{٢٠}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند (٢ ، ١) (٦علامات)

ب) اذا كانت ب = $\begin{pmatrix} ١- & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، وكان أ$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ جد المصفوفة س : س + ( أ . س$^{-١}$)$^{-١}$ = ب
(٧علامات)

جـ) اذا كان للاقتران ق(س) = ٣ جا٢س + ل(س) نقطة انعطاف افقي هي ( $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ) وكان (٧علامات)

ك(س) = (ل(س) +٢)$^{٢}$ ، جد ك$''$($\frac{\pi}{٢}$)

***السؤال الرابع***:- (٢٠ علامة)

أ) اذا كان ق(س) = س$^{٣}$ + ب س : ب > صفر ، وكان المماس للاقتران ق(س) عند س = ١ موازيا للمستقيم المار بالنقطتين ( ب – ٣ ، ٠ ) ، ( ١ ، ٨ ) . جد معادلة العمودي على المماس للمنحنى ق(س) عند س = ١
(٨علامات)

ب) استخدم طريقة جاوس لحل النظام التالي (٦علامات)

س – ٢ص + ع = ٨

٢س – ص + ٢ع = ١٠

٣ص – ع = -٩

جـ) اذا كان ق(س) = لــوهـ |٢ - س| ، هـ(س) = هـ$^{س}$ جد (٦علامات)

نهــا$_{س \to ٣}$ ( $\frac{ق(س)\ هـ(س)\ -\ هـ^{ق(س)} + ١}{س\ -\ ٣}$ )

لاحظ الصفحة التالية ← يتبع صفحة (٥)

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين و على المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط

**السؤال الخامس** :- (١٠علامات)

أ) قطعة خشب على شكل اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٠٠ $\pi$ سم$^{٢}$ ، حفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساوٍ لطول قطر قاعدة الاسطوانة . جد طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الاسطوانة اكبر ما يمكن (٥ علامات)

ب) اذا كان ق$\left(\frac{٢}{س}+١\right)$ = ١- ٢س ، س > صفر وكان ق´(أ) = $\frac{١}{٢}$ جد قيمة الثابت أ (٥ علامات)

**السؤال السادس** :- (١٠ علامات)

أ) من قمة برج اطلق جسم رأسيا للأعلى فكانت ازاحته ف بالامتار عن قمة البرج بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ف = ١٥ ن – ٥ ن$^{٢}$ وكان على ارتفاع ٦٠ م عن سطح الأرض بعد ثانيتين من قذفه . جد سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض ( ٥ علامات)

ب) اذا كان ق(س) ، ك(س) كثيرا حدود معرفان على ح، ق(س) مرسوما اسفل محور السينات (ولا يمسه) ومقعرا للأسفل على مجاله، ك(س) مرسوما اعلى محور السينات (ولا يمسه)ومقعرا للأعلى على مجاله وكان لكل من ق(س) ، ك(س) نقطة حرجة عند س = ب ، اثبت أن (ق . ك)(س) له قيمة عظمى عند س = ب (٥علامات)

انتهت الأسئلة

# الإجابة النموذجية لامتحان 12 علمي مديرية نابلس

## الجلسة الأولى

س١

| رقم الفقرة | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الإجابة | د | د | ب | د | أ | جـ | ب | أ | جـ | د |

| رقم الفقرة | ١١ | ١٢ | ١٣ | ١٤ | ١٥ | ١٦ | ١٧ | ١٨ | ١٩ | ٢٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الإجابة | ب | ب | أ | أ | أ | د | د | جـ | ب | جـ |

س٢ أ) $ق(س) = \begin{cases} س^3 + أس & 0 \le س < 1 \\ بس^2 + جـس & 1 \le س \le 2 \end{cases}$ يحقق رول

$\therefore$

* ق متصل

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \lim_{س \to 1^+} ق(س)$

$1 + أ = ب + جـ$ ——①

* ق قابل للاشتقاق

$ق'(س) = \begin{cases} 3س^2 + أ & 0 < س < 1 \\ 2بس + جـ & 1 < س < 2 \end{cases}$

$ق'(1)^- = ق'(1)^+$

$3 + أ = 2ب + جـ$ ——②

(4 علامات)

* $ق(0) = ق(2) \Leftarrow 0 = 4ب + 2جـ \Leftarrow 0 = 2ب + جـ$ بالتعويض في ②

(3 علامات)

$\therefore 3 + أ = صفر \Leftarrow أ = -3$.

$\left.\begin{array}{l} -2 = ب + جـ ——① \\ 0 = 2ب + جـ ——② \end{array}\right\} \Leftarrow ب = 2 ، جـ = -4$

لإيجاد جـ التي تحققها النظرية.

① عندما $0 < س < 1$

$3جـ^2 + -3 = 0$

$جـ^2 = 1$

$جـ = \pm 1$ مرفوض

② عندما $1 \le س < 2$

$2 \times 2جـ - 4 = 0$

$\boxed{جـ = 1}$

(3 علامات)

س٥) ق(س) = س$^{٤}$ − س$^{٣}$ على ح .

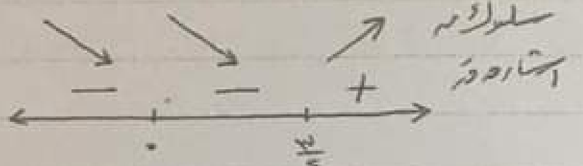
ق(س) متصل وقابل للاشتقاق لأنه كثير حدود .

قَ(س) = ٤س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ ؛ س = صفر

. = ٤س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ ؛ س = $\frac{٣}{٤}$

. = س$^{٢}$(٤س − ٣)

(3 علامات)



① ق(س) متناقص في ]−∞، ٠] ∪ [٠، $\frac{٣}{٤}$] .

(علامتان)

ق(س) متزايد في [$\frac{٣}{٤}$، ∞[ .

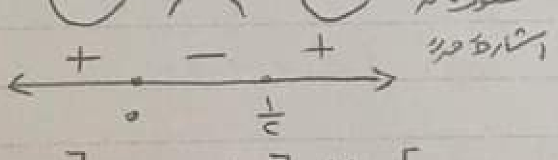
② ق($\frac{٣}{٤}$) = $\frac{-٢٧}{٢٥٦}$ قيمة صغرى محلية . (علامة)

قً(س) = ١٢س$^{٢}$ − ٦س ؛ س = صفر

. = ١٢س$^{٢}$ − ٦س ؛ س = $\frac{١}{٢}$

. = ٦س(٢س − ١)

(علامتان)



③ ق(س) مقعر للأعلى في ]−∞، ٠] ∪ [$\frac{١}{٢}$، ∞[ .

(علامتان)

ق(س) مقعر للأسفل في [٠، $\frac{١}{٢}$] .

س٣ أ) $(\text{س} - ٢\text{ص})^{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = ٢ + \text{ص}^{-٢}$ $\left.\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{(١،٢)}$

نشتق الطرفين.

$٢(\text{س} - ٢\text{ص})(١ - ٢\text{ص}') + \dfrac{\text{ص}'}{\text{ص}} = -٢\,\text{ص}^{-٣}\,\text{ص}'$ (٣ علامات)

عوض $٢~~(٢ - ٢)~~(١ - ٢\text{ص}') + \text{ص}' = -٢\text{ص}'$ (علامتان)

$\text{ص}' = -٢\text{ص}' \Leftarrow \text{ص}' = \text{صفر}.$ (علامة)

س٣ ب) $\text{ن} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

$\text{س} + (\text{أ}\,.\,\text{س}^{-١})^{-١} = \text{ن} \Leftarrow \text{س} + \text{س}\,.\,\text{أ}^{-١} = \text{ن}$ (علامتان)

$\text{س}\,(\text{م} + \text{أ}^{-١}) = \text{ن}.$

$\text{س}\left(\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

$\text{س}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ (علامة)

$\text{س}\,.\,\text{ج} = \text{ن} \Leftarrow |\text{ج}| = -٢$

$\text{ج}^{-١} = \dfrac{١}{-٢}\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$ (علامتان)

$\text{س} = \text{ن}\,.\,\text{ج}^{-١} \Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$

$\text{س} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix}$ (علامتان)

س٣ د)

ق(س) = ٣ جا ٢س + ل(س) $\qquad$ ق($\frac{\pi}{٢}$) = $\frac{٣\pi}{٢}$ $\quad$ ق'($\frac{\pi}{٢}$) = ٠

ل(س) = ق(س) − ٣ جا ٢س $\qquad$ ق''($\frac{\pi}{٢}$) = صفر. (علامة)

ل($\frac{\pi}{٢}$) = ق($\frac{\pi}{٢}$) − ٣ جا ٢ $\frac{\pi}{٢}$ = $\frac{٣\pi}{٢}$

ل'(س) = ق'(س) − ٦ جتا ٢س

ل'($\frac{\pi}{٢}$) = ق'($\frac{\pi}{٢}$) − ٦ جتا ٢ $\frac{\pi}{٢}$ = ٦ $\qquad$ (3 علامات)

ل''(س) = ق''(س) + ١٢ جا ٢س

ل''($\frac{\pi}{٢}$) = ق''($\frac{\pi}{٢}$) + ١٢ جا ٢ $\frac{\pi}{٢}$ = صفر.

ك(س) = (ل(س) + ٢)$^{٢}$

ك'(س) = ٢ (ل(س) + ٢) ل'(س)

= ٢ ل(س) ل'(س) + ٤ ل'(س) $\qquad$ (علامة)

ك''(س) = ٢ل(س) ل''(س) + ٢ل'(س) ل'(س) + ٤ ل''(س) $\qquad$ (علامة)

ك''($\frac{\pi}{٢}$) = ٢ ل($\frac{\pi}{٢}$) ~~ل''($\frac{\pi}{٢}$)~~ + ٢(ل'($\frac{\pi}{٢}$))$^{٢}$ + ~~٤ ل''($\frac{\pi}{٢}$)~~

= ٢ × ٣٦ = ٧٢ $\qquad$ (علامة)

س٤ ب)

$$\bar{\text{م}} = \left[\begin{array}{r|rrr} ٨ & ١ & -٢ & ١ \\ ١٠ & ٢ & -١ & ٢ \\ -٩ & -١ & ٣ & ٠ \end{array}\right] \qquad -٢\,\text{ص}_١ + \text{ص}_٢$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} ٨ & ١ & -٢ & ١ \\ -٦ & ٠ & ٣ & ٠ \\ -٩ & -١ & ٣ & ٠ \end{array}\right] \qquad -١\,\text{ص}_٢ + \text{ص}_٣$$

(٤ علامات)

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} ٨ & ١ & -٢ & ١ \\ -٦ & ٠ & ٣ & ٠ \\ -٣ & -١ & ٠ & ٠ \end{array}\right]$$

∴ $-\text{ع} = -٣$ $\qquad ٣\text{ص} = -٦$ $\qquad \text{س} - ٢\text{ص} + \text{ع} = ٨$

$\text{ع} = ٣$ $\qquad \text{ص} = -٢$ $\qquad \text{س} + ٤ + ٣ = ٨$

$\text{س} = ١$

(علامتان)

س٤ ج) $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}} |٢ - \text{س}|$ ، $\text{هـ(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$ .

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ق(س) هـ(س)} - \text{هـ}^{\text{ق(س)}} + ١}{\text{س} - ٣}$$ بالتعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$

(علامتان)

باستخدام لوبيتال $\lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق(س) هـ}'\text{(س)} + \text{هـ(س) ق}'\text{(س)} - \text{ق}'\text{(س) هـ}^{\text{ق(س)}}$

بعد اعادة التعريف

$\text{ق(س)} = \text{لو(س} - ٢)$

$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{١}{\text{س} - ٢}$ (علامتان)

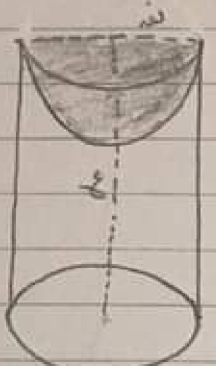
$= \text{ق(٣) هـ}'\text{(٣)} + \text{هـ(٣) ق}'\text{(٣)} - \text{ق}'\text{(٣) هـ}^{\text{ق(٣)}}$

$\text{هـ}'\text{(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{صفر} \times \text{هـ}^٣ + \text{هـ}^٣ \times ١ - ١ \times ١$

(علامتان)

$\text{هـ}^٣ - ١$



س ٩) حجم الجزء المتبقي =

حجم الاسطوانة − حجم نصف الكرة

$\text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\,\text{ع} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^3$ علامة

لكن المساحة الجانبية للاسطوانة = $2\pi\,\text{نق}\,\text{ع}$

$400\pi = 2\pi\,\text{نق}\,\text{ع}$ علامة

$200 = \text{نق}\,\text{ع}$

$\text{ع} = \frac{200}{\text{نق}}$

$\therefore\ \text{ح} = \pi\,\text{نق}^2\,\frac{200}{\text{نق}} - \frac{2}{3}\pi\,\text{نق}^3$ (علامتان)

$\text{ح}' = 200\pi - 2\pi\,\text{نق}^2 \Leftarrow 0 = 200\pi - 2\pi\,\text{نق}^2$

$\text{نق}^2 = 100$

$\text{نق} = 10$ سم

$\therefore$ عند نق = ١٠ يكون حجم الجزء المتبقي أكبر ما يمكن (علامة)

اشارة ح'

$\xleftrightarrow{\quad + \quad 10 \quad - \quad}$

س ٥) $\text{ق}\left(\frac{2}{\text{س}} + 1\right) = 1 - 2\text{س}$ ; س > ٠ . $\text{ق}'(\text{أ}) = \frac{1}{2}$

نشتق الطرفين ← $\text{ق}'\left(\frac{2}{\text{س}} + 1\right)\left(\frac{-2}{\text{س}^2}\right) = -2$ ، $\text{أ} = \frac{2}{\text{س}} + 1$ (علامتان)

$\text{ق}'(\text{أ})\left(\frac{-2}{\text{س}^2}\right) = -2$

$\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{\text{س}^2}\right) = -2$ (علامتان)

$\text{س}^2 = \pm\frac{1}{2}$ ، $\text{س} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \text{أ} = \frac{2}{\text{س}} + 1 = 5$ (علامة)

س٦ أ) ف = $١٥ن - ٥ن^{٢}$ ← ع = $١٥ - ١٠ن$

$٦٠ - ع = ١٥(٢) - ٥(٤)$

$٦٠ - ع = ٣٠ - ٢٠$ (علامتان)

ع = ٥٠ م ارتفاع البرج .

∴ ف = $١٥ن - ٥ن^{٢}$

$-٥٠ = ١٥ن - ٥ن^{٢}$ (علامتان)

$٥ن^{٢} - ١٥ن - ٥٠$ = صفر .

$ن^{٢} - ٣ن - ١٠$ = صفر ← $(ن - ٥)(ن + ٢) = ٠$ .

ن = ٥ ث .

$ع|_{ن=٥} = ١٥ - ١٠(٥)$ (علامة)

= −٣٥ م/ث .

س٦ ب) ق(س) < صفر ∀ح ، $ق''$(س) > ٠ ∀ح (علامة)

ل(س) > صفر ∀ح ، $ل''$(س) > ٠ ∀ح .

ق(ب) = ل(ب) = صفر .

$(ق \times ل)'(س) = ق(س)\, ل'(س) + ل(س)\, ق'(س)$ (علامة)

$(ق \times ل)'(ب) = ق(ب)\, ل'(ب) + ل(ب)\, ق'(ب)$

= صفر .

(علامتان)

$(ق \times ل)''(س) = ق(س)\, ل''(س) + ل'(س)\, ق'(س) + ل(س)\, ق''(س) + ق'(س)\, ل'(س)$

$= ق(س)\, ل''(س) + ٢\, ل'(س)\, ق'(س) + ل(س)\, ق''(س)$

$(ق \times ل)''(ب) = ق(ب)\, ل''(ب) + \cancel{٢\, ل'(ب)\, ق'(ب)} + ل(ب)\, ق''(ب)$

$-\times+ \quad + \quad +\times-$

(علامة)

$-$

∴ عند س = ب يوجد قيمة عظمى محلية .

وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم - قلقيلية
الزمن :ساعتان ونصف
امتحان عنقودي

المبحث: الرياضيات
الصف :الثاني عشر العلمي
التاريخ : ٣/ ١/ ٢٠٢١
مجموع العلامات : ١٠٠

٢٠٢٠/ ٢٠٢١

**ملاحظة : عدد أ سئلة الورقة ( ستة ) اسئلة، اجب عن خمسة منها فقط**

**القسم الاول : يتكون هذا القسم من (اربعة ) اسئلة ، وعلى المشترك ان يجيب عنها جميعا**

**السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي :** **(٣٠علامات )**

**١) ما قيمة** $\underset{\text{س}\rightarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}\,\text{جا}\dfrac{\pi}{\text{س}}}{\text{س} - ١}$

**أ)** $-\pi$ **ب)** $-١$ **جـ )** $-٢$ **د)** $\pi$

**٢) اذا كان متوسط تغير** $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ **في** $[\text{أ}،٣\text{أ}]$ **يساوي ١١ ماقيمة** أ

**أ)** $-١$ **ب)** ١ **جـ )** ٣ **د)** ٨

**٣) اذا كان** $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢ \text{ ، } \text{س} \neq ٥ \\ ٤\text{س} + ٧ \text{ ، } \text{س} = ٥ \end{cases}$ **فما قيمة** $\text{ق}'(٥)$

**أ)** صفر **ب)** ٥ **جـ )** ١٠ **د)** غيرموجودة

**٤) اذا علمت ان** $\text{س} = \text{قاص}$ **فما قيمة** $\text{س}\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

**أ)** ظتاص **ب)** قاصظاص **جـ )** جتاص **د)** س

**٥) اذا كان المستقيم** $\text{ص} = ٢\text{س} + ١$ **عمودي على المماس لمنحنى** $\text{ق}(\text{س})$ **عند النقطة** $(-٢، -٣)$ **فان** $\underset{\text{س}\rightarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{ق}(\text{س}) + ٦}{\text{س} + ٢} =$

**أ)** $\dfrac{-١}{٢}$ **ب)** ١ **جـ )** ٢ **د)** $-١$

**٦) اذا كان** $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{ب}}{٢\text{س} - ١}$ ، $\text{س} \neq \dfrac{١}{٢}$ ، $\text{ب} > ٠$ ، **وكان** $(\text{ق}' \circ \text{هـ})'(١) = -٤٨$

**فما قيمة الثابت ب**

**أ)** ١٦ **ب)** ٨ **جـ )** ٤ **د)** ٢

**٧ ) اذا كان** $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جا}٢\text{س}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}(٢ + \text{ظاس}) + \text{جا}\pi$ **جد** $\text{ق}'(٠)$

**أ)** $\dfrac{٥}{٢}$ **ب)** $\dfrac{٣}{٢}$ **جـ )** $\dfrac{-٣}{٢}$ **د)** $\dfrac{١}{٢}$

**٨) اذا كان** $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ **فان قيم س الحرجة لـ** $\text{ق}'(\text{س})$ **هي**

**أ)** $-٢$ **ب)** $-١$ **جـ )** ٠، $-١$ **د)** ٠، $-٢$

لاحظ الصفحة التالية

يتبع صفحة (٢) ←

٩) $\text{ص} = \frac{\text{جتاس}}{\text{١}-\text{جاس}}$ فان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$

أ) $\frac{\text{١}}{\text{١}-\text{جاس}}$ ب) $\frac{\text{جاس}-\text{١}}{(\text{١}-\text{جاس})^{\text{٢}}}$ جـ) $\frac{\text{١}+\text{جاس}}{\text{١}-\text{جاس}}$ د) $\frac{-(\text{١}+\text{جاس})}{(\text{١}-\text{جاس})^{\text{٢}}}$

١٠) اذا كان $\text{جتا}^{\text{٢}}\text{ق}(\text{٢س}) = \frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{٣}}{\text{س}}$ ، $\text{ق}(\text{٦}) = \frac{\pi}{\text{٣}}$ فان $\text{ق}'(\text{٦})$

أ) $\frac{\text{١}}{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}$ ب) $\frac{-\text{١}}{\sqrt{\text{٢٧}}}$ جـ) $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ د) $\frac{-\text{١}}{\text{٦}}$

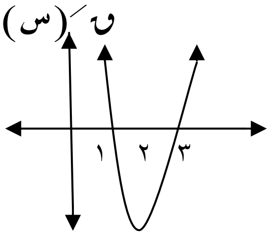
١١) اذا كان $\text{ص} = (\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}}$ ، $\text{س} = \frac{\text{١}-\text{ن}}{\text{١}+\text{ن}}$ فان $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\text{٠}}$

أ) ١٧ ب) ٨ جـ) ٣ د) -٨

١٢) اذا كانت $\text{ق}''(\text{س}) = (\text{س}-\text{٢})^{\text{٢}}(\text{س}-\text{١})^{\text{٣}}(\text{س}-\text{٥})^{\text{٤}}$ فان عدد نقاط الانعطاف للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ المعرف على ع

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٠

*) معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $\text{ق}'(\text{س})$ اجب عن الفقرتين (١٣ ، ١٤) الاتيتين



١٣) ما قيمة / قيم س التي يكون عندها للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ قيمة صغرى محلية

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ١، ٣

١٤) ما هو المجال الذي يقع فيه منحنى $\text{ق}(\text{س})$ تحت جميع مماساته

أ) $]\text{١}، \text{٣}[$ ب) $]\text{٢}، \infty[$ جـ) $]-\infty، \text{١}[ \cup ]\text{٣}، \infty[$ د) $]-\infty، \text{٢}[$

١٥) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{٤} - |\text{٣} - \text{س}|$ ، $\text{س} \in [\text{٢}، \text{٣}]$ فان القيمة العظمى المطلقة

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ٤ د) ٦

١٦) اذا كان $\text{س} = \text{١٢} - \text{٢ص}$ احدى المعادلتين الخطيتين بمتغيرين وعند استخدام طريقة كريمر للحل وجد $|\text{٢أ}_{\text{س}}| + \text{٨}|\text{أ}_{\text{س}}| = \text{٨}$ فما قيمة $|\text{أ}|$

أ) ٦ ب) -٦ جـ) $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ د) $\frac{-\text{١}}{\text{٦}}$

١٧) $[\text{٢س} \quad \text{س}] \cdot \begin{bmatrix} \text{٥} \\ \text{س} \end{bmatrix} = [\text{١١}]$ فما قيم س

أ) −١، ١١ ب) ١، -١١ جـ) ١٠، -١ د) -١٠، ١

١٨) اذا كان س ، ص مصفوفتان مربعتين غير منفردتان من الرتبة ن حيث $|\text{٢س}\text{ص}^{-\text{١}}| = \text{٨}$ ، $|-\text{س}| = \text{٣}$ ، $|\text{ص}| = \text{١٢}$ فما قيمة ن

أ) ٣ ب) ١٦ جـ) ٥ د) ٣٢

لاحظ الصفحة التالية
يتبع صفحة (٣)

١٩) اذا كان $(\text{أ} - \text{ب})^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ **فما قيمة** ٣أ − ٣(ب + ٤أ) + ٢ب

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -\frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$ ج ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ \frac{١}{٢} & -١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

٢٠) اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \text{س} & ١ \\ \text{س} + ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & -\frac{١}{٢} \\ \text{س} - ٥ & ١ \end{bmatrix}$ **فما قيمة س**

أ) −٢ ب) ٢ ج ) ١ د) −٤

**السؤال الثاني : (٢٠ علامة )**

أ) اذا كان ق(س) = س³ − ٩س² + ٢٤س − ٧ جد :

١) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س). (٧ علامات )

ب) اذا كان أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٦ & ٧ \\ ٤ & -٥ & \text{س} \\ \text{س} & -٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & -١ \end{bmatrix}$ ، ج = $\begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

اوجد : ١) ج² . ب⁻¹ ٢) اذا علمت ان |أ| = −١٣ جد س. (٧ علامات )

ج ) اذا كان س+ظتا(س ص) = ٠ اثبت ان : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{١ + \text{س}^٢} - \text{ص}\right)$ . (٦ علامات )

**السؤال الثالث : (٢٠ علامة )**

أ) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أس}^٢ + ٢\text{س} & ، \quad ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ \text{س}^٣ - \text{ب س} + ١٢ & ، \quad ٢ \leq \text{س} \leq ٣ \end{cases}$

جد : ١) الثابتين أ ، ب علما بان ق(س) قابل للاشتقاق على مجالة

٢) قيم س التي تجعل المماس يوازي القاطع الواصل بين النقطتين (٠، ق(٠)) ، (٣، ق(٣))

(١٠ علامات )

ب) اذا كان ق(س) = جتا²س − جتا٢س + ٢ ، س ∈ $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$ جد :

١) مجالات التقعر للاعلى وللاسفل ٢) نقط الانعطاف لمنحنى ق(س) (١٠ علامات )

**السؤال الرابع : (٢٠ علامة )**

أ) جد معادلة العمودي على منحنى العلاقة (ص − ٣)² = س + ٤ والموازي للمستقيم الذي معادلته ٢ص − ٤س + ١ = ٠ (٧ علامات )

لاحظ الصفحة التالية

يتبع صفحة (٤) ←

**ب) حل المعادلة المصفوفية التالية :**

$$\begin{bmatrix}٢ & ٠\\ ١ & ١-\end{bmatrix} = س\,.\begin{bmatrix}١ & ١\\ ٢ & ٢\end{bmatrix} - ٢س\,.\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ ٣ & ٤\end{bmatrix}$$

**(٧ علامات )**

**جـ ) سلك طوله ١٢ متر ، ثني على شكل مستطيل بحيث مر السلك على كل ضلع مرتين ما عدا ضلع واحد فقد مر علية مرة واحدة. اوجد ابعاد المستطيل لتكون مساحته اكبر ما يمكن .** **(٦ علامات )**

---

**يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك ان يجيب عن احدهما فقط**

**السؤال الخامس: ( ١٠ علامات)**

**م) قذف جسم راسيا لأعلى من سطح الارض بحيث ارتفاعه بالأمتار عن نقطة قذفه يعطى حسب العلاقة ف (ن) = مـن – ٥ن ٢ اذا علمت ان سرعة الجسم اثناء هبوطة وبعد مرور ٦ ثواني تساوي نصف سرعتة الابتدائية جد اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم .** **(٥ علامات )**

**ب) اذا كان :**

$$\begin{bmatrix}١- & ٣\\ ٠ & \frac{١}{٢}\end{bmatrix} = م$$ ، ب = $$\begin{bmatrix}٠ & ٤\\ ٣ & ١-\end{bmatrix}$$ **اوجد المصفوفة س علما بان** $|م|^{١-}س - ب\,.\,س = م^{٢}$

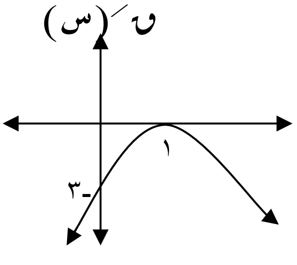
**(٥ علامات )**

---

**السؤال السادس : (١٠علامات)**

**م) ليكن ق ، هـ اقترانين حيث ق´(س) + هـ(س) = ٠ ، هـ´(س)-ق(س) = ٠ ، وكان ق(س) ، هـ(س) > ٠ ، وكان ع(س) =** $\frac{هـ(س)}{ق(س)}$ **اثبت ان ع(س) متزايد على مجالة .** **(٥ علامات )**

**ب) يمثل الشكل المجاور منحنى ق´(س)، اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة يمر منحناة بنقطة الاصل ، جد قاعدة الاقتران ق(س)**



**(٥ علامات )**

## انتهت الاسئلة

| | | |
|---|---|---|
| الفرع العلمي ( النموذج الأول ) | | التاريخ : ٥/ ٣ / ٢٠٢١ |
| المبحث رياضيات – الورقة الأولى | | مدة الإمتحان : ساعتان ونصف |
| أ . بديع أحمد حمدان | نموذج امتحان تجريبي لعام ٢٠٢١ | مجموع العلامات : ١٠٠ علامة |

**ملاحظة : عدد أسئلة الورقة ( ثمانية ) أسئلة ، أجب عن ( خمسة ) منها فقط**

**القسم الأول : يتكون هذا القسم من ( ستة ) أسئلة ، أجب عن ( أربعة ) فقط على أن يكون الأول منها**

**السؤال الأول : ( ٢٠ علامة )**

يتكون هذا السؤال من ( ١٠ ) فقرات من نوع اختيار من متعدد ، من أربعة بدائل اختر رمز الإجابة الصحيحة ثم ضع إشارة ( X ) في المكان المخصص في دفتر الإجابة :

١ . إذا كان متوسط تغير الإقتران ق( س ) عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + هـ يساوي $\frac{٣هـ^{٢} - ٤هـ}{٢هـ}$ فإن ق َ( ٢ ) تساوي :

Ⓟ -٢ Ⓑ ١ Ⓙ - ١ Ⓓ ٢

٢ . قيمة / قيم الثابت م التي تجعل الإقتران ق( س ) = | ٤س$^{٢}$ + م س + ١ | قابلاً للإشتقاق على ح

Ⓟ ٤ Ⓑ م ∋ [ -٤ ، ٤ ] Ⓙ -٤ Ⓓ ب ∋ ] -٤ ، ٤ [

٣ . إذا كان ق( س ) = س$^{٢}$ × [ س ] فإن ق َ( ٢,٥ ) تساوي :

Ⓟ ٤ Ⓑ ٦ Ⓙ ١٠ Ⓓ ١٢

٤ . إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الإقتران ق( س ) عند النقطة ( ١٢ ، ب ) هي م ص = س وكان ق َ( ١٢ ) = ٦ فإن الثابت ب = :

Ⓟ -٦ Ⓑ ٢ Ⓙ ٦ Ⓓ -٢

٥ . إذا كان ق( س ) = هـ$^{٢}$( ك ( س ) ) ، ك ( ١ ) = ٢ ، ك َ( ١ ) = ٣ ، هـ ( ٢ ) = ٤ ، هـ َ( ٢ ) = ٥ ، جد ق َ( ١ )

Ⓟ ١٢٠ Ⓑ ٦٠ Ⓙ ١٠٠ Ⓓ ٩٦

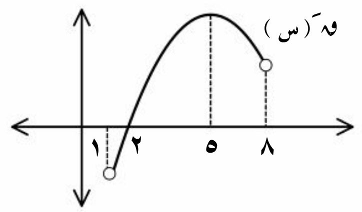
٦ . إذا كانت العلاقة بين السرعة ( ع ) والمسافة ( ف ) هي ع = ٤ف$^{٢}$ – ٦ف ، جد التسارع عندما ف = ٢

Ⓟ ٦٤ Ⓑ ٢٤ Ⓙ ٣٢ Ⓓ ٤٠

٧ . إذا كان ق( س ) = { ٢س ، -١ < س ⩽ ١ ؛ س – ١ ، ١ < س ⩽ ٢ } فإن عدد النقاط الحرجة للإقتران ق يساوي :

Ⓟ ٢ Ⓑ ١ Ⓙ ٤ Ⓓ ٣

٨ . يمثل الشكل المجاور منحنى ق َ( س ) فإن نقطة الإنعطاف لمنحنى ق( س ) هي :



Ⓟ ( ١ ، ق( ١ ) ) Ⓑ ( ٥ ، ق( ٥ ) ) Ⓙ ( ٢ ، ق( ٢ ) ) Ⓓ لا يوجد نقطة إنعطاف

٩ . إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين بحيث إن : $|\text{أ . ب}| = \text{١٨}$ ، $|\text{أ}| + |\text{ب}| = \text{١١}$ وكان $|\text{أ}| \geqslant |\text{ب}|$ فإن قيمة $|\text{أ}| =$ :

Ⓐ ٧ ‏ ‏ ‏ ب) ٢ ‏ ‏ ‏ ج) ٩ ‏ ‏ ‏ د) ٦

١٠ . إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{-٤} \\ \text{٦} & \text{٢} \end{bmatrix}$ وكان ٢٣ ( أ − ب ) = أ + ٢٤ ( أ − ب ) فإن $|\text{أ}^{-1}|$ .

أ) $\frac{\text{١}}{\text{٧}}$ ‏ ‏ ‏ ب) ٧ ‏ ‏ ‏ ج) $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ‏ ‏ ‏ د) ٢

## السؤال الثاني : ( ٢٠ علامة )

أ ) إذا كان ق(س ) = $\begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} + \text{ب س} + \text{٣} & \text{، س} < \text{٢} \\ \text{أ س} + \text{ج} & \text{، س} \geqslant \text{٢} \end{cases}$ قابلاً للإشتقاق عند س = ٢ وكان متوسط التغير في ق(س ) في الفترة [ ١ ، ٥ ] = ٣ جد قيمة أ ، ب ، ج

ب ) إذا كان ق(س ) = $\text{س}^{\text{٢}}$ ، ك ( ١ ) = ك َ( ١ ) = ٢ جد : $\frac{\text{د}}{\text{د س}} \left( (\text{ق} \circ \text{ك})(\text{س}) \right)^{\text{٢}}$ عندما س = ١ .

ج ) إذا كان س ص = $(\text{س} + \text{ص})^{\text{٤}}$ أثبت أن : صَ = $\frac{\text{ص}(\text{٣س} - \text{ص})}{\text{س}(\text{س} - \text{٣ص})}$

## السؤال الثالث : ( ٢٠ علامة )

أ ) إذا كان ق(س ) = ٢ظاس حيث ، هـ (س ) = $\frac{\text{أ}}{\text{٢س} + \text{١}}$ وكان $(\text{هـ} \circ \text{ق})'\left(\frac{\pi}{\text{٤}}\right) = \frac{\text{٨}}{\text{٢٥}}$ ، جد قيمة الثابت أ .

ب ) جد نقطة تعامد منحنى الإقترانين ق(س ) = $\sqrt{\text{٢} - \text{س}}$ ، هـ (س ) = $\text{س}^{\text{٢}}$ ثم جد معادلة المماس لمنحنى الإقتران ق(س ) عند تلك النقطة .

ج ) حل المعادلة المصفوفية الآتية ٣ ( سـ + $\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٠} \\ \text{٢} & \text{-٣} \end{bmatrix}$ ) = ٢ $\begin{bmatrix} \text{٦} & \text{-١} \\ \text{-٣} & \text{٤} \end{bmatrix}$ .

## السؤال الرابع : ( ٢٠ علامة )

أ ) إذا كان الإقتران ق(س ) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}{\text{س}}$ ، أوجد :

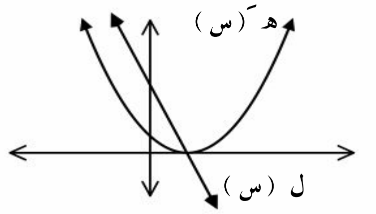
١ ) مجالات التزايد والتناقص للإقتران ٢ ) القيم القصوى ( إن وجدت ) للإقتران ٣ ) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل

ب ) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{-٣} \\ \text{-٢} & \text{٤} \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} \text{-٢} & \text{١} \\ \text{٤} & \text{٣} \end{bmatrix}$ حل المعادلة المصفوفية : $\text{أ}^{-1} \times (\text{سـ}^{-1} \times \text{ب})^{-1} = \text{م} + \text{ب}$ .

ج ) جد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{١}} \frac{\text{س لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) - \text{س} + \text{١}}{(\text{س} - \text{١})\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})}$

**السؤال الخامس : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) أسطوانة دائرية قائمة مغلقة نصف قطر قاعدتها نق سم وارتفاعها ع سم وحجمها ٥٤ $\pi$ سم$^{٣}$ جد نصف قطر قاعدة الأسطوانة وارتفاعها اللذان يجعلان مساحة سطحها الكلية أقل ما يمكن .**



**ب ) إذا كان ق( س ) إقتران متصل على ح بحيث :**

**قَ( س ) = هـ َ( س ) × ل ( س )**

**بالإعتماد على الشكل المجاور بين أن منحنى ق( س ) مقعر للأسفل على الفترة ] ١ ، ∞ [**

**جـ ) حل النظام الأتي من المعادلات بإستخدام طرقة كريمر : − ص + ٣س = ٢ ، ٢س + ٣ص = ٥**

**السؤال السادس : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) إذا كان ٣ ص = − $\sqrt{(ع + ١)^{٣}}$ − $\sqrt{(ع - ١)^{٣}}$ ، ع = ٢س ، س > $\frac{١}{٢}$**

**بين أن : | $\frac{د ص}{د س}$ | = $\sqrt{٤س + ٢\sqrt{٤س^{٢} - ١}}$**

**ب ) إذا كان متوسط تغير ق( س ) على الفترة [ ٢ ، ٥ ] = ١٦ ، إحسب متوسط تغير هـ ( س ) = س$^{٢}$ ق( س ) − ٢ س على نفس الفترة حيث أن هـ ( ٢ ) = −١٦**

**جـ ) إذا كان هـ ( س$^{٢}$ ) = ق$^{٢}$ ( س ) − ١٠ وكان هـ َ( ٤ ) = ٥ ، قَ( ٢ ) = ٢ ، فأوجد هـ ( ٤ )**

---

**القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط**

**السؤال السابع : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) نافذة تتكون من مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين إرتفاعه $\frac{٣}{٨}$ طول قاعدته ، إذا كان محيط النافذة ٩ أمتار ، فاحسب أبعاد الجزء المستطيل من النافذة والذي يسمح بدخول أكبر كمية من الضوء عبر النافذة .**

**ب ) إذا كان ص جاس + ٥ص = جتا$^{٢}$ ٣س ، جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ .**

**السؤال الثامن : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) من سطح بناية ، سقط جسم وفق العلاقة ف$_{١}$ (ن ) = ١٦ ن$^{٢}$ ، وفي نفس اللحظة رمى شخص جسماً رأسياً نحو الأسفل وفق العلاقة ف$_{٢}$ (ن ) = ١٦ ن$^{٢}$ + ٢٠ ن ، فإذا وصل الجسم الأول إلى سطح الأرض بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية من وصول الجسم الثاني**

**١ ) جد ارتفاع البناية . ٢ ) جد سرعة كل من الجسمين لحظة وصولهما للأرض .**

**ب ) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٥ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، جد قيمة ك ∈ ح التي تجعل المصفوفة ب = (( ك − ٣ ) م$_{٣}$ − ٢ أ ) غير منفردة .**

## إجابات الإختيار من متعدد ( النموذج الأول )

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | أ | -٢ | ٢ | ب | أ ∋ ] -٤ ، ٤ [ | ٣ | ج | ١٠ |
| ٤ | د | -٢ | ٥ | أ | ١٢٠ | ٦ | د | ٤٠ |
| ٧ | أ | ٢ | ٨ | ب | ( ٥ ، ق( ٥ ) ) | ٩ | ج | ٩ |
| ١٠ | أ | $\frac{١}{٧}$ | | | | | | |

( النموذج الأول )

الإمتحان تم إعداده وفق النظام الجديد للعام الحالي

تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

أ . بديع أحمد حمدان

كراسة السراج

# الورقة الثانية

بسم الله الرحمن الرحيم

وحدة فلسطين

وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم -طولكرم
المبحث : الرياضيات

## امتحان تجريبي للفصل الثاني لعام ٢٠٢١
## الثاني العلمي /الورقة الثانية

مدة الامتحان: ساعتان ونصف
اليوم والتاريخ: الخميس ٦/٥

**مجموع العلامات (١٠٠) علامة**

---

**ملاحظة: عدد أسئلة الورقة (ثمانية) أسئلة، أجب على (خمسة) منها فقط**

**القسم الأول: يتكون هذا القسم من ستة أسئلة، وعلى المشترك أن يجيب على أربعة على ان يكون السؤال الاول منها**

**السؤال الاول:-اختر الإجابة الصحيحة ، ثم ضع اشارة X فى المكان المخصص فى دفتر الاجابة** **(٢٠ علامة)**

١)اذا كانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة $[\text{٠، ٢}]$، وكان العنصر الرابع يساوي(٦) جد عدد عناصر التجزئة ؟

أ) ٩ ب) ١٠ ج) ١١ د) ٢٠

٢)اذا كان م(س)، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)، جد $\int (\text{هـ(س)} - \text{م(س)})\,\text{س.ءس}$،

حيث أن هـ(س) = ٣س$^{٢}$ − ٨س + ٥، م(٢) = ٧ ؟

أ) ٣س$^{٢}$+جـ ب) −٣س$^{٢}$+جـ ج) ٦س$^{٢}$+جـ د) −٦س$^{٢}$+جـ

٣)اذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{٣} & \text{-٥} \\ \text{٢} & \text{٤} \end{bmatrix}$، $\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{-٣} & \text{٥} \\ \text{١} & \text{-٦} \end{bmatrix}$، جد قيمة المصفوفة ٢ أ١ + ٥(أ − ٣ب) + ٣٢ب ؟

أ) $\begin{bmatrix} \text{٠} & \text{٠} \\ \text{٣} & \text{-٢} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \text{٠} & \text{٠} \\ \text{١٧} & \text{١٧} \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} \text{٠} & \text{٠} \\ \text{٥١} & \text{-٣٤} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \text{٠} & \text{٠} \\ \text{٥١} & \text{٣٤} \end{bmatrix}$

٤)اذا كان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{ك(س)}}$، $\text{ك(س)} = \int_{\text{٣}}^{\text{س}} \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{٢} + \text{٩}}\,\text{ءص}$، جد $\text{ق}'(\text{٣})$ ؟

أ) صفر ب) ١ ج) $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ د) $\frac{\text{١}}{\text{١٨}}$

٥)جد قيمة $\int_{\text{٢}}^{\text{٥}} \text{س} \left[\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}\right] \text{ءس}$ ؟

أ) ١٥ ب) ٤ ج) $\frac{\text{٣٩}}{\text{٢}}$ د) ٢١

٦) جد قيمة / قيم ص التي نحقق المعادلة $\begin{bmatrix} \text{١} & \text{ص} \\ \text{س} & \text{س}^{٣} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{-٢} & \text{-٧} \\ \text{س}^{٢} & \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٣} & \text{س} \\ \text{-٢} & \text{٠} \end{bmatrix}$

أ) − ٧ ب) -٧ ، -٨ ، -٦ ج) -٥ ، -٧ ، -٨ د) − ٨

٧) اذا كانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة $[\text{١، ٣}]$، وكان ق(س) اقتران معرف على نفس الفترة بحيث أن

$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ق}) = \frac{\text{٥ن} + \text{٣}}{\text{ن}^{٢} + \text{١٠}} - \text{٤}$، جد قيمة الثابت أ التي تجعل $\int_{\text{٣}}^{\text{١}} (\text{ق(س)} - \text{٢أ})\,\text{ءس} = \text{٨}$

أ) صفر ب) ١ ج) ٣ د) ٨

لاحظ الصفحة التالية ← يتبع صفحة (٢)

٨) اذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة وكان $|٥\text{أ}| = ٢٤٣$ ، $|(\text{ك}+١)\text{أ}^{-١}| = -٩$ ، جد قيمة الثابت ك ؟

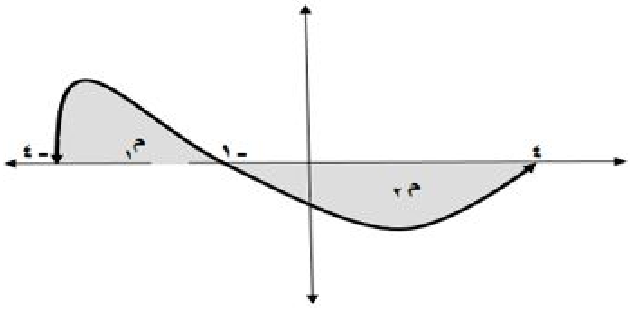
أ) – ٤ ب) -٣ ج) -٢ د) ٢

٩) جد $\displaystyle\int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٣} \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{د}\text{س}$

أ) $\text{لو}_{\text{هـ}}٢,٥$ ب) $\text{لو}_{\text{هـ}}٥$ ج) $\text{لو}_{\text{هـ}}٢٥$ د) $\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{٥}$

١٠) اذا كان $\text{م}_١$ ، $\text{م}_٢$ عددان موجبان يمثلان مساحة المنطقة المحددة في الشكل المجاور ، وكانت قيمة $\text{م}_٢$ مثلي $\text{م}_١$ ،جد قيمة $\text{م}_١ + \text{م}_٢$

علما بأن $\displaystyle\int_{-٤}^{٤} \text{ق}(\text{س})\text{د}\text{س} - ٢\int_{٤}^{-١} \text{ق}(\text{س})\text{د}\text{س} = -١٥$



أ) $\frac{٤٥}{٧}$ ب) ٩ ج) ١٢ د) $\frac{١٥}{٢}$

---

**السؤال الثاني :- ( ٢٠ علامة)**

أ) اذا كانت $\begin{vmatrix} \text{س} & -٣ & ١ \\ ٢\text{س} & -٥ & \text{س} \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix} = ١٣$ ، جد قيمة/قيم س ؟ (٦علامات)

ب) اذا علمت أن $\text{ق}''(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} + ٣$ ، جد قاعدة الاقتران ق(س) علما بان معادلة المماس لمنحنى ق(س) عندما س = ١ هي $\text{ص} = \text{س} - ٣$ ؟ (٨علامات)

ج) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{س}+٢}$ ، $\text{س} \in [٠ ، ١٠]$ ، وكانت $\sigma_٤$ تجزئة رباعية لنفس الفترة بحيث $\sigma_٤ = \{٠،١،٢،٤،١٠\}$ ، وكان ، $\text{م}(\sigma_٤ ، \text{ق}) = ٧$ جد قيمة الثابت أ ، حيث $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}-١}$ ؟ (٦علامات)

---

**السؤال الثالث:- ( ٢٠ علامة)**

أ)عند حل المعادلتين $\text{ن}\text{س} - \text{ص} = ٥$ ، $\text{ك}\text{س} + \text{ص} = ٣$ باستخدام طريقة كريمر كانت المصفوفة $\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ،

جد ١) قيم الثوابت ن ، ك ٢) قيمة س ، ص (٧علامات)

ب)أسقط جسم من ارتفاع (١٠٨٠) متر ، من السكون بتسارع ثابت مقداره (١٠ م / ث$^٢$) ، جد سرعة الجسم وهو على ارتفاع (٧٦٠) متر؟ (٦علامات)

ج) احسب قيمة التكامل $\displaystyle\int_{٠}^{٢} \text{س}^٥ \sqrt[٣]{\text{س}^٣ - ٨}\ .\ \text{د}\text{س}$ ؟ (٧علامات)

**السؤال الرابع:- ( ٢٠ علامة)**

أ)اذا كانت $ﺃ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ -٤ & ٩ \end{bmatrix}$ ، جد ما يلي ان امكن :- (٦علامات)

١) $\frac{١}{٣}(ﺃ \times ب)$ ٢) $(٢ب)^{-١}$

ب)جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = جتا س$ والمستقيم $ص = ٣ - س$ والمحورين الاحداثيين ؟(٧علامات)

ج) جد $\int \frac{١}{جا^{٢}\sqrt{س}}\, ءس$ ؟ (٧علامات)

**السؤال الخامس:- ( ٢٠ علامة)**

أ)باستخدام تعريف التكامل المحدود جد $\int_{-١}^{٢} (٣ - ٢س) . ءس$ ؟ (٨علامات)

ب)اذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للتكامل على الفترة $[١ ، ٥]$ وكان $ق(س) \leq هـ(س)$ ، $\forall س \in [١ ، ٥]$ ،

اثبت أن $\int_{٤}^{٠} ق(س + ١) . ءس \geq \int_{٨}^{٤} هـ(س - ٣) . ءس$ ؟ (٦علامات)

ج) جد $\int \frac{١}{قا س - ١}\, ءس$ ؟ (٦علامات)

**السؤال السادس:- ( ٢٠ علامة)**

أ) اذا علمت أن ، $ﺃ = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية بحيث $ب_{ي هـ} = \begin{cases} ي + هـ - ١ ، & ي < هـ \\ ٣ ، & ي = هـ \\ ي - هـ ، & ي > هـ \end{cases}$ ،

وكانت جـ مصفوفة تحقق $ﺃ + جـ = ب . جـ$ ، جد المصفوفة جـ؟ (٦علامات)

ب)اذا كان $ق(س) = |٢س - ٦|$ جد

١) الاقتران المكامل $ت(س)$ على الفترة $[٠ ، ٥]$ ؟ ٢) $\int_{١}^{٤} ق(س) . ءس$ ؟ (٧علامات)

ج) جد $\int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٨}} \sqrt{س^{٤} + س^{٢}}\, ءس$ (٧ علامات)

**القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط**

## السؤال السابع:- ( ٢٠ علامة)

أ)اذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{قتا}^{٢}\text{س} & -\text{قتاس ظتاس} \\ \text{قتاس ظتاس} & -\text{ظتا}^{٢}\text{س} \end{bmatrix}$، اثبت أن $\text{أ}^{٢} - \text{أ} = \text{و}_{٢}$ ، حيث س زاوية حادة ؟ **(٧علامات)**

ب)اذا كان $\int_{٧}^{١} ٤\text{ق}(\text{س}).\text{ءس} = ١٢$ ، $\int_{٥}^{٧} (\text{ق}(\text{س}) + ١).\text{ءس} = ٤$ ، جد $\int_{٠}^{٢} ٨\text{س}^{٣} \ \text{ق}^{/}(\text{س}^{٢} + ١).\text{ءس}$، علما بان $\text{ق}(\text{س})$ يمر بالنقطتين $(١، -١)$، $(٥، ٢)$ ؟ **(٧علامات)**

ج)اذا كانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة منتظمة للفترة $[\text{أ}، \text{ب}]$،وكان العنصر الحادي عشر فيها يساوي (٢٥) والعنصر الحادي والعشرون فيها يساوي (٤٠) ، وكان $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-١}) = ٦٠$ جد قيمة الثوابت أ، ب ، ن ؟ **(٦علامات)**

## السؤال الثامن:- ( ٢٠ علامة)

أ) اذا كان $\text{ق}(\text{س})$ اقتران متصل بحيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{ق}^{/}(\text{س})$ ، $\text{ق}(\text{س}) \neq ٠$ جد **(٧علامات)**

١) $\int (\text{ق}(\text{س}) + ٢)^{٢} .\text{ءس}$ ٢) قاعدة الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ علما بان $\text{ق}(\text{س})$ يمر بالنقطة ( ٠ ، ٥ ) ؟

ب) اذا كان $\text{ت}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\text{س}^{٢} + ١ & ، -١ \leq \text{س} < ١ \\ \text{ب}\text{س}^{٢} + \text{ج}\text{س} - ٢ & ، ١ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ ، هو الاقتران المكامل للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ على الفترة $[-١، ١]$ وكان $\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} = ٣$، جد قيم الثوابت أ، ب، ج ؟ **(٦علامات)**

ج) جد $\int (\text{س}^{٢} - ٥\text{س})^{٧} \ (٢\text{س}^{٣} - ١٥\text{س}^{٢} + ٢٥\text{س})\text{ءس}$، ؟ **(٧علامات)**

انتهت الاسئلة

# الإجابة النموذجية للامتحان التجريبى /رياضيات/الورقة الثانية/٢٠٢٠-٢٠٢١

## السؤال الأول

| رقم الفرع | البديل الصحيح |
|---|---|
| ١ | ج |
| ٢ | ب |
| ٣ | ج |
| ٤ | ج |
| ٥ | أ |
| ٦ | د |
| ٧ | ب |
| ٨ | أ |
| ٩ | د |
| ١٠ | ب |
| | |

## السؤال الثاني:- ( ٢٠ علامة)

أ) اذا كانت $\begin{vmatrix} س & -٣ & ١ \\ ٢س & -٥ & س \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix} = ١٣$ ، جد قيمة/قيم س ؟ (٦علامات)

**الحل:**

$$\begin{vmatrix} س & -٣ & ١ \\ ٢س & -٥ & س \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & \cancel{-٣}^{٣} & ١ \\ ٢س & -٥ & س \\ ١ & ٦ & ٧ \end{vmatrix} = س\begin{vmatrix} -٥ & س \\ ٦ & ٧ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٢س & س \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢س & -٥ \\ ١ & ٦ \end{vmatrix}$$

$١٣ = س(-٣٥ - ٦س) + ٣(١٤س - س) + ١٢س + ٥ = -٣٥س - ٦س^{٢} + ٣٩س + ١٢س + ٥$

$-٦س^{٢} + ١٦س - ٨ = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٨س + ٤ = ٠ \Leftarrow (٣س - ٢)(س - ٢) = ٠$

$٣س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = \frac{٢}{٣}$ ، $س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

---

ب) اذا علمت أن $ق''(س) = \frac{١}{س} + ٣$ ، جد قاعدة الاقتران ق(س) علما بان معادلة المماس لمنحنى ق(س) عندما س = ١ هي ص = س − ٣ ؟ (٨علامات)

**الحل:** من معادلة المماس نستنتج أن $ق(١) = -٢$، $ق'(١) = ١$

$ق'(س) = \int (\frac{١}{س} + ٣)دس = لو_{هـ}|س| + ٣س + جـ \Leftarrow ق'(١) = ١ \Leftarrow ١ = لو_{هـ}١ + ٣ + جـ \Leftarrow جـ = -٢$

$ق'(س) = لو_{هـ}س + ٣س - ٢ \Leftarrow ق(س) = \int (لو_{هـ}س + ٣س - ٢)دس = \int لو_{هـ}س\ دس + \int (٣س - ٢)دس$

$ق = لو_{هـ}س$ ، $دهـ = دس$

$دق = \frac{١}{س}دس \longrightarrow هـ = س$

$\Leftarrow ق(س) = س لو_{هـ}س - \int س \frac{١}{س}دس + \frac{٣س^{٢}}{٢} - ٢س + د$

$\Leftarrow ق(س) = س لو_{هـ}س - س + \frac{٣س^{٢}}{٢} - ٢س + د \Leftarrow ق(س) = س لو_{هـ}س - ٣س + \frac{٣س^{٢}}{٢} + د$

$ق(١) = -٢ \Leftarrow \frac{٣}{٢} - ٣ + د = -٢ \Leftarrow د = -\frac{١}{٢} \Leftarrow ق(س) = س لو_{هـ}س + \frac{٣س^{٢}}{٢} - ٣س - \frac{١}{٢}$

---

ج) اذا كان $ق(س) = \frac{أ}{س + ٢}$ ، س $\in [٠ ، ١٠]$ ، وكانت $\sigma_{٤}$ تجزئة رباعية لنفس الفترة بحيث $\sigma_{٤} = \{٠،١،٢،٤، ١٠\}$ ، وكان $م(\sigma_{٤}، ق) = ٧$ ، جد قيمة الثابت أ ، حيث $س^{*}_{ر} = س_{ر-١}$؟ (٦علامات)

**الحل:**

| الفترات الجزئية | طول الفترة الجزئية(ل) | $س^{*}_{ر}$ | $ق(س^{*}_{ر})$ | $ل \times ق(س^{*}_{ر})$ | $م(\sigma_{٤}، ق) = ٧$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [٠ ، ١] | ١ | ٠ | $\frac{أ}{٢}$ | $\frac{أ}{٢}$ | $\frac{أ}{٢} + \frac{أ}{٣} + \frac{أ}{٢} + \frac{٦أ}{٦} = ٧$<br>$\frac{٣أ}{٦} + \frac{٢أ}{٦} + \frac{٣أ}{٦} + \frac{٦أ}{٦} = ٧$<br>$\frac{١٤أ}{٦} = ٧ \Leftarrow ١٤أ = ٤٢ \Leftarrow أ = \frac{٤٢}{١٤} = ٣$ |
| [١ ، ٢] | ١ | ١ | $\frac{أ}{٣}$ | $\frac{أ}{٣}$ | |
| [٢ ، ٤] | ٢ | ٢ | $\frac{أ}{٤}$ | $\frac{أ}{٢}$ | |
| [٤ ، ١٠] | ٦ | ٤ | $\frac{أ}{٦}$ | $\frac{٦أ}{٦}$ | |

**السؤال الثالث :- ( ٢٠ علامة)**

أ) عند حل المعادلتين $ن س - ص = ٥$، $ك س + ص = ٣$ باستخدام طريقة كريمر كانت المصفوفة $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ،

جد ١) قيم الثوابت ن ، ك ٢) قيمة س، ص (٧علامات)

**الحل:-**

$$أ_{ص} = \begin{bmatrix} ن & ٥ \\ ك & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \Leftarrow ن = ٦،\ ك = ٢$$

$$\begin{bmatrix} ٦ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = ٦ \times ١ + ٢ = ٨$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٥ \times ١ - ٣ \times -١ = ٣ + ٥ = ٨،\ س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$$

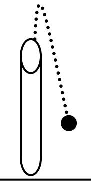
$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ \times ٣ - ٢ \times ٥ = ١٨ - ١٠ = ٨،\ ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$$

ب) أسقط جسم من ارتفاع (١٠٨٠) متر ، من السكون بتسارع ثابت مقداره (١٠ م / ث$^{٢}$) ، جد سرعة الجسم وهو على ارتفاع (٧٦٠) متر ؟ (٦علامات)

**الحل:-**

$$ع(ن) = \int ت . ءن = \int ١٠ . ءن = ١٠ ن + جـ \Leftarrow ع(٠) = ٠ \Leftarrow جـ = ٠ \Leftarrow ف(ن) = ١٠ ن$$

$$ف(ن) = \int ع . ءن = \int ١٠ ن . ءن = ٥ ن^{٢} + ء \Leftarrow ف(٠) = ٠ \Leftarrow ء = ٠ \Leftarrow ع(ن) = ٥ ن^{٢}$$



عندما يكون الجسم على ارتفاع ٧٦٠م تكون المسافة المقطوعة $ف(ن) = ١٠٨٠ - ٧٦٠ = ٣٢٠$م

$$٣٢٠ = ٥ن^{٢} \Leftarrow ن^{٢} = ٦٤ \Leftarrow ن = ٨ \Leftarrow ع(٤) = ١٠ \times ٨ = ٨٠م / ث$$

ج) احسب قيمة التكامل $\int_{٠}^{٢} س^{٥} \sqrt[٣]{س^{٣} - ٨} . ءس$ ؟ (٧علامات)

**الحل:**

$\int_{٠}^{٢} س^{٥} \sqrt[٣]{س^{٣} - ٨} . ءس =$نفرض

$$ص = \sqrt[٣]{س^{٣} - ٨} \Leftarrow ص^{٣} = س^{٣} - ٨ \Leftarrow \frac{٣ص^{٢} ءص}{٣س^{٢}} = ءس \Leftarrow \frac{ص^{٢} ءص}{س^{٢}} = ءس$$

عندما س=٠ فان ص= -٢ ، وعندما س=٢ فان ص = ٠ ، $ص^{٣} + ٨ = س^{٣}$

$$\alpha = \int_{-٢}^{٠} \cancel{س^{٥}} ص \times \frac{ص^{٢} ءص}{\cancel{س^{٢}}} \int_{-٢}^{٠} س^{٣} ص^{٣} ءص = \int_{-٢}^{٠} (ص^{٣} + ٨) ص^{٣} ءص = \int_{-٢}^{٠} (ص^{٦} + ٨ص^{٣}) ءص$$

$$\frac{ص^{٧}}{٧} + ٢ص^{٤} \Big|_{-٢}^{٠} = ٠ - \left(-\frac{١٢٨}{٧} + ٣٢\right) = -\left(-\frac{١٢٨}{٧} + \frac{٢٢٤}{٧}\right) = -\frac{٩٦}{٧}$$

**السؤال الرابع:- ( ٢٠ علامة)**

**أ)اذا كانت** $أ=\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ -١ & ٠\\ ١ & -٣\end{bmatrix}$ ، $ب=\begin{bmatrix}-٣ & ٦\\ -٤ & ٩\end{bmatrix}$ ، **جد ما يلي ان امكن :-١)** $\frac{١}{٣}(أ\times ب)$ **٢)** $(٢ب)^{-١}$

١) $$\frac{١}{٣}أ\times ب=\frac{١}{٣}\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ -١ & ٠\\ ١ & -٣\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-٣ & ٦\\ -٤ & ٩\end{bmatrix}=\frac{١}{٣}\begin{bmatrix}٢\times-٣+٣\times-٤ & ٢\times٦+٣\times٩\\ -١\times-٣+٠\times-٤ & -١\times٦+٠\times٩\\ ١\times-٣+-٣\times-٤ & ١\times٦+-٣\times٩\end{bmatrix}$$

$$=\frac{١}{٣}\begin{bmatrix}-١٨ & ٣٩\\ ٣ & -٦\\ ٩ & -٢١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-٦ & ١٣\\ ١ & -٢\\ ٣ & -٧\end{bmatrix}$$

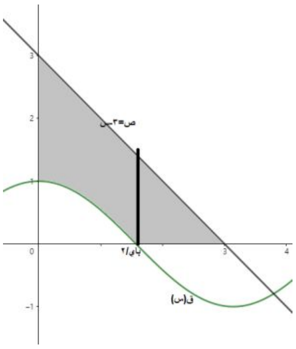
٢) $$(٢ب)^{-١}=\frac{١}{٢}ب^{-١}\Leftarrow|ب|=-٣\times٩--٦\times-٤=-٢٧+٢٤=-٣$$

$$ب^{-١}=-\frac{١}{٣}\begin{bmatrix}٩ & -٦\\ ٤ & -٣\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-٣ & ٢\\ -\frac{٤}{٣} & ١\end{bmatrix}\Leftarrow(٢ب)^{-١}=\frac{١}{٢}\begin{bmatrix}-٣ & ٢\\ -\frac{٤}{٣} & ١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{٣}{٢} & ١\\ -\frac{٢}{٣} & \frac{١}{٢}\end{bmatrix}$$

**( ٦ علامات)**

**ب)جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران** $ق(س)=جتاس$ **والمستقيم** $ص=٣-س$ **والمحورين الاحداثيين ؟(٧علامات)**

**نجد نقاط التقاطع ق(س) = ص، لا نستطيع ايجاد نقطة التقاطع**



$$ق(س)=٠\Leftarrow جتاس=٠\Leftarrow س=\frac{\pi}{٢}،\frac{٣\pi}{٢}\ ،\ ص=٠\Leftarrow ٣-س=٠\Leftarrow س=٣$$

$$م=\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}\left((٣-س)-جتاس\right)ءس+\int_{\frac{\pi}{٢}}^{٣}(٣-س)ءس$$

$$٣س-\frac{س^{٢}}{٢}-جاس\Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}+٣س-\frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{\frac{\pi}{٢}}^{٣}=\left(\frac{٣\pi}{٢}-\frac{\pi^{٢}}{٨}-١\right)-٠+\left(٩-\frac{٩}{٢}\right)-\left(\frac{٣\pi}{٢}-\frac{\pi^{٢}}{٨}\right)$$

$$=\frac{٣\pi}{٢}-\frac{\pi^{٢}}{٨}-١+\frac{٩}{٢}-\frac{٣\pi}{٢}+\frac{\pi^{٢}}{٨}=\frac{٧}{٢}$$

**طريقة اخرى:** $م=\int_{٠}^{٣}(٣-س)ءس-\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}جتاس\,ءس=٩-\frac{٩}{٢}-\left(جا\frac{\pi}{٢}-جا٠\right)=\frac{٩}{٢}-١=\frac{٧}{٢}$

**ج) جد** $\int\frac{١}{جا^{٢}\sqrt{س}}ءس$ ؟ **(٧علامات)**

$\int\frac{١}{جا^{٢}\sqrt{س}}ءس=\int قتا^{٢}\sqrt{س}\,ءس$ ، نفرض $ع=\sqrt{س}\Leftarrow ع^{٢}=س\Leftarrow ٢ع\,ءع=ءس$

$\therefore\int ٢ع\,قتا^{٢}ع\,ءع \Leftarrow$

$ق=٢ع$ $\quad$ $ءهـ=قتا^{٢}ع\,ءع$

$ءق=٢ءع$ $\quad$ $هـ=-ظتاع$

$$\therefore\int ٢ع\,قتا^{٢}ع\,ءع=-٢ع\,ظتاع+٢\int ظتاع\,ءع$$

$$\therefore\int ٢ع\,قتا^{٢}ع\,ءع=-٢ع\,ظتاع+٢\,لو_{هـ}|جاع|+جـ$$ ، حيث $ع=\sqrt{س}$

**السؤال الخامس:- ( ٢٠ علامة)**

**أ)باستخدام تعريف التكامل المحدود جد** $\int_{-١}^{٢} (٣ - ٢\text{س}).\text{ءس}$ ؟ **(٨علامات)**

$$\text{ل} = \frac{٢+١}{\text{ن}} = \frac{٣}{\text{ن}} \Leftarrow \text{س}^{*}_{\text{ر}} = -١ + \frac{٣}{\text{ن}}\text{ر}$$

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = \text{ق}(-١ + \frac{٣}{\text{ن}}\text{ر}) = ٣ - ٢(-١ + \frac{٣}{\text{ن}}\text{ر}) = ٥ - \frac{٦}{\text{ن}}\text{ر} \Leftarrow \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = (٥ - \frac{٦}{\text{ن}}\text{ر})$$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ق}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = \frac{٣}{\text{ن}}\left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٥ - \frac{٦}{\text{ن}}\text{ر}\right) = \frac{٣}{\text{ن}}\left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٥ - \frac{٦}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}\right) \Leftarrow$$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ق}) = \frac{٣}{\text{ن}}\left(٥\text{ن} - \frac{٦}{\cancel{\text{ن}}} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}+١)}{٢}\right) = \frac{٣}{\text{ن}}(٥\text{ن} - ٣\text{ن} - ٣) = \frac{٣}{\text{ن}}(٢\text{ن} - ٣) = ٦ - \frac{٩}{\text{ن}}$$

اذن
$$\int_{-١}^{٢} (٣ - ٢\text{س})\text{ءس} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}}\,\text{م}(\sigma_{\text{ن}}، \text{ق}) = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}}\left(٦ - \frac{٩}{\text{ن}}\right) = ٦ - ٠ = ٦$$

---

**ب)** $\text{ق}(\text{س}) \le \text{هـ}(\text{س})$ ، $\forall \text{س} \in [١،٥]$، **اثبت أن** $\int_{٤}^{٠} \text{ق}(\text{س}+١).\text{ءس} \ge \int_{٨}^{٤} \text{هـ}(\text{س}-٣).\text{ءس}$ ؟ **(٦علامات)**

**<u>الحل:</u>** $\text{ق}(\text{س}) \le \text{هـ}(\text{س}) \Leftarrow \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} \le \int_{١}^{٥} \text{هـ}(\text{س})\text{ءس}$ ، $\forall \text{س} \in [١،٥]$

$$\int_{٤}^{٠} \text{ق}(\text{س}+١).\text{ءس} \Leftarrow \text{ع} = \text{س}+١ \rightarrow \text{ءع} = \text{ءس} \Leftarrow (\text{س} = ٤ \rightarrow \text{ع} = ٥ ، \text{س} = ٠ \rightarrow \text{ع} = ١)$$

$$\therefore \int_{٤}^{٠} \text{ق}(\text{س}+١)\text{ءس} = \int_{٥}^{١} \text{ق}(\text{ع})\text{ءع} \Leftarrow \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} = -\int_{٤}^{٠} \text{ق}(\text{س}+١).\text{ءس} \text{.....................}(١)$$

$$\int_{٨}^{٤} \text{هـ}(\text{س}-٣).\text{ءس} \Leftarrow \text{ص} = \text{س}-٣ \rightarrow \text{ءص} = \text{ءس} \Leftarrow (\text{س} = ٤ \rightarrow \text{ص} = ١ ، \text{س} = ٨ \rightarrow \text{ص} = ٥)$$

$$\therefore \int_{٨}^{٤} \text{هـ}(\text{س}-٣)\text{ءس} = \int_{٥}^{١} \text{هـ}(\text{ص})\text{ءص} \Leftarrow \int_{١}^{٥} \text{هـ}(\text{س})\text{ءس} = -\int_{٨}^{٤} \text{هـ}(\text{س}-٣).\text{ءس} \text{....................}(٢)$$

$$\because \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} \le \int_{١}^{٥} \text{هـ}(\text{س})\text{ءس} \xrightarrow{(١)،(٢)} -\int_{٤}^{٠} \text{ق}(\text{س}+١)\text{ءس} \le -\int_{٨}^{٤} \text{هـ}(\text{س}-٣)\text{ءس}$$ **بالضرب بـ(-١)**

$$\int_{٤}^{٠} \text{ق}(\text{س}+١)\text{ءس} \ge \int_{٨}^{٤} \text{هـ}(\text{س}-٣)\text{ءس}$$ **وهو المطلوب**

---

**ج) جد** $\int \frac{١}{\text{قاس}-١}\text{ءس}$ **؟ نضرب بمرافق المقام** $\Leftarrow \int \frac{١}{\text{قاس}-١} \times \frac{\text{قاس}+١}{\text{قاس}+١}\text{ءس} = \int \frac{\text{قاس}+١}{\text{قا}^{٢}\text{س}-١}\text{ءس} =$ **(٦علامات)**

$$\int \frac{\text{قاس}+١}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}\text{ءس} = \int \frac{\text{قاس}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}} + \frac{١}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}\text{ءس} = \int \text{قاس ظتا}^{٢}\text{س} + \text{ظتا}^{٢}\text{س}.\text{ءس} = \int (\text{قتاس ظتاس} + \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١)\text{ءس}$$

$$\int \frac{١}{\text{قاس}-١}\text{ءس} = -\text{قتاس} - \text{ظتاس} - \text{س} + \text{جـ}$$ **( يمكن الحل بتحويل قاس بدلالة جتاس )**

**السؤال السادس:- ( ٢٠ علامة)**

**أ) اذا علمت أن ، $أ = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، $ب_{٢\times٢}$ ، $ب_{ي هـ} = \begin{cases} ي + هـ - ١ ، & ي < هـ \\ ٣ ، & ي = هـ \\ ي - هـ ، & ي > هـ \end{cases}$ ، $أ + جـ = ب . جـ$ ، جد المصفوفة جـ ؟ (٦علامات)**

**الحل: نفرض** $جـ = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ + ٢ - ١ \\ ٢ - ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

$أ + جـ = ب . جـ \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ + س \\ -٣ + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س + ٢ص \\ س + ٣ص \end{bmatrix}$

$٢ + س = ٣س + ٢ص \Leftarrow ٢ = ٢س + ٢ص .....(١)$ ،، $-٣ + ص = س + ٣ص \Leftarrow -٣ = س + ٢ص .....(٢)$

**نحل المعادلتين بالحذف ينتج أن**

$$\begin{cases} ٢س + \cancel{٢ص} = ٢ \\ - \\ س + \cancel{٢ص} = -٣ \end{cases}$$

$س = ٥ \rightarrow ص = -٤$ $\Leftarrow$ $جـ = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٤ \end{bmatrix}$

**ب)اذا كان $ق(س) = |٢س - ٦|$ ،جد ١)الاقتران المكامل $ت(س)$ على الفترة $[٠ ، ٥]$ ؟٢) $\int_{١}^{٤} ق(س) . ءس$ ؟ (٧علامات)**

**نعيد تعريف** $ق(س) = |٢س - ٦| \Leftarrow ٢س - ٦ = ٠ \Leftarrow ٢س = ٦ \Leftarrow س = ٣ \Leftarrow$

$$\xleftrightarrow[\quad ------\uparrow+++++++ \quad]{٦ - ٢س \qquad ٣ \qquad ٢س - ٦}$$

$ق(س) = \begin{cases} ٦ - ٢س ، & ٠ \le س < ٣ \\ ٢س - ٦ ، & ٣ \le س \le ٥ \end{cases} \Leftarrow ت(س) = \begin{cases} \int (٦ - ٢س) ءس ، & ٠ \le س < ٣ \\ \int (٢س - ٦) ءس ، & ٣ \le س \le ٥ \end{cases} \Leftarrow ت(س) = \begin{cases} ٦س - س^{٢} + جـ ، & ٠ \le س < ٣ \\ س^{٢} - ٦س + ء ، & ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$

**باستخدام خصائص الاقتران المكامل نجد ثوابت التكامل**

$ت(٠) = ٠ \Leftarrow جـ = ٠$ ، **بما أن ت (س) متصل** $\Leftarrow \underset{س \rightarrow ٣^{-}}{\text{نهــا}} ت(س) = \underset{س \rightarrow ٣^{+}}{\text{نهــا}} ت(س) \Leftarrow ٩ + جـ = -٩ + ء \Leftarrow ١٨ = ء$

$\Leftarrow ت(س) = \begin{cases} ٦س - س^{٢} ، & ٠ \le س < ٣ \\ س^{٢} - ٦س + ١٨ ، & ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$ **(يمكن الحل بايجاد الاقتران المكامل على كل فترة جزئية)**

٢) $\int_{١}^{٤} ق(س) ءس = ت(٤) - ت(١) = (١٦ - ٢٤ + ١٨) - (٦ - ١) = ١٠ - ٥ = ٥$

**ج)** $\Leftarrow \int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٨}} \sqrt{س^{٤} + س^{٢}} \, ءس = \int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٨}} \sqrt{س^{٢} \, (س^{٤} + ١)} . ءس = \int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٨}} |س| \sqrt{س^{٤} + ١} . ءس$ **(٧ علامات)**

$\Leftarrow |س| \xleftrightarrow[\quad ------\uparrow+++++++ \quad]{-س \qquad ٠ \qquad س} \Leftarrow ق(س) = \begin{cases} -س \sqrt{س^{٢} + ١} ، & -\sqrt{٣} \le س < ٠ \\ س \sqrt{س^{٢} + ١} ، & ٠ \le س \le \sqrt{٨} \end{cases}$

$\int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٨}} |س| \sqrt{س^{٢} + ١} \, ءس = \int_{-\sqrt{٣}}^{٠} -س \sqrt{س^{٢} + ١} \, ءس + \int_{٠}^{\sqrt{٨}} س \sqrt{س^{٢} + ١} \, ءس$ ، **نفرض** $ع = \sqrt{س^{٢} + ١}$

$\Leftarrow ع^{٢} = س^{٢} + ١ \Leftarrow \frac{ع ءع}{س} = ءس \Leftarrow س = -\sqrt{٣} \rightarrow ع = ٢ ، س = ٠ \rightarrow ع = ١ ، س = \sqrt{٨} \rightarrow ع = ٣$

$\int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٨}} |س| \sqrt{س^{٢} + ١} \, ءس = \int_{٢}^{١} - \cancel{س} ع \, \frac{ع ءع}{\cancel{س}} + \int_{١}^{٣} \cancel{س} ع \, \frac{ع ءع}{\cancel{س}} = \int_{٢}^{١} - ع^{٢} ءع + \int_{١}^{٣} ع^{٢} ءع$

$- \frac{ع^{٣}}{٣} \Big|_{٢}^{١} + \frac{ع^{٣}}{٣} \Big|_{١}^{٣} = - \frac{١}{٣} + \frac{٨}{٣} + \frac{٢٧}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$

## القسم الثانى: يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط

**السؤال السابع:- ( ٢٠ علامة)**

**أ)اذا كانت** $أ = \begin{bmatrix} قتا^{٢}س & -قتاس ظتاس \\ قتاس ظتاس & -ظتا^{٢}س \end{bmatrix}$ **، اثبت أن** $أ^{٢} - أ = و_{٢}$ **، حيث س زاوية حادة ؟** **(٧علامات)**

$$أ^{٢} - أ = و_{٢} \Leftarrow أ^{٢} = أ \Leftarrow أ^{٢} = \begin{bmatrix} قتا^{٢}س & -قتاس ظتاس \\ قتاس ظتاس & -ظتا^{٢}س \end{bmatrix}\begin{bmatrix} قتا^{٢}س & -قتاس ظتاس \\ قتاس ظتاس & -ظتا^{٢}س \end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} = \begin{bmatrix} قتا^{٤}س - قتا^{٢}س ظتا^{٢}س & -قتا^{٣}س ظتاس + ظتا^{٣}س قتاس \\ قتا^{٣}س ظتاس - ظتا^{٣}س قتاس & ظتا^{٤}س - قتا^{٢}س ظتا^{٢}س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} قتا^{٢}س(قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س) & قتاس ظتاس(-قتا^{٢}س + ظتا^{٢}س) \\ قتاس ظتاس(قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س) & ظتا^{٢}س(-قتا^{٢}س + ظتا^{٢}س) \end{bmatrix}$$

**لكن** $قتا^{٢}س = ظتا^{٢}س + ١$

$$\Leftarrow أ^{٢} = \begin{bmatrix} قتا^{٢}س \times ١ & قتاس ظتاس \times -١ \\ قتاس ظتاس \times ١ & ظتا^{٢}س \times -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} قتا^{٢}س & -قتاس ظتاس \\ قتاس ظتاس & -ظتا^{٢}س \end{bmatrix} = أ \Leftarrow أ^{٢} = أ$$

---

ب) $\int_{٧}^{١} ٤ق(س).دس = ١٢ \Leftarrow \boxed{\int_{٧}^{١} ق(س).دس = \frac{١٢}{٤} = ٣}$ ، $\int_{٥}^{٧} (ق(س) + ١).دس = ٤ \Leftarrow \int_{٥}^{٧} ق(س)دس + \int_{٥}^{٧} ١.دس = ٤$

$\Leftarrow \int_{٥}^{٧} ق(س)دس + ١(٧ - ٥) = ٤ \Leftarrow \int_{٥}^{٧} ق(س)دس = ٤ - ٢ \Leftarrow \boxed{\int_{٥}^{٧} ق(س)دس = ٢}$ الان

$\int_{٠}^{٢} ٨س^{٣}\ ق^{/}(س^{٢} + ١).دس \Leftarrow ع = س^{٢} + ١ \Leftarrow \frac{دع}{٢س} = دس،(س = ٠ \leftarrow ع = ١،س = ٢ \leftarrow ع = ٥)$

$\int_{١}^{٥} \cancel{٨س}^{٣}\ ق^{/}(ع)\frac{دع}{\cancel{٢س}} = \int_{١}^{٥} ٤س^{٢}\ ق^{/}(ع)دع = \int_{١}^{٥} ٤(ع - ١)ق^{/}(ع)دع$

$\therefore \int ٤(ع - ١)ق^{/}(ع)دع \Leftarrow$ $ق = ٤(ع - ١)$ $ده = ق^{/}(ع)دع$

$دق = ٤دع \longrightarrow ه = ق(ع)$

$\int_{١}^{٥} ٤(ع - ١)ق^{/}(ع)دع = ٤(ع - ١)ق(ع)\Big|_{١}^{٥} - ٤\int_{١}^{٥} ق(ع)دع$

**ق(س) يمر بالنقطتين ( ١ ، -١ ) ، (٥ ، ٢) أي أن ق(١)= -١ ، ق(٥) = ٢** **(٧ علامات)**

$= ٤(٥ - ١)ق(٥) - ٠ - ٤(\int_{١}^{٧} ق(ع)دع + \int_{٧}^{٥} ق(ع)دع) = ٤ \times ٤ \times ٢ - ٤(-٣ + -٢) = ٣٢ + ٢٠ = ٥٢$

---

**ج)العنصر ١١ = ٢٥** $\Leftarrow ٢٥ = أ + لر = أ + ١٠ل \Leftarrow ٢٥ = أ + ١٠ل \leftarrow (١)$

**العنصر ٢١ = ٤٠** $\Leftarrow ٤٠ = أ + لر = أ + ٢٠ل \Leftarrow ٤٠ = أ + ٢٠ل \leftarrow (٢)$

| | |
|---|---|
| $\cancel{أ} + ٢٠ل = ٤٠$<br>$-$<br>$\cancel{أ} + ١٠ل = ١٥$<br>$١٠ل = ١٥ \leftarrow ل = ١,٥$ | **بالتعويض في معادلة** $(٢) \leftarrow ٤٠ = أ + ٣٠ \Leftarrow أ = ١٠$<br>**لكن** $\sum_{ر=١}^{ن}(س_{ر} - س_{ر-١}) = ٦٠ \Leftarrow ب - أ = ٦٠$<br>$ب - ١٠ = ٦٠ \Leftarrow ب = ٧٠$ |

$ل = \frac{ب - أ}{ن} \Leftarrow ١,٥ = \frac{٦٠}{ن} \Leftarrow ١,٥ن = ٦٠ \Leftarrow ن = ٤٠$ **(٦علامات)**

**السؤال الثامن:- ( ٢٠ علامة)**

**أ) اذا كان $ق(س)$ اقتران متصل بحيث $ق(س) = ق^{/}(س)$ ، $ق(س) \neq ٠$ جد** **(٧علامات)**

**١)** $\int (ق(س)+٢)^{٢} .ءس$ ، **نفرض** $ع = ق(س) \Leftarrow \frac{ءع}{ق^{/}(س)} = ءس \Leftarrow \frac{ءع}{ق(س)} = ءس \Leftarrow \frac{ءع}{ع} = ءس$

$$\int (ق(س)+٢)^{٢} .ءس = \int (ع+٢)^{٢} ءع = \int \left(\frac{ع^{٢}+٤ع+٤}{ع}\right) ءع = \int \left(ع+٤+\frac{٤}{ع}\right) ءع$$

$$= \frac{١}{٢}ع^{٢} + ٤ع + ٤\text{لو}_{هـ}|ع| + جـ = \frac{١}{٢}ق^{٢}(س) + ٤ق(س) + ٤\text{لو}_{هـ}|ق(س)| + جـ$$

**٢) قاعدة الاقتران $ق(س)$ علما بان $ق(س)$ يمر بالنقطة ( ٠ ، ٥ ) ؟**

$$ق^{/}(س) = ق(س) \Leftarrow \frac{ق^{/}(س)}{ق(س)} = ١ \Leftarrow \text{لو}_{هـ}|ق(س)| = س+جـ \Leftarrow ق(س) = هـ^{س+جـ} = هـ^{س}هـ^{جـ} = أهـ^{س}$$

$$\Leftarrow ق(س) = أ هـ^{س} \Leftarrow ق(٠) = ٥ \Leftarrow أهـ^{٠} = ٥ \Leftarrow أ = ٥ \Leftarrow ق(س) = ٥هـ^{س}$$

---

**ب) اذا كان** $ت(س) = \begin{cases} أس^{٢}+١ & ، -١ \leq س < ١ \\ ب س^{٢} + جـ س - ٢ & ، ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$ **، هو الاقتران المكامل للاقتران $ق(س)$ على**

**الفترة** $[-١ ، ١]$ **وكان** $\int_{٠}^{٢} ق(س)ءس = ٣$ **، جد قيم الثوابت $أ ، ب ، جـ$ ؟** **(٦علامات)**

**الحل:-** $ت(-١) = ٠ \Leftarrow أ(-١)^{٢} + ١ = ٠ \Leftarrow أ + ١ = ٠ \Leftarrow أ = -١$

**$ت(س)$ متصل**

$$\Leftarrow \underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}} ت(س) = \underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}} ت(س) \Leftarrow -١ \times ١^{٢} + ١ = ب \times ١^{٢} + جـ \times ١ - ٢ \Leftarrow ٠ = ب + جـ - ٢ \Leftarrow ب + جـ = ٢ \ldots\ldots(١)$$

$$\int_{٠}^{٢} ق(س)ءس = ٣ \Leftarrow ت(٢) - ت(٠) = ٣ \Leftarrow ٤ب + ٢جـ - ٢ - ١ = ٣ \Leftarrow ٤ب + ٢جـ = ٦ \ldots(٢)$$

| | |
|---|---|
| $٤ب + \cancel{٢جـ} = ٦$<br>$-$<br>$٢ب + \cancel{٢جـ} = ٤$<br>$٢ب = ٢ \leftarrow ب = ١$ | **نعوض ب في معادلة (١)**<br>$٢ = ب + جـ \Leftarrow ٢ = ١ + جـ \Leftarrow جـ = ١$<br>$أ = -١ ،\ ب = ١ ،\ جـ = ١$ |

---

**ج) جد** $\int (س^{٢} - ٥س)^{٧}(٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٢٥س)ءس$ **، ؟** **(٧علامات)**

**نفرض** $س^{٢} - ٥س = ع \Leftarrow \frac{ءع}{٢س - ٥} = ءس$

$$٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٢٥س = س(٢س^{٢} - ١٥س - ٢٥) = س(٢س - ٥)(س - ٥)$$

$$٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٢٥س = (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س) = (٢س - ٥)ع$$

$$\int (س^{٢} - ٥س)^{٧}(٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٢٥س)ءس = \int ع^{٧} \times \cancel{(٢س - ٥)} \times ع \times \frac{ءع}{\cancel{٢س - ٥}} = \int ع^{٨} ءع$$

$$\int ع^{٨} ءع = \frac{ع^{٩}}{٩} + جـ = \frac{(س^{٢} - ٥س)^{٩}}{٩} + جـ$$

**انتهت الاجابات**

بسم الله الرحمن الرحيم

**وزارة التربية والتعليم**
**مديرية التربية والتعليم -قلقيلية**
**مدرسة ذ. جينصافوط الثانوية**

دولة فلسطين

**الصف: ١٢ علمي**
**التاريخ :الأربعاء/٢٨/٤/٢٠٢١م**
**الزمن : ٢,٥ ساعة**
**المبحث : الرياضيات /الورقة الثانية**

**(١٠٠ علامة)**

---

**القسم الأول: يتكون هذا القسم من ستة أسئلة ، وعلى المشترك أن يجيب عن أربعة أسئلة منها فقط من ضمنها السؤال الأول**

**السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة: (٢٠علامة)**

**١- اذا كانت** ب **مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية و كانت تحقق** $٢ب^{٢} - ٢ب = ١٠و_{٢}$ **فإن** ب **تساوي:**

**أ)** $م_{٢}$ **ب)** $و_{٢}، م_{٢}$ **ج)** $و_{٢}$ **د)** $ب^{-١}$

**٢- اذا كانت** $أ=\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ **و** $ب=\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ **فما قيمة** $\left(ب^{-١}\times أ^{-١}\right)^{-١}$

**أ)** $\begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ **ب)** $\begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ **ج)** $\frac{١}{١٠}\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$ **د)** $\frac{١}{١٠}\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$

**٣- اذا كانت** $جـ=\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ , $أ-ب=\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ **فما قيمة** $أجـ - بجـ$ **؟**

**أ)** $\begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ **ب)** $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$ **ج)** $\begin{bmatrix} ٩ & ٥ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ **د)** $\begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

**٤- اذا كان** $\begin{bmatrix} س^{٢} & ٦ \\ ٤ & ٢س \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣س & ٥ \\ س & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ **، جد مجموعة قيم** س **الممكنة ؟**

**أ)** $\{١-، ٤\}$ **ب)** $\{١، ٤\}$ **ج)** $\{٤\}$ **د)** $\{١، ٤-\}$

**٥- جد** $\int جا٢س\ قا^{٢}س . ءس$ **؟**

**أ)** $-٢\,لو_{هـ}|ظاس|+جـ$ **ب)** $٢\,لو_{هـ}|ظاس|+جـ$ **ج)** $٢\,لو_{هـ}|جتاس|+جـ$ **د)** $-٢\,لو_{هـ}|جتاس|+جـ$

**٦- إذا كان م(س)، ل(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س) بحيث أن**
**$ل(س) = س^{٣} - س^{٢} + ٣$ ، م(١) = ٥ أجد م(٢)؟**

**أ)** ٥ **ب)** ١٠ **ج)** ٩ **د)** ١-

٧- جد $\int \frac{\text{ظتا}^{٢}\text{س} - \text{قتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{٢س}} \,\text{ءس}$ ؟

أ) $\frac{١}{٢}$ظتا٢س+جـ ب) $-\frac{١}{٢}$ظتا٢س+جـ ج) $-\frac{١}{٢}$قتا٢س ظتا٢س+جـ د) $\frac{١}{٢}$ظا٢س+جـ

٨- اذا كان $\int_{٠}^{\text{جـ}} ٢\left[\frac{١}{٢}\text{س}\right].\text{ءس} = ١٨$ ، جد قيمة الثابت جـ حيث جـ > ٠؟

أ) ٧ ب) ٨,٦ ج) ١٤ د) ٨

٩- اذا كانت $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ،١٠] ، وكانت الفترة الجزئية العاشرة هي [٢,٥،٣] أجد قيمة الثابت أ ؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) - ٤ ج) -٢ د) - ١,٥

١٠- اذا كان ن(س) اقتران متصل وكان

$\int (\text{ن(س)} - ٤\text{س})\text{ءس} = \text{أس}^{٣} + \text{ب س} + \text{جـ}$ ، $\text{ن}'(٢) = ٢٨$ ، جد قيمة الثابت أ؟

أ) $\frac{٥}{٣}$ ب) $\frac{٧}{٣}$ ج) ٤ د) ٢

---

السؤال الثاني : (٢٠ علامة)

أ) استخدم طريقة كريمر لحل النظام: ١-٣ص=٢س (١٠ ع)
٥ص-٤س=٥

ب) إذا كان $\text{ت(س)} = \begin{cases} ٣\text{س} - \text{أس}^{٢} ، & ٠ \le \text{س} < ٣ \\ ٣\text{س}^{٢} - \text{ب س} + ٩ ، & ٣ \le \text{س} \le ٥ \end{cases}$

هو الاقتران المكامل للاقتران المتصل

ن(س) على الفترة [٠،٥] أجد ١) قيم الثوابت أ،ب ٢) $\int^{١} \text{ن}(٢\text{س} + ٢).\text{ءس}$ ؟ (١٠ ع)

---

السؤال الثالث : (٢٠ علامة)

أ) اذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$ , $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ حل المعادلة المصفوفية

$\text{أ}^{-١} \times \left(\text{س}^{-١} \times \text{ب}\right)^{-١} = \text{م}_{٢} + \text{ب}$ ؟ (١٠ ع)

ب) باستخدام تعريف التكامل المحدود أجد $\int_{٢}^{٣} (-٢\text{س} + ٣).\text{ءس} + \int_{٥}^{٣} (٢\text{س} - ٣).\text{ءس}$ ؟ (١٠ ع)

**السؤال الرابع : ( ٢٠ علامة)**

**أ) إذا كان $ق(س)$ اقترانا قابلا للتكامل على $[٢،٦]$ ، بحيث $-٩ \le ق(س) \le -٣$ جد اكبر قيمة واصغر قيمة للمقدار $\int_{٢}^{٦} |ق(س)+٥| .ءس$ ؟** (١٠ ع)

**ب) جد التكامل: $\int \sqrt{(س+١)^{٢} - ٤س} .ءس$، $س > ١$ ؟** (١٠ ع)

---

**السؤال الخامس: ( ٢٠ علامة)**

**أ) لتكن $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ اذا كانت $جـ_{١}، جـ_{٢}$ مصفوفتي عمود بحيث ان $أجـ_{١} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$ و $أجـ_{٢} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$**

**ما قيمة $جـ_{٢}+جـ_{١}$ ؟** (١٠ ع)

**ب) أجد المساحة المحصورة بين منحنى $ق(س) = \sqrt{س+٤}$ ، والمستقيم $ص = س - ٢$ ومحور السينات؟** (١٠ ع)

---

**السؤال السادس: ( ٢٠ علامة)**

**أ) من نقطة على ارتفاع (٢٢٥) م من سطح الارض ، قذف جسم رأسيا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (أ) م/ث ، وبتسارع ثابت مقداره (- ١٠) م/ث$^{٢}$ ،اذا وصل الجسم لأقصى ارتفاع له عن سطح الارض وهو (٤٠٥) م ، جد قيمة الثابت أ ، حيث أ > صفر؟** ( ١٠ ع )

**ب) إذا كان $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ظاس\ هـ^{ظاس+١} .ءس = ب - \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ظا^{٣}س\ هـ^{ظاس+١} .ءس$**

**جد قيمة الثابت ب ؟** ( ١٠ ع )

**القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين ، وعلى المشترك أن يجيب عن واحد منهما فقط**

**السؤال السابع: ( ٢٠ علامة)**

**أ) إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، حل المعادلة المصفوفية**

**$أ^{٢} - ٢س = \left(\frac{١}{٢}ب\right)^{-١} + س$؟** ( ١٠ ع )

**ب) إذا كان $\int س ق^{٢}(س) ق'(س) ءس = ل(س)$، جد $\int ق^{٣}(س) ءس$ بدلالة ل(س)؟ ( ١٠ ع )**

**السؤال الثامن: ( ٢٠ علامة)**

أ)أوجد المساحة المحصورة بين منحنى ق(س)= $هـ^{س}$ , ل(س)= لوهـس ,
والمستقيمين ص=١ , س=-١ ومحور السينات؟ (١٠ ع)

ب)أوجد: $\int \frac{هـ^{٢س} + هـ^{س}}{هـ^{٢س} - هـ^{س} - ٢}$ ءس ؟ (١٠ ع)

## بالتوفيق

## إن شاء الله تعالى

## طلابي الأعزاء

**المعلم: عبدالله نصار** **المدير: فادي عرار**

بسم الله الرحمن الرحيم

# الإجابة النموذجية للورقة الثانية / الرياضيات

س ① ب غير منفرده ⇐ لا نظير ضربي

⇐ $\text{ب}^2 - 2\text{ب} = \text{١٠و٢} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

⇐ $\text{ب}^2 = 2\text{ب} \Leftarrow \text{ب}^{-1} \times \text{ب}^2 = \text{ب}^{-1} \times 2\text{ب} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = \text{م}_2}$ (أ)

② $(\text{ب}^{-1} \times \text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (أ)

③ $\text{جـ} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\text{أ} - \text{ب} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

⇐ $\text{أجـ} - \text{بجـ} = (\text{أ} - \text{ب}) \times \text{جـ} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (جـ)

④ $\begin{bmatrix} 6 & \text{س}^2 \\ 2\text{س} & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3\text{س} \\ 6 & \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

⇐ $\text{س}^2 - 3\text{س} = 4 \Leftarrow \text{س}^2 - 3\text{س} - 4 = 0 \Leftarrow (\text{س} - 4)(\text{س} + 1) = 0$

⇐ $\boxed{\text{س} = 4 \text{ ، } -1}$

وأيضاً $2\text{س} - 6 = 2 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 4}$ وأيضاً $4 - \text{س} = 0 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 4}$

⇐ $\text{س} = \{4\}$ (جـ)

⑤ $\int \text{جا}2\text{س قا}^2\text{س ءس} = \int 2 \text{ جاس } \cancel{\text{جتاس}} \times \frac{1}{\text{جتا}^{\cancel{2}}\text{س}} \text{ ءس}$

$= \int \frac{2 \text{ جاس}}{\text{جتاس}} \text{ ءس} = -2 \text{ لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس}| + \text{جـ}$ (د)

هـ١

⑥ م(س) ، ل(س) أصليان لـ هـ(س)

⇐ م(س) − ل(س) = جـ

لكن ل(س) = $س^{٣} - س^{٢} + ٣$ ، م(١) = ٥

⇐ م(١) − ل(١) = جـ = ٥ − (١ − ١ + ٣) = ٢

⇐ م(س) − ل(س) = ٢ ⇐ م(٢) − (٨ − ٤ + ٣) = ٢

⇐ م(٢) = $\boxed{٩}$ (جـ)

---

⑦ $\int \frac{ظتا^{٢}س - قتا^{٢}س}{جا^{٢}س}\,دس = \int \frac{-١}{جا^{٢}س}\,دس$

$= \int - قتا^{٢}س\,دس = \frac{ظتا^{٢}س}{٢} + جـ$ (أ)

---

⑧ $\int_{٠}^{جـ} \frac{٢}{٢}\left[\frac{١}{٢}س\right]دس = \frac{١٨}{٢} \Leftarrow \int_{٠}^{جـ}\left[\frac{١}{٢}س\right]دس = ٩$

$\Leftarrow \int_{٠}^{جـ}\left[\frac{١}{٢}س\right]دس = \int_{٠}^{٢} ٠\,دس + \int_{٢}^{٤} ١\,دس + \int_{٤}^{٦} ٢\,دس + \int_{٦}^{جـ} ٣\,دس = ٩$

⇐ ٠ + ١ × ٢ + ٢ × ٢ + ٣ × (جـ − ٦) = ٩ ⇐ $\boxed{جـ = ٧}$ (أ)

---

⑨ الفترة العاشرة = $[س_{٩} ، س_{١٠}]$ = [٢,٥ ، ٣]

⇐ طول الفترة الجزئية = ٣ − ٢,٥ = ٠,٥ = $\frac{١٠ - أ}{ن}$

لكن $س_{٩}$ = أ + ٠,٥ × ٩ = ٢,٥ ⇐ $\boxed{أ = -٢}$ (جـ)

١٠) ∫(ق(س) − ٤س) ءس = أس٣ + بس + جـ ، ق′(٢) = ٢٨

⇐ ق(س) − ٤س = ٣أس٢ + ب

⇐ ق′(س) − ٤ = ٦أس ⇐ ق′(٢) − ٤ = ١٢أ

⇐ ٢٨ − ٤ = ١٢أ ⇐ $\boxed{أ = ٢}$ (د)

---

س٢ (أ)

١ − ٣ص = ٢س ⇐ ٣ص + ٢س = ١

٥ص − ٤س = ٥

⇐ ① $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ⇐ أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}$

⇐ |أ| = ٢×٥ − ٣×−٤ = $\boxed{٢٢}$

② أس = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٥ \end{bmatrix}$ ⇐ |أس| = ١×٥ − ٥×٣ = $\boxed{-١٠}$

③ أص = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}$ ⇐ |أص| = ٢×٥ − ١×−٤ = $\boxed{١٤}$

④ س = $\frac{|أس|}{|أ|}$ = $\frac{-١٠}{٢٢}$ = $\boxed{\frac{-٥}{١١}}$ ، ص = $\frac{|أص|}{|أ|}$ = $\boxed{\frac{١٤}{٢٢}}$

---

(ب) ت(س) = ٣س − أس٢ ، ٠ ≤ س < ٣
٣س٢ − بس + ٩ ، ٣ ≤ س ≤ ٥

① ⇐ ت متصلة ⇐ ت(٣) = نهـا ت(س)
س←٣

⇐ ٢٧ − ٣ب + ~~٩~~ = ~~٩~~ − ٩أ ⇐ $\boxed{٩أ + ٣ب = ٢٧}$ — ①

لأن ت(٠) = ٠ ⇐ ٠ = ٠ لا نستفيد

تابع س ① (ب) بما أن م(س) متصل = ن'(س) = م(س)

$$\Leftarrow م(س) = \begin{cases} ٣ - ٢أس & ، ٠ < س < ٣ \\ ٦س - ب & ، ٣ \leq س < ٥ \end{cases}$$ متصل

$\Leftarrow م(٣) = \lim_{س \to ٣} م(س) \Leftarrow ٦ \times ٣ - ب = ٣ - ٢أ \times ٣$

$\Leftarrow ٦أ - ب = ٣ - ١٨ \Leftarrow \boxed{٦أ - ب = -١٥}$ — ②

٣ ② + ① $\Leftarrow ٩أ = -١٨ \Leftarrow \boxed{أ = -٢} \Leftarrow$ نعوض

في ② $\Leftarrow -١٢ - ب = -١٥ \Leftarrow \boxed{ب = -٣}$

② $\int_{٠}^{١} م(٢س+٢) \, دس$ نفرض $ص = ٢س + ٢ \Leftarrow \frac{دص}{٢} = دس$

عندما $س \to ٠ \Leftarrow ص = ٢$ ، $س \to ١ \Leftarrow ص = ٤$

$\Leftarrow \int_{٢}^{٤} م(ص) \frac{دص}{٢} = \frac{١}{٢} \left( ن(٤) - ن(٢) \right) = \frac{٣١}{٢}$

---

س٣ (أ) $أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

$أ^{-1} \times (س^{-1} \times ب)^{-1} = م_٢ + ب \Leftarrow أ^{-1} \times (ب^{-1} \times س) = م_٢ + ب$

$\Leftarrow أ^{-1} \times (ب^{-1} \times س) = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$

تابع س٣ (أ) :

$$\text{أ} \times \text{أ}^{-1} \times (\text{ب}^{-1} \times \text{س}) = \text{أ} \times \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\underset{\times \text{ب}}{\Leftarrow} \text{ب}^{-1} \times \text{س} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٧ & -٧ \\ ١٨ & ١٤ \end{bmatrix}_{\times \text{ب}}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١٧ & -٧ \\ ١٨ & ١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥٢ & ٢٨ \\ -١٤ & ١٤ \end{bmatrix}$$

---

(ب)

$$\int_{٢}^{٣} (-٢\text{س} + ٣)\, \text{ءس} + \int_{٣}^{٥} (٢\text{س} - ٣)\, \text{ءس}$$

$$= \int_{٢}^{٣} (-٢\text{س} + ٣)\, \text{ءس} + \int_{٣}^{٥} (-٢\text{س} + ٣)\, \text{ءس} = \int_{٢}^{٥} (-٢\text{س} + ٣)\, \text{ءس}$$

$$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\text{ط}_\text{ن}، \text{د})$$ حيث $\text{ط}_\text{ن}$ تجزئة منتظمة للفترة $[٢، ٥]$ ، $\text{س}_\text{ر}^{*} = \text{س}_\text{ر}$

، $\text{د}(\text{س}) = -٢\text{س} + ٣$

$\Leftarrow$

$$\text{س}_\text{ر}^{*} = ٢ + \frac{٣}{\text{ن}}\text{ر} \Leftarrow \text{د}(\text{س}_\text{ر}^{*}) = -٢\left(٢ + \frac{٣}{\text{ن}}\text{ر}\right) + ٣$$

$$= -٤ - \frac{٦}{\text{ن}}\text{ر} + ٣$$

$$= \boxed{-١ - \frac{٦}{\text{ن}}\text{ر}}$$

$$\Leftarrow \text{م}(\text{ط}_\text{ن}، \text{د}) = \frac{٣}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \left(-١ - \frac{٦}{\text{ن}}\text{ر}\right)$$

$$= \frac{٣}{\text{ن}} \times -\text{ن} - \frac{٣}{\text{ن}} \times \frac{\cancelto{٣}{٦}}{\cancel{\text{ن}}} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}+١)}{\cancel{٢}} = \frac{-٣\text{ن} - ٩\text{ن} - ٩}{\text{ن}}$$

$$\Leftarrow \int_{٢}^{٥} (-٢\text{س} + ٣)\, \text{ءس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{-١٢\text{ن} - ٩}{\text{ن}} = \frac{-١٢}{١} = \boxed{-١٢}$$

م٩

س٤ (أ)

$$-٩ \le \text{ق}(\text{س}) \le -٣$$
$$+٥ \qquad +٥ \qquad +٥$$

$$\Leftarrow -٤ \le \text{ق}(\text{س}) + ٥ \le ٢$$

$$\Leftarrow ٠ \le |\text{ق}(\text{س}) + ٥| \le ٤$$

$$\Leftarrow \int_{٢}^{٦} ٠ \le \int_{٢}^{٦} |\text{ق}(\text{س}) + ٥| \, \text{دس} \le \int_{٢}^{٦} ٤ \, \text{دس}$$

$$\Leftarrow \underset{\text{أصغر قيمة}}{\boxed{٠}} \le \int_{٢}^{٦} |\text{ق}(\text{س}) + ٥| \, \text{دس} \le \boxed{١٦} \text{ أكبر قيمة}$$

(ب)

$$\int \sqrt{(\text{س}+١)^٢ - ٤\text{س}} \, \text{دس} ، \text{س} < ١$$

$$= \int \sqrt{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١ - ٤\text{س}} \, \text{دس} = \int \sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١} \, \text{دس}$$

$$= \int \sqrt{(\text{س} - ١)^٢} \, \text{دس} = \int |\text{س} - ١| \, \text{دس} \quad \text{لكن } \text{س} < ١$$

$$\Leftarrow = \int (١ - \text{س}) \, \text{دس} = \text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{جـ}$$

س٥ (أ)

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix} ، \text{جـ}_١ ، \text{جـ}_٢ \text{ مصفوفتا عمود}$$

$$\text{أ}\,\text{جـ}_١ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٠ \end{bmatrix} ، \text{أ}\,\text{جـ}_٢ = \begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{أ}\,\text{جـ}_١ + \text{أ}\,\text{جـ}_٢ = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{أ}\,(\text{جـ}_١ + \text{جـ}_٢) = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix} \quad \text{نفرض } \text{جـ}_١ + \text{جـ}_٢ = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

م٦

تابع س ② :

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} س \\ ٢س + ص \\ ٣س + ٢ص + ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

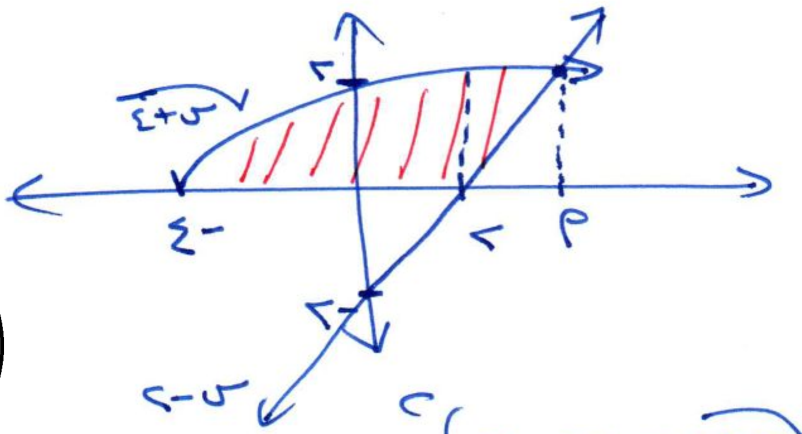
$\Leftarrow$ س $= ١ \Leftarrow ٢ \times ١ +$ ص $= ١ \Leftarrow$ ص $= -١$

$\Leftarrow ٣ - ٢ +$ ع $= ٠ \Leftarrow$ ع $= -١ \Leftarrow$ جـ$_١$ + جـ$_٢$ $= \begin{bmatrix} ١ \\ -١ \\ -١ \end{bmatrix}$

---

ⓑ ق(س) $= \sqrt{س + ٤}$ ، ص $=$ س $- ٢$ ومحور السينات

$\Leftarrow$ نرسم :



لإيجاد م : $\left(\sqrt{س + ٤} = س - ٢\right)^٢$

$\Leftarrow$ س $+ \cancel{٤} =$ س$^٢ - ٤$س $+ \cancel{٤} \Leftarrow$ س$^٢ - ٥$س $= ٠$

$\Leftarrow$ س $= ٠$ ✗

أو س $= ٥$ ✓

$$\Leftarrow م = \left| \int_{-٤}^{٢} \sqrt{س + ٤} \, دس \right| + \left| \int_{٢}^{٥} \left( \sqrt{س + ٤} - (س - ٢) \right) دس \right|$$

$$= \left| \frac{٢}{٣} \sqrt{(س + ٤)^٣} \Big]_{-٤}^{٢} \right| + \left| \frac{٢}{٣} \sqrt{(س + ٤)^٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٢س \Big]_{٢}^{٥} \right|$$

$$= \frac{٢}{٣} \sqrt{٢١٦} + \left| \left( \frac{٢}{٣} \times ٢٧ - \frac{٢٥}{٢} + ١٠ \right) - \frac{٢}{٣} \sqrt{٢١٦} + ٢ - ٤ \right|$$

$$= \cancel{\frac{٢}{٣} \sqrt{٢١٦}} + ١٨ - \frac{٢٥}{٢} + ١٠ - \cancel{\frac{٢}{٣} \sqrt{٢١٦}} + ٢ - ٤$$

$$= \boxed{\frac{٢٧}{٢}} .$$

ص٧

ج٦ (أ) إرتفاع البناية = ٢٢٥م ، $\text{ع}(٠) = \text{أ}$

$\bar{\text{ت}} = -١٠ \text{م}/\text{ث}^٢$

اقصى ارتفاع عن سطح الارض ٤٠٥ ⟸ عن سطح البناية = ٤٠٥ − ٢٢٥ = ١٨٠م

$\text{ع} = \int \text{ت د ن} = \int -١٠ \text{ د ن} = -١٠\text{ن} + \text{جـ}$

لكن $\text{ع}(٠) = \text{جـ} = \text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = \text{أ}}$ —— ①

$\text{ف} = \int \text{ع د ن} = \int (-١٠\text{ن} + \text{أ}) \text{ د ن} = -٥\text{ن}^٢ + \text{أن} + \text{جـ}_١$

لكن $\text{ف}(٠) = ٠ \Leftarrow \text{ف}(٠) = \text{جـ}_١ = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{ف}(\text{ن}) = -٥\text{ن}^٢ + \text{أن}}$

لكن اقصى ارتفاع $\Leftarrow \text{ع} = ٠ = -١٠\text{ن} + \text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = \frac{\text{أ}}{١٠}}$

واقصى ارتفاع عن سطح البناية $= \text{ف}\left(\frac{\text{أ}}{١٠}\right) = ١٨٠$

$\Leftarrow -٥\frac{\text{أ}^٢}{١٠٠} + \text{أ} \times \frac{\text{أ}}{١٠} = ١٨٠ \Leftarrow \frac{٥\text{أ}^٢}{١٠٠} \times \frac{١٨٠}{١}$

$\Leftarrow \text{أ}^٢ = \frac{١٨٠٠٠}{٥} = ٣٦٠٠ \Leftarrow \text{أ} = +٦٠$ ✓.

---

(ب) $\int_{٠}^{\text{ط}/٤} \text{ظا س هـ}^{\text{ظا}^٢\text{س}+١} \text{ دس} = \text{ب} - \int_{٠}^{\text{ط}/٤} \text{ظا}^٣\text{س هـ}^{\text{ظا}^٢\text{س}+١} \text{ دس}$

$\Leftarrow \int_{٠}^{\text{ط}/٤} \left(\text{ظا س هـ}^{\text{ظا}^٢\text{س}+١} + \text{ظا}^٣\text{س هـ}^{\text{ظا}^٢\text{س}+١}\right) \text{ دس} = \text{ب}$

$\Leftarrow \int_{٠}^{\text{ط}/٤} \text{ظا س هـ}^{\text{ظا}^٢\text{س}+١} (١ + \text{ظا}^٢\text{س}) \text{ دس} = \text{ب}$

ص٨

تابع س٦ (ب) $\Leftarrow = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا س}\ \text{هـ}^{\text{ظا س}+1}\ \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

نعوض $\text{ص} = \text{ظا س} \Leftarrow \text{دص} = \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = 0 \ ،\ \text{س} = \frac{\pi}{4} \Leftarrow \text{ص} = 1$

$= \int_{0}^{1} \text{ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}+1}\ \text{دص}$ (أجزاء)

$\text{م} = \text{ص} \Leftarrow \text{دم} = \text{دص}$

$\text{هـ} = \int \text{هـ}^{\text{ص}+1}\ \text{دص} = \text{هـ}^{\text{ص}+1}$

$= \text{ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}+1} \Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \text{هـ}^{\text{ص}+1}\ \text{دص}$

$= \text{هـ}^{2} - \left(\text{هـ}^{\text{ص}+1} \Big|_{0}^{1}\right) = \text{هـ}^{2} - \text{هـ}^{2} + \text{هـ} = \boxed{\text{هـ}}$

س٧ (أ) $\text{أ} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \ ،\ \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$\text{أ}^{2} - 2\text{س} = \left(\frac{1}{2}\text{ب}\right)^{-1} + \text{س} \Leftarrow 3\text{س} = \text{أ}^{2} - \left(\frac{1}{2}\text{ب}\right)^{-1}$

$+2\text{س} \quad -\left(\frac{1}{2}\text{ب}\right)^{-1} \qquad -\left(\frac{1}{2}\text{ب}\right)^{-1} \quad +2\text{س}$

$= \text{أ}^{2} - 2\text{ب}^{-1}$

$\Leftarrow \text{أ}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$

$-2\text{ب}^{-1} = -2 \times \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

س٧ (ب) :

$\int س\, ق^2(س)\, ق'(س)\, دس = ل(س)$

أوجد $\int ق^3(س)\, دس$ بدلالة $ل(س)$ ؟

$ع = س \Leftarrow دع = دس$

$هـ = \int ق^2(س)\, ق'(س)\, دس$     نفرض $ص = ق(س)$

$\Leftarrow دص = ق'(س)\, دس$

$\Leftarrow هـ = \int ص^2\, دص = \frac{ص^3}{٣} = \frac{ق^3(س)}{٣}$

$\Leftarrow \int س\, ق^2(س)\, ق'(س)\, دس = ل(س) = س \times \frac{ق^3(س)}{٣}$

$- \int \frac{ق^3(س)}{٣}\, دس$

$\Leftarrow \frac{١}{٣} \int ق^3(س)\, دس = \frac{١}{٣} س\, ق^3(س) - ل(س)$

$\Leftarrow \boxed{\int ق^3(س)\, دس = س\, ق^3(س) - ٣\, ل(س) + جـ}$

---

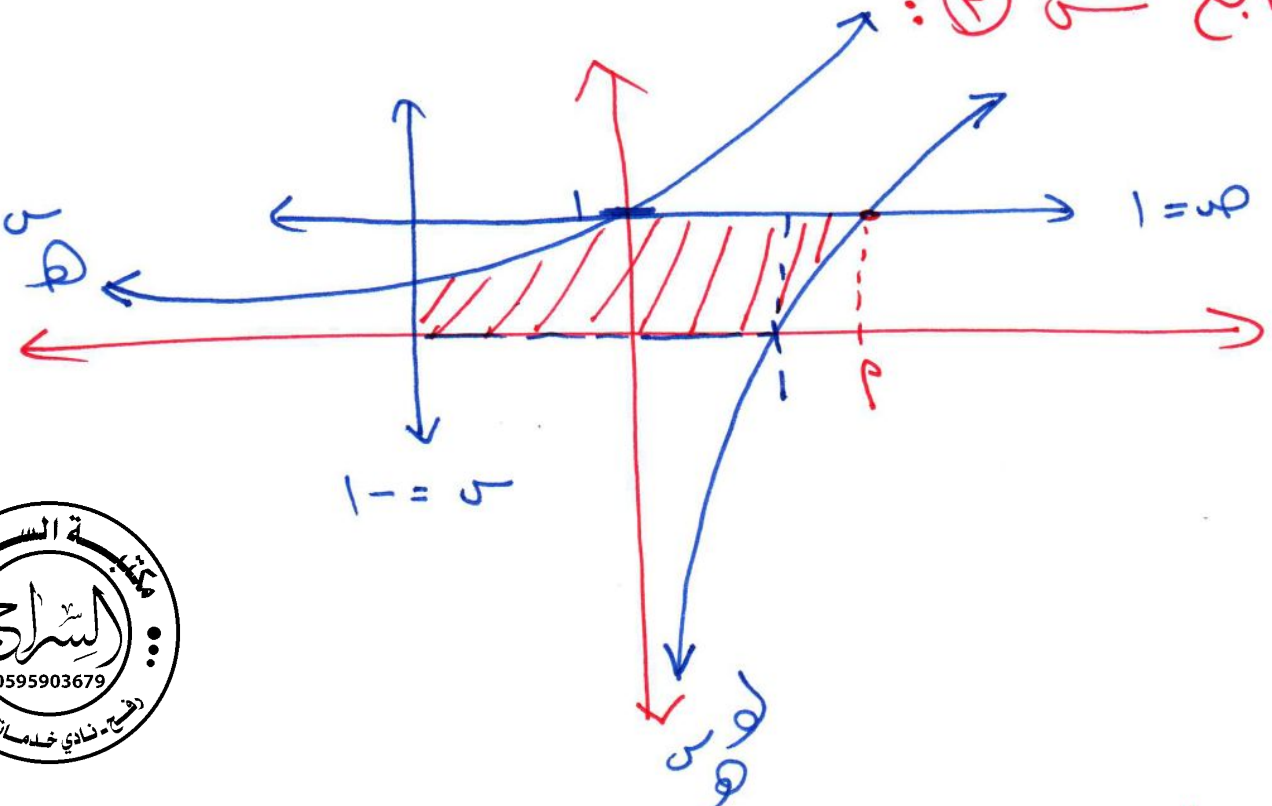
س٨ (أ)

$ق(س) = هـ^{س}$ ، $ل(س) = لوهـ\, س$

$ص = ١$ ، $س = -١$ ومحور السينات

$\Leftarrow$ نرسم المنطقة

تابع س ②:



لإيجاد م: $١ = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \text{س} = \text{م} = \text{هـ}$

$$\Leftarrow \text{م} = \left|\int_{-1}^{0} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}\right| + \left|\int_{0}^{1} ١\,\text{دس}\right| + \left|\int_{1}^{\text{هـ}} ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}\right|$$

$$= \left|\text{هـ}^{\text{س}}\Big]_{-1}^{0}\right| + \left|\text{س}\Big]_{0}^{1}\right| + \left|\int_{1}^{\text{هـ}} (١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{دس}\right|$$

نفرض $\text{ص} = ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \text{دص} = -\frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{هـ} = \int \text{دس} = \text{س}$

$$= \left|\text{هـ}^{0} - \text{هـ}^{-1}\right| + \left|(١ - ٠)\right| + \left|\text{س} \times (١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\Big]_{1}^{\text{هـ}} - \int_{1}^{\text{هـ}} \text{س} \times -\frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}\right|$$

$$= ١ - \frac{١}{\text{هـ}} + ١ + \left|\text{س}(١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + \text{س}\Big]_{1}^{\text{هـ}}\right|$$

$$= ٢ - \frac{١}{\text{هـ}} + \text{هـ} - ٢ = \boxed{\text{هـ} - \frac{١}{\text{هـ}}}$$

٨ ب

$$\int \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} - ٢} \, \text{ءس}$$

$$= \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢} + (\text{هـ}^{\text{س}})}{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢} - (\text{هـ}^{\text{س}}) - ٢} \, \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} \cancel{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)}}{(\text{هـ}^{\text{س}} - ٢) \cancel{(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)}} \, \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - ٢} \, \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} - ٢| + \text{جـ}$$

وفقكم الله
تعالى

م. عبدالله نصّار

ص١٢

بسم الله الرحمن الرحيم
**الورقة الثانية**
**الفرع العلمي**

**دولة فلسطين**
**وزارة التربية والتعليم**
**مديرية التربية والتعليم - سلفيت**

**المبحث : الرياضيات**
**مجموع العلامات ( ١٠٠ علامة )**
**مدة الامتحان : ساعتان ونصف**
**اليوم والتاريخ : / /**

**ملاحظة : عدد أسئلة الورقة (ثمانية) أسئلة ، أجب عن ( خمسةٍ ) منها فقط .**

**القسم الأول : يتكون هذا القسم من ستة أسئلة ، وعلى المشترك أن يجيب عن اربعةٍ منها ، على أن يكون السؤال الأول اجبارياً**

**السؤال الاول ( اجباري) : (٢٠ علامة )**

**اختر الاجابة الصحيحة ، ثم ضع اشارة ( × ) في المكان المخصص له في ورقة الاجابة الخاصة بك :**

١) في التجزئة المنتظمة $\left\{ ٣، ٣ + \frac{٤}{\text{ن}}، ٣ + \frac{٨}{\text{ن}}، ....، ٥ \right\}$ ما هي عدد الفترات الجزئية ؟

أ) $\text{ن}$ ب) $\text{ن} + ١$ جـ) $\frac{\text{ن}}{٢}$ د) $\frac{\text{ن}}{٢} + ١$

٢) إذا كانت $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ} + \text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ فإن $\text{جـ أ} + \text{جـ ب}$؟

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢٩ & -٤ \\ ١١ & -٦ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١٥ & ٨ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

٣) إذا كان $\int_{٠}^{-١} \left(\frac{٥}{٢} + ٤\text{ق}(-\text{س})\right) \text{دس} = \int_{١}^{٠} \left(٢\text{س} + \frac{\text{ق}(\text{س})}{٢}\right) \text{دس}$ فما قيمة $\int_{١}^{٠} \text{ق}(\text{س}) \text{دس}$ ؟

أ) $-٧$ ب) $-١$ جـ) $-\frac{٣}{٧}$ د) $\frac{٣}{٧}$

٤) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int_{\text{س}}^{٢} (٣\text{ص} - ٢) \text{دص} + \int_{٠}^{\text{أ}} ٣\text{ص}^{٢} \text{ دص}$ ، $\text{ق}(٢) = ٨$ فما قيمة الثابت أ ؟

أ) $٢$ ب) $-٢$ جـ) $\frac{٨}{٣}$ د) $٨$

٥) اذا كان ق (س) متصلاً وكان $\int_{٢\text{أ}+١}^{٥\text{ب}+٢} \text{ق}(\text{س}) \text{دس} - \int_{٣}^{٧} \text{ق}(\text{س}) \text{دس} = \int_{٧}^{١٢} \text{ق}(\text{س}) \text{دس}$ فإن قيمة أ، ب على الترتيب ؟

أ) ١، -٢ ب) ١ ، ٢ جـ) ٢، ١ د) -٢ ، ١

٦) ما قيمة $\int \text{ظا}^{٢}\text{س ظتا}^{٢}\text{س دس}$ ؟

أ) $\text{ظا}^{٣}\text{س} + \text{جـ}$ ب) $-\text{قتا}^{٣}\text{س} + \text{جـ}$ جـ) $\text{ظاس قاس} + \text{جـ}$ د) $\text{س} + \text{جـ}$

٧) اذا كان $\int_{\text{س}}^{١} \text{ق}(\text{ص}) \text{دص} = \text{س}^{٢} + \text{جـ س} + ١$ ، ق(س) متصل في [ ١ ، ٥ ] فما قيمة جـ ؟

أ) $٢$ ب) $-٢$ جـ) $٠$ د) $-١$

٨) اذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٢- & ٣- \end{bmatrix}$ وكان $|أ| = |أ^{-١}|$ فإن إحدى قيم س الممكنة ؟

أ) ٤ ب) ٨ جـ) − ٤ د) ٢

٩) الشكل المجاور يمثل المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات ، إذا علمت أن

$م_١ + م_٢ = ٦$ وحدات مربعة وكان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس = -٤$ فما قيمة $\int_{ب}^{أ} ق(س)\, ءس$ ؟

أ) ٦ ب) ٢ جـ) ١٠ د) − ٢

١٠) عند استخدام كريمر لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين إحداهما ٣ص=٤−س وجد أن $|أ_س| + ٣|أ_ص| = ٨$

فما قيمة $|أ|$ ؟

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ١٦ د) ٣٢

**السؤال الثاني : ( ٢٠ علامة )**

أ) استخدم تعريف التكامل المحدود في ايجاد $\int_{١}^{٣} ٤ - ٢س\, ءس$ " ٧ علامات"

ب) حل النظام التالي بطريقة كريمر

$$\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٤}ص = -١$$
$$\frac{١}{٣}س + ص = ٤$$

" ٧ علامات"

جـ) إذا كانت $\delta_٨$ تجزئة منتظمة للفترة [أ،ب] والعنصر الثالث منها يساوي (٢) وكانت $\delta_{١٢}$ تجزئة منتظمة للفترة [أ،ب] والعنصر الخامس منها يساوي (٤) أوجد قيمة أ،ب " ٦ علامات"

**السؤال الثالث : ( ٢٠ علامة )**

أ) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} &، ١ \le س < هـ \\ ٢س + ٣ &، هـ \le س \le ٤ \end{cases}$ جد الاقتران المكامل لـ ق(س) ثم جد ت(هـ) " ٨ علامات"

ب) اذا كان $\int_{-١}^{١} \frac{١}{س^٢ + ١}\, ءس = \frac{\pi}{٢}$ جد $\int_{-١}^{١} \frac{س^٢}{س^٢ + ١}\, ءس$ " ٧ علامات "

جـ) جد $\int_{-١}^{١} س\, ق''(س^٢)\, ءس$ " ٥ علامات "

**السؤال الرابع : ( ٢٠ علامة )**

أ) جد قيم التكاملات الأتية " ١٢ علامة "

١- $\int \frac{س جتاس}{جا^{٣}س} ءس$ ٢- $\int (س+١)^{٣} (س^{٢} + ٢س+٧)^{٥} ءس$

ب) اذا كان $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ جد $(أ×ب)^{-١}$ " ٨ علامات "

**السؤال الخامس : ( ٢٠ علامة )**

أ) استخدم التكامل بالأجزاء في ايجاد قاعدة الاقتران ق(س) اذا علمت أن $ق'(\pi)=٠$ " ١٠ علامات "

$س ق'(س)+ق(س)=جتاس$

ب) اذا كان $ق(س)=جاس-جتاس$ وكانت $\delta_{٤}$ تجزئة منتظمة للفترة $[٠، \pi]$ " ١٠ علامات "

جد $م(\delta_{٤}، ق)$ معتبراً $س^{*}_{ر} = س_{ر}$

**السؤال السادس : ( ٢٠ علامة )**

أ) اذا كان $\begin{vmatrix} ٤ & ٨ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & س \\ ٥ & -٤ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٢س \end{vmatrix}$ جد قيمة س " ٦ علامات "

ب) اذا كانت المساحة المحصورة بين $ق(س)=لو_{هـ}س$ ، $ص = ١$ والمستقيم $س=جـ$ "٨ علامات"

ومحور السينات تساوي (٢) جد قيمة الثابت $جـ > هـ$

جـ) اذا كان تسارع جسم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة $ت=٤م/ث^{٢}$ اذا كانت " ٦ علامات "

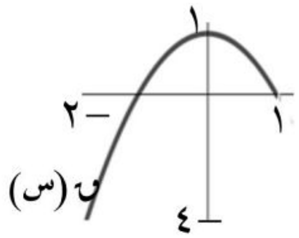
سرعة الجسم بعد ٢ ث هي ١٣ م/ث جد سرعته الإبتدائية .

**القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط .**

## السؤال السابع : ( ٢٠ علامة )

أ) الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) دون اجراء التكامل جد أصغر قيمة "١٠ علامات"

$$\int_{٢-}^{١} \left(ق^{٢}(س) - ٢\right) دس$$



ب) اذا كان أ = $\begin{bmatrix} جاس & جتاس \\ جتاس & جاس \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & جا٢س \\ جا٢س & ٠ \end{bmatrix}$ بين أن $أ^{٢} - ب = م_{٢}$ "١٠ علامات"

## السؤال الثامن : ( ٢٠ علامة )

أ)اذا كان $(أ + أب)^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ وكانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ حيث (أ+أب) مصفوفة "١٠ علامات"

غير منفردة أوجد المصفوفة ب .

ب) دون اجراء التكامل جد أكبر قيمة وأصغر قيمة $\int_{٢-}^{١} \frac{١}{\sqrt{س^{٤} + ٩}} دس$ "١٠ علامات"

**انتهت الأسئلة**

مديرية التربية والتعليم/ قلقيلية | بسم الله الرحمن الرحيم | العام الدراسي ٢٠٢٠/٢٠٢١م

الاجابة النموذجية لامتحان الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي (الورقة الثانية)

السؤال الأول:-

① في التجزئة المنتظمة $\{٣ ، ٢+٤ن ، ٢+\frac{٨}{ن} ، --- ، ٥\}$ ما هو عدد الفترات الجزئية ؟

الحل:- عدد الفترات الجزئية = $\frac{\text{طول الفترة الكلية}}{\text{طول الفترة الجزئية}}$

$$= \frac{ب - أ}{س_ر - س_{ر-١}} = \frac{٥ - ٣}{\cancel{٢} + \frac{٤}{ن} - \cancel{٢}} = \frac{٢}{\frac{٤}{ن}}$$

$$= ٢ \times \frac{ن}{٤} = \boxed{\frac{ن}{٢}} \quad \boxed{\text{فرع ج}}$$

② اذا كانت $جـ = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $أ + ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ فان جـ أ + جـ ب

الحل: $جـ أ + جـ ب = جـ (أ + ب) = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٨+-١٢ & ٢٠+٩ \\ ٢+-٨ & ٥+٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & ٢٩ \\ -٦ & ١١ \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{الجواب فرع ب}}$

③ اذا كان $\int_{٠}^{-١} \left(\frac{٥}{٢} + ٤ق(-س)\right) دس = \int_{١}^{٠} \left(٢س + \frac{ق(س)}{٢}\right) دس$ فما قيمة

$\int_{١}^{٠} ق(س) \, دس$ ؟

الحل:- $\int_{٠}^{-١} \frac{٥}{٢} دس + ٤ \int_{٠}^{-١} ق(-س) دس = \int_{١}^{٠} ٢س دس + \frac{١}{٢} \int_{١}^{٠} ق(س) دس$

$$\frac{٥}{٢}(-١-٠) + -٤ \int_{٠}^{-١} ق(ص) دص = \frac{\cancel{٢}س^٢}{\cancel{٢}} \Big|_{١}^{٠} + \frac{١}{٢} \int_{١}^{٠} ق(س) دس$$

$$-\frac{٥}{٢} + ٤ \int_{١}^{٠} ق(ص) دص = (٠ - ١) + \frac{١}{٢} \int_{١}^{٠} ق(س) دس$$

$-\frac{٥}{٢} + ١ = -\frac{٧}{٢} \int_{١}^{٠} ق(س) دس$ التكامل لا يتختلف باختلاف الرموز

$$-\frac{٣}{\cancel{٢}} \times \frac{\cancel{٢}}{-٧} = \int_{١}^{٠} ق(س) دس = \boxed{\frac{٣}{٧}} \quad \boxed{\text{فرع د}}$$

④ اذا كان ق(س) = $\int_{س}^{٢} (٣ص - ٢) \, دص + \int_{٠}^{أ} ٣ص^٢ \, دص$ ، ق(٢) = ٨

فما قيمة الثابت أ ؟

الحل:

ق(٢) = $\int_{٢}^{٢} (٣ص - ٢) \, دص + \int_{٠}^{أ} ٣ص^٢ \, دص = ٨$

صفر + $\frac{\cancel{٣}ص^٣}{\cancel{٣}}\Big|_{٠}^{أ} = ٨$

$أ^٣ = ٨$ ⟸ $أ = ٢$ فرع أ

---

⑤ اذا كان ق(س) متصلاً وكان $\int_{٢أ+١}^{٥ب+٢} ق(س) \, دس - \int_{٣}^{٧} ق(س) \, دس = \int_{٧}^{١٢} ق(س) \, دس$

فان قيمتي أ ، ب على الترتيب ؟

الحل: $\int_{٢أ+١}^{٥ب+٢} ق(س) \, دس = \int_{٣}^{٧} ق(س) \, دس + \int_{٧}^{١٢} ق(س) \, دس$ حسب خاصية الاضافة

$= \int_{٣}^{١٢} ق(س) \, دس$ ∴

$٢أ + ١ = ٣$ ⟸ $\frac{٢}{٢}أ = \frac{٢}{٢}$ ⟸ $\boxed{أ = ١}$

$٥ب + ٢ = ١٢$ ⟸ $\frac{٥}{٥}ب = \frac{١٠}{٥}$ ⟸ $\boxed{ب = ٢}$ فرع ب

---

⑥ $\int$ ظا$^٢$س ظتا$^٢$س دس ؟

الحل: $\int \frac{\cancel{جا^٢س}}{جتا^٢س} \times \frac{\cancel{جتا^٢س}}{\cancel{جا^٢س}} \, دس = \int ١ \, دس = س + ج$ فرع د

---

⑦ اذا كان $\int_{٢\,س}^{١} ق(ص) \, دص = -س^٢ + جس + ١$ ، ق(س) متصل في [١، ٥]

فما قيمة ج؟ فرع ب

الحل: ت(٢) = $\int_{١} ق(ص) \, دص = -(س^٢ + جس + ١)$

ت(١) = $\frac{١}{-١}(١ + ج + ١) = \frac{صفر}{-١}$ ⟸ ج + ٢ = صفر

$\boxed{ج = -٢}$

⑧ إذا كان $أ = \begin{bmatrix} س & ٣ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ وكان $|أ| = |أ^{-1}|$ فإن إحدى قيم س الممكنة؟

الحل:- $|أ^{-1}| = \frac{1}{|أ|}$ بـ، $|أ| = \frac{1}{|أ|}$

$\therefore |أ|\,|أ| = 1$ لكن $|أ| = -٢س - {}^{-}٩ = (-٢س + ٩)$

$\therefore (-٢س + ٩)^{٢} = 1$ بـ $-٢س + ٩ = 1$ أو $-٢س + ٩ = -1$

$-٢س + \underset{-٩}{٩} = \underset{-٩}{1}$ بـ، $\frac{-٢س}{-٢} = \frac{-٨}{-٢}$ بـ، $\boxed{س = ٤}$

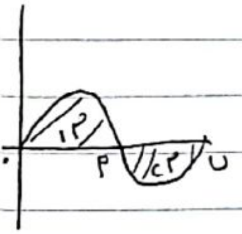
فرع م

أو $-٢س + ٩ = -1$ بـ، $\frac{-٢س}{-٢} = \frac{-١٠}{-٢}$ بـ، $\boxed{س = ٥}$ $\therefore$

---

⑨ $م_1 + م_2 = ٦$ وحدات مربعة

وكان $\int_{م}^{ن} ق(س)\,دس = -٤$ $\therefore م_2 = \left|\int_{م}^{ن} ق(س)\,دس\right|$



$= \boxed{٤}$ وحدة مربعة

فرع د

$م_1 + م_2 = ٦$ بـ، $م_1 = ٦ - ٤ = \textcircled{٢}$

حسب خاصية الإضافة

$\int_{٠}^{٤} ق(س)\,دس = \int_{٠}^{م} ق(س)\,دس + \int_{م}^{ن} ق(س)\,دس = ٢ + -٤ = \textcircled{-٢}$

---

⑩ $٣ص = ٤ - س$ ، وجد $|أ_س| + ٣|أ_ص| = ٨$ فما قيمة $|أ|$

الحل:-

$٣ص + س = ٤$ ومن المعطيات أن

$\frac{|أ_س|}{|أ|} + ٣\frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{٨}{|أ|}$ بالقسمة على $|أ|$

$س + ٣ص = \frac{٨}{|أ|} = ٤$ بـ $\frac{٤}{٤}|أ| = \frac{٨}{٤}$ بـ، $|أ| = \textcircled{٢}$

فرع م

## اجابة السؤال الأول

| رقم السؤال | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رمز الاجابة | ج | ب | د | أ | ب | د | ب | أ | د | أ |

---

## السؤال الثاني فرع أ

استخدم تعريف التكامل المحدود في ايجاد $\int_{1}^{3} (4 - 2\text{س})\, \text{ءس}$

الحل: نفرض ان $\text{ق(س)} = 4 - 2\text{س}$ ، $\text{س} \in [1 ، 2]$

وبأخذ $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$

$\boxed{1}$ $\text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}\,\text{ر} = 1 + \frac{3 - 1}{\text{ن}}\,\text{ر} = \boxed{1 + \frac{2}{\text{ن}}\,\text{ر}}$

② $\text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = \text{ق}(\text{س}_{\text{ر}}) = \text{ق}(1 + \frac{2}{\text{ن}}\,\text{ر}) = 4 - 2(1 + \frac{2}{\text{ن}}\,\text{ر})$

$= 4 - 2 - \frac{4}{\text{ن}}\,\text{ر} = \boxed{2 - \frac{4}{\text{ن}}\,\text{ر}}$

③ $\text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق}) = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^{*}_{\text{ر}})$

$= \frac{3 - 1}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} 2 - \frac{4}{\text{ن}}\,\text{ر} = \frac{2}{\text{ن}} \left( \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} 2 - \frac{4}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} \right)$

$= \frac{2}{\text{ن}} \left( 2\text{ن} - \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{\text{ن}}} \times \frac{\cancel{\text{ن}}(\text{ن}+1)}{\cancel{2}} \right) = \frac{2}{\text{ن}} \left( \cancel{2\text{ن}} - \cancel{2\text{ن}} - 2 \right)$

$= \boxed{\frac{-4}{\text{ن}}}$

$\therefore \int_{1}^{3} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = \int_{1}^{3} (4 - 2\text{س})\, \text{ءس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}} ، \text{ق})$

$= \lim_{\text{ن} \to \infty} \frac{-4}{\text{ن}} = \boxed{\text{صفر}}$

وهو المطلوب

الثاني فرع ب

حل النظام التالى بطريقه كرامر $\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{ص} = -١$

$\frac{١}{٣}\text{س} + \text{ص} = ٤$

الحل $(\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{ص} = -١)\times ٤ = (٢\text{س} - \text{ص} = -٤)$ $\boxed{١}$

$(\frac{١}{٣}\text{س} + \text{ص} = ٤)\times ٣ = (\text{س} + ٣\text{ص} = ١٢)$ $\boxed{٢}$

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ \\ ١٢ \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٢\times٣ - {}^-١\times١ = ٦+١ = ٧$$

$$|\text{أ}_\text{س}| = \begin{vmatrix} -٤ & -١ \\ ١٢ & ٣ \end{vmatrix} = -١٢ - {}^-١٢ = -١٢+١٢ = \text{صفر}$$

$$|\text{أ}_\text{ص}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ١ & ١٢ \end{vmatrix} = ٢\times١٢ - ١\times{}^-٤ = ٢٤+٤ = ٢٨$$

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_\text{س}|}{|\text{أ}|} = \frac{\text{صفر}}{٧} = \text{صفر} \quad \therefore \boxed{\text{س} = \text{صفر}}$$

$$\text{ص} = \frac{|\text{أ}_\text{ص}|}{|\text{أ}|} = \frac{٢٨}{٧} = ٤ \quad \boxed{\text{ص} = ٤}$$

وهو المطلوب

---

الثاني فرع جـ

اذا كانت ك$_٨$ تجزئه منتظمه للفتره [أ، ب] والعنصر الثالث منها يساوى (٢) وكانت ك$_{١٢}$ تجزئه منتظمه للفتره [أ، ب] والعنصر الخامس منها يساوي (٤) أوجد قيمه أ، ب.؟

الحل: $\text{س}_\text{ر} = \text{أ} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\text{ن}}\,\text{ر}$ ، العنصر الثالث $\therefore \text{ر} = ٢$

$$\text{س}_٢ = \frac{٤\times\text{أ}}{٤} + \frac{\text{ب}-\text{أ}}{\cancel{٨}\,٤} \times \overset{١}{\cancel{٢}} = ٢ \Leftarrow \frac{٤\text{أ} + \text{ب} - \text{أ}}{٤} = ٢$$

تابع الثاني فرع (ج) ∴ $٤أ - أ + ب = ٤ \times ٢$

$\boxed{٣أ + ب = ٨}$ معادلة رقم ①

والمتغير الخامس ∴ ر = ٤ ∴ $س_{٤} = أ + \frac{ب - أ}{ن} ر = ٤$

$\frac{٢ \times أ}{٣} + \frac{ب - أ}{٢ \times ٢} \times ٤^{١} = ٤$ وبالضرب التبادلي

$٣أ + ب - أ = ٣ \times ٤$

$\boxed{٢أ + ب = ١٢}$ ← رقم ②

وبحل المعادلتين ① مع ② ينتج

$٣أ + ب = ٨$

$٢أ + ب = ١٢$ / بالطرح

$أ = -٤$

$٣أ + ب = ٨$

$٣ \times -٤ + ب = ٨$ ← $ب = ٨ + ١٢ = ٢٠$ ← $\boxed{أ = -٤}$

و $\boxed{ب = ٢٠}$

وهو المطلوب.

---

السؤال الثالث فرع أ

(أ) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} ، & ١ \le س < هـ \\ ٢س + ٣ ، & هـ \le س \le ٤ \end{cases}$ جد قاعدة الاقتران ثم ت(هـ)

الحل: القاعدة الأولى $ت(س) = \int_{١}^{س} ق(ص) \, دص = \int_{١}^{س} \frac{١}{ص} \, دص$

$= لو_{هـ}|ص| \Big|_{١}^{س} = لو_{هـ} س - \overset{صفر}{لو_{هـ} ١} = \boxed{لو_{هـ} س}$

القاعدة الثانية $ت(س) = \int_{١}^{هـ} ق(ص) \, دص + \int_{هـ}^{س} ق(ص) \, دص$

تابع الثالث فرع (أ)

$$\text{ت}(\text{س}) = \int_{1}^{\text{هـ}} \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص} + \int_{\text{هـ}}^{\text{س}} (٢\text{ص}+٢)\,\text{دص}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}|\Big|_{1}^{\text{هـ}} + \left[\frac{\cancel{٢}\text{ص}^٢}{\cancel{٢}} + ٢\text{ص}\right]_{\text{هـ}}^{\text{س}} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}١) + (\text{س}^٢ + ٢\text{س}) - (\text{هـ}^٢ + ٢\text{هـ})$$

$$= ١ - \text{صفر} + \text{س}^٢ + ٢\text{س} - \text{هـ}^٢ - ٢\text{هـ}$$

$$= \text{س}^٢ + ٢\text{س} - \text{هـ}^٢ - ٢\text{هـ} + ١$$

$$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \begin{cases} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \text{ ، } ١ \le \text{س} < \text{هـ} \\ \text{س}^٢ + ٢\text{س} - \text{هـ}^٢ - ٢\text{هـ} + ١ \text{ ، } \text{هـ} \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

③ $\text{ن}(\text{هـ}) = ١$

الثالث فرع (ب)

① إذا كان $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\text{س}^٢+١}\,\text{دس} = \frac{\pi}{٢}$ جد $\int_{-1}^{1} \frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢+١}\,\text{دس}$

الحل: $\int_{-1}^{1} \frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢+١}\,\text{دس}$ بإضافة ١ وطرح واحد للبسط

$= \int_{-1}^{1} \frac{\text{س}^٢+١-١}{\text{س}^٢+١}\,\text{دس}$ ويجزئه البسط على المقام

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\cancel{\text{س}^٢+١}}{\cancel{\text{س}^٢+١}} - \frac{١}{\text{س}^٢+١}\,\text{دس} = \int_{-1}^{1} ١ - \int_{-1}^{1} \frac{١}{\text{س}^٢+١}\,\text{دس}$$

$= ١(١ - ^{-}١) - \frac{\pi}{٢} = \boxed{٢ - \frac{\pi}{٢}}$ وهو المطلوب

الثالث فرع (د) جد $\int_{-1}^{1} \text{س}\,\text{قا}^٢(\text{س}^٢)\,\text{دس}$

نفرض أن $\text{س}^٢ = \text{ص}$ عندما $\text{س} = -١$ ، $\text{ص} = ١$

$٢\text{س}\,\text{دس} = \text{دص} \Leftarrow \text{س}\,\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢}$ $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ١$

$$\int_{-1}^{1} \text{س}\,\text{قا}^٢(\text{س}^٢)\,\text{دس} = \int_{1}^{1} \cancel{\text{س}} \times \text{قا}^٢(\text{ص})\,\frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}} = \frac{١}{٢}\int_{1}^{1} \text{قا}^٢(\text{ص})\,\text{دص}$$

تابع الثالث فرع (ج) $\frac{1}{2}\int_{1}^{1} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$ نلاحظ ان الحد الادنى = الحد الاعلى = ١

$\boxed{\text{خاصيه}}$

∴ $\int_{1}^{1} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \boxed{\text{صفر}}$ ∴ $\frac{1}{2}\int_{1}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \boxed{\text{صفر}}$

وهو المطلوب

---

الرابع فرع أ

(١) $\int \frac{\text{س جتاس}}{\text{حا}^{2}\text{س}}\,\text{دس} =$

الحل:- $\text{هـ} = \text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{دس}$ | $\text{دع} = \frac{\text{جتاس}}{\text{حا}^{2}\text{س}}\,\text{دس}$

نكامل $\text{دع} = \frac{\text{جتاس}}{\text{حا}^{2}\text{س}}\,\text{دس}$ بالتعويض نفرض ان ص = حاس

$\text{دص} = \text{جتاس}\,\text{دس}$

$\int \text{دع} = \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{\text{ص}^{3}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}} = \int \text{ص}^{-3}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{-2}}{-2}$

$= \frac{-1}{2\text{ص}^{2}} = \boxed{\frac{-1}{2\text{حا}^{2}\text{س}}}$

∴ $\int \frac{\text{س جتاس}}{\text{حا}^{2}\text{س}}\,\text{دس} = \text{هـ} \times \text{ع} - \int \text{ع}\,\text{دهـ}$ اجزاء

$= \text{س} \times \frac{-1}{2\text{حا}^{2}\text{س}} - \int \frac{-1}{2\text{حا}^{2}\text{س}} \times \text{دس}$

$= \frac{-\text{س}}{2\text{حا}^{2}\text{س}} + \frac{1}{2}\int \text{قتا}^{2}\text{س}\,\text{دس} = \frac{-\text{س}}{2\text{حا}^{2}\text{س}} + \frac{1}{2} \times -\text{ظتاس} + \text{د}$

$= \boxed{\frac{-\text{س}}{2\text{حا}^{2}\text{س}} - \frac{\text{ظتاس}}{2} + \text{ج}}$

تابع الرابع فرع أ

الحل :-

(ج) $\int (س+١)^{٣} (س^{٢} + ٢س + ٧)^{٥} \, دس$ التكامل بالتعويض

نفرض ان $ص = س^{٢} + ٢س + ٧$

$دص = (٢س + ٢) \, دس = ٢(س+١) \, دس$

$\therefore \quad دس = \frac{دص}{٢(س+١)}$

$\int \cancel{(س+١)}^{\overset{٢}{٣}} \times ص^{٥} \times \frac{دص}{٢\cancel{(س+١)}} = \frac{١}{٢} \int (س+١)^{٢} ص^{٥} \, دص$

لكن $س^{٢} + ٢س + ٧ = س^{٢} + ٢س + ١ + ٦ = ص$

$ص = (س+١)^{٢} + ٦$

$\Leftarrow \quad (س+١)^{٢} = \boxed{ص - ٦}$

وبالتعويض

$\Leftarrow \quad \frac{١}{٢} \int (ص-٦) ص^{٥} \, دص = \frac{١}{٢} \int ص^{٦} - ٦ص^{٥} \, دص$

$= \frac{١}{٢} \left( \frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{\cancel{٦} ص^{٦}}{\cancel{٦}} \right) + جـ = \frac{١}{١٤} \times (س^{٢}+٢س+٧)^{٧} - \frac{١}{٢} (س^{٢}+٢س+٧)^{٦} + جـ$

$= \frac{١}{١٤} (س^{٢} + ٢س + ٧)^{٧} - \frac{١}{٢} (س^{٢} + ٢س + ٧)^{٦} + جـ$ وهو المطلوب.

---

الرابع فرع (ب) اذا كان $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

جد $(أ \times ب)^{-١}$

الحل : $(أ \times ب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}$ $\therefore$ نجد ثم $ب^{-١}$

$|ب| = ٢ - ٠ = ٢$ ، $ب^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ ١ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \quad (أب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ ١ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

## السؤال الخامس (أ)

استخدم التكامل بالأجزاء في إيجاد قاعدة الاقتران ق(س) إذا علمت أن قَ(π) = صفر ، س قَ(س) + ق(س) = جتا س

الحل: نفرض أن ص = س | دع = قَ(س) دس
دص = دس | ع = ق(س)

$\therefore$ ∫ س قَ(س) دس + ∫ ق(س) دس = ∫ جتا س دس

وحسب التكامل بالأجزاء ∫ س قَ(س) دس = س × ق(س) − ∫ ق(س) دس

$\therefore$ س × ق(س) − ~~∫ ق(س) دس~~ + ~~∫ ق(س) دس~~ = جا س + جـ

س ق(س) = جا س + جـ $\therefore$ ق(س) = $\boxed{\frac{\text{جا س} + \text{جـ}}{\text{س}}}$

لكن عندما س = π فإن قَ(π) = صفر

وبالتعويض π قَ(π) + ق(π) = جتا π

π × صفر + ق(π) = −١ $\therefore$ ق(π) = −١

ق(π) = $\frac{\text{جا } \pi + \text{جـ}}{\pi} = \frac{\text{جـ}}{\pi}$ = −١ $\therefore$ $\boxed{\text{جـ} = -\pi}$

$\therefore$ ق(س) = $\frac{(\text{جا س}) - \pi}{\text{س}}$ = $\boxed{\frac{-\pi + \text{جا س}}{\text{س}}}$ وهو المطلوب

---

## الخامس فرع (ب)

إذا كان ق(س) = جا س − جتا س ، وكانت ط٤ تجزئة منتظمة للفترة [٠، π] جد م(ط٤، ق) معتبراً سَ*ر = سر

الحل: طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{\pi - ٠}{٤} = \frac{\pi}{٤}$

ط٤ = {٠، $\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٣\pi}{٤}$، π}.

تابع الخامس (ب)

$$م(ط_{٤}، د) = \frac{ب-أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} د(س^{*}_{ر}) = \frac{\pi}{٤} \sum_{ر=١}^{ن} د(س_{ر})$$

$$= \frac{\pi}{٤} \left( د(\frac{\pi}{٤}) + د(\frac{\pi}{٢}) + د(\frac{٣\pi}{٤}) + د(\pi) \right)$$

$$= \frac{\pi}{٤} \left( جا\frac{\pi}{٤} - جتا\frac{\pi}{٤} + جا\frac{\pi}{٢} - جتا\frac{\pi}{٢} + جا\frac{٣\pi}{٤} - جتا\frac{٣\pi}{٤} + جا\pi - جتا\pi \right)$$

$$= \frac{\pi}{٤} \left( \cancel{\frac{١}{\sqrt{٢}}} - \cancel{\frac{١}{\sqrt{٢}}} + ١ - صفر + \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{-١}{\sqrt{٢}} + صفر - -١ \right)$$

$$= \frac{\pi}{٤} \left( ١ + \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} + ١ \right) = \frac{\pi}{٤} \left( \frac{٢}{\sqrt{٢}} + ٢ \right)$$

$$= \frac{\pi}{٤} \left( \sqrt{٢} + ٢ \right) = \frac{\pi}{٤} \left( ٢ + \sqrt{٢} \right)$$ وهو المطلوب

---

السادس فرع أ

اذا كان $\begin{vmatrix} ٨ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & ٢ & ١ \\ ١ & -٤ & ٥ \\ ٢س & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ جد قيمة س

الحل: $(٨ \times ١ - ٢ \times ٤) = س \begin{vmatrix} -٤ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢س & ٢ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ١ & -٤ \\ ٢س & ٤ \end{vmatrix}$

$$صفر = س(-٨ - ٢٠) - ٢(٢ - ١٠س) + ٤ - -٨س$$

$$صفر = -\cancel{٢٨س} - \cancel{٤} + \cancel{٢٠س} + \cancel{٤} + \cancel{٨س}$$

$صفر = صفر \therefore \forall س \in ح$ (اي عدد حقيقي يحقق المعادلة)

---

السادس فرع ب

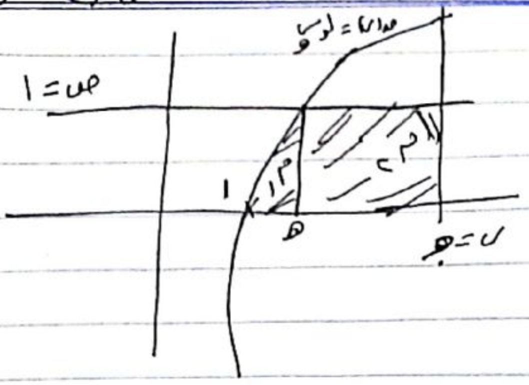
اذا كانت المساحة المحصورة بين $د(س) = لو_{هـ} س$ ، $س = ١$ والمستقيم $س = جـ$ ومحور السينات تساوي ٢ جد قيمة الثابت $جـ > هـ$ .

تابع السادس (ب)

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

وعندما $\text{ص} = ١$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = ١ \Leftarrow \text{س} = \text{هـ}^{١} = \text{هـ}$



$$\text{م}_{\text{الكلي}} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$$

$$= \int_{١}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس} + \int_{\text{هـ}}^{\text{جـ}} ١\ \text{ءس} = ٢$$

نفرض ان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ءص} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس}$ | $\text{ءع} = ١\ \text{ءس}$ ، $\text{ع} = \text{س}$ التكامل بالاجزاء

$$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \text{ص} \times \text{ع} - \int \text{ع} \times \text{ءص} = \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\ \text{ءس}$$

$$= \boxed{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}}$$

$$\Leftarrow \left[\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}\right]_{١}^{\text{هـ}} + ١(\text{جـ} - \text{هـ}) = ٢$$

$$(\text{هـ} \boxed{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}} - \text{هـ}) - (١\ \text{لو}_{\text{هـ}}١ - ١) + \text{جـ} - \text{هـ} = ٢$$

$$\text{صفر} - \text{صفر} + ١ + \text{جـ} - \text{هـ} = ٢$$

$$\therefore \text{جـ} = \text{هـ} + ٢ - ١ = \boxed{\text{هـ} + ١}$$ وهو المطلوب

---

السادس فرع (جـ) $\text{ن} = ٤\ \text{م}/\text{ث}^{٢}$ ، $\text{ع}(٢) = ١٣\ \text{م}/\text{ث}$ أوجد السرعة الابتدائية

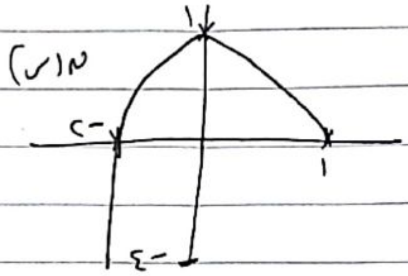
الحل: $\text{ن} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٤ \Leftarrow \int \text{ءع} = \int ٤\ \text{ءن} \Leftarrow \text{ع} = ٤\text{ن} + \text{جـ}$

$\Leftarrow \text{ع}(\text{ن}) = ٤\text{ن} + ٥$

$\text{ع}(٢) = ٤ \times ٢ + \text{جـ} = ١٣ \Leftarrow \text{جـ} = ١٣ - ٨ = \boxed{٥}$ ، $\text{ع}(٠) = ٤ \times ٠ + ٥ = \boxed{٥}\ \text{م}/\text{ث}$

السابع فرع أ

الشكل المجاور يمثل منحنى هـ(س) دون اجراء التكامل جد اصغر قيمة $\int_{-2}^{1} (\text{هـ}^2(\text{س}) - 2)\, \text{دس}$



الحل: من الشكل المجاور

$-4 \le \text{هـ}(\text{س}) \le 1$ وبالتربيع

صفر $\le \text{هـ}^2(\text{س}) \le 16$ وبطرح 2 من جميع الاطراف

$-2 \le \text{هـ}^2(\text{س}) - 2 \le 14$ وباخذ التكامل لجميع الاطراف

$$\int_{-2}^{1} -2\, \text{دس} \le \int_{-2}^{1} (\text{هـ}^2(\text{س}) - 2)\, \text{دس} \le \int_{-2}^{1} 14\, \text{دس}$$

$$-2(1 - -2) \le \int_{-2}^{1} (\text{هـ}^2(\text{س}) - 2)\, \text{دس} \le 14(1 - -2)$$

$$-6 \le \int_{-2}^{1} (\text{هـ}^2(\text{س}) - 2)\, \text{دس} \le 42$$ ∴ اصغر قيمة للتكامل هي $\boxed{-6}$

---

السابع (ب) $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{جاس} & \text{جتاس} \\ \text{جتاس} & \text{جاس} \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 0 & \text{جا2س} \\ \text{جا2س} & 0 \end{bmatrix}$ بين ان $\text{أ}^2 - \text{ب} = \text{م}_2$

الحل: $\text{أ}^2 = \begin{bmatrix} \text{جاس} & \text{جتاس} \\ \text{جتاس} & \text{جاس} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{جاس} & \text{جتاس} \\ \text{جتاس} & \text{جاس} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} & \text{2جاس جتاس} \\ \text{2جاس جتاس} & \text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س} \end{bmatrix}$

$(\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1)$ ، $(\text{جا2س} = \text{2جاس جتاس})$

∴ $\text{أ}^2 = \begin{bmatrix} 1 & \text{جا2س} \\ \text{جا2س} & 1 \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}^2 - \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & \text{جا2س} \\ \text{جا2س} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \text{جا2س} \\ \text{جا2س} & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{م}_2$ وهو المطلوب

السؤال الثامن (أ) اذا كان $(أ + أ ب)^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ وكانت

$أ^{-1} = \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ حيث (أ + أ ب) مصفوفة غير منفردة اوجد المصفوفة ب

الحل: $((أ + أ ب)^{-1})^{-1} = أ + أ ب$ نجد

$$|(أ + أ ب)^{-1}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} = ١٤ - ١٥ = ١-$$

$$\therefore أ + أ ب = \frac{١}{١-} \begin{bmatrix} ٣- & ٧ \\ ٢ & ٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧- \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$$

وبضرب طرفي المعادلة في $أ^{-1}$

$$أ^{-1}(أ + أ ب) = أ^{-1} \begin{bmatrix} ٣ & ٧- \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$$

$$م + ب = \begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٧- \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ + ٠ & ٥ \mp ٠ \\ ٤ - ١٢ & ١٠ + ٢٨- \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ ٨ & ١٨- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦- \\ ٧ & ١٨- \end{bmatrix}$$ وهو المطلوب

---

الثامن فرع (ب) دون اجراء التكامل جد اكبر قيمة واصغر قيمة

$\int_{٢-}^{١} \frac{١}{\sqrt{س^٤ + ٩}}\, دس$ ، س ∈ $[٢- ، ١]$ ⇐ $٢- \leq س \leq ١$

$\therefore \geq س^٤ \leq ٢^٤ \Leftarrow ٠ \leq س^٤ \leq ١٦$ وباضافة ٩ لكل الاطراف

$$٩ \leq س^٤ + ٩ \leq ٢٥ \Leftarrow ٣ \leq \sqrt{س^٤ + ٩} \leq ٥$$

$$\frac{١}{٣} \geq \frac{١}{\sqrt{س^٤ + ٩}} \geq \frac{١}{٥} \quad \forall س \in [٢- ، ١]$$

$$\int_{٢-}^{١} \frac{١}{٥}\, دس \leq \int_{٢-}^{١} \frac{١}{\sqrt{س^٤ + ٩}}\, دس \leq \int_{٢-}^{١} \frac{١}{٣}\, دس$$

تابع ثامن (ب)

$$\frac{١}{٥}(١ - -٢) \le \int_{-٢}^{١} \frac{١}{\sqrt{س^{٤}+٩}}\,ءس \le \frac{١}{٣}(١ - -٢)$$

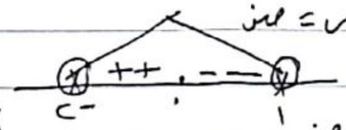
$$\frac{٣}{٥} \le \int_{-٢}^{١} \frac{١}{\sqrt{س^{٤}+٩}}\,ءس \le \overset{١}{\cancel{٣}} \times \frac{١}{\cancel{٣}}$$

∴ اصغر قيمة للتكامل هي $\boxed{\frac{٣}{٥}}$ وأكبر قيمة هي $\boxed{١}$ وهو المطلوب

طريقة ثانية للحل:- $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٤}+٩}} = (س^{٤}+٩)^{-\frac{١}{٢}}$ على $[-٢ ، ١]$

$$\bar{د}(س) = -\frac{١}{٢}(س^{٤}+٩)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٤س^{٣} = \frac{-٢س^{٣}}{\sqrt{(س^{٤}+٩)^{٣}}}$$

نلاحظ ان اشارة المقام دائما موجبة ∴ تعتمد اشارة المشتقة على البسط $-٢س^{٣} = صفر \Leftarrow س = صفر$



∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة عندما س = صفر

لان اشارة المشتقة تحولت من موجب عندما س < صفر الى سالب عندما س > صفر وقيمتها $د(٠) = \frac{١}{\sqrt{٠+٩}} = \boxed{\frac{١}{٣}}$ عظمى مطلقة

ويوجد قيمة صغرى عندما س = -٢ (بداية تزايد)

وقيمة صغرى عندما س = ١ (نهاية تناقص) ∴

$$د(-٢) = \frac{١}{\sqrt{١٦+٩}} = \frac{١}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١}{٥}$$

$د(١) = \frac{١}{\sqrt{١٠}}$ لكن $\frac{١}{٥} < \frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ∴ يوجد قيمة صغرى

مطلقة عندما $\boxed{س = -٢}$ وقيمتها $\boxed{\frac{١}{٥}}$

$\frac{١}{٥} \le د(س) \le \frac{١}{٣} \Leftarrow$ وباجراء التكامل ينتج $\int_{-٢}^{١} \frac{١}{٥}\,ءس \le \int_{-٢}^{١} د(س)\,ءس \le \int_{-٢}^{١} \frac{١}{٣}\,ءس$

$\Leftarrow \boxed{\frac{٣}{٥}} \le \int_{-٢}^{١} د(س)\,ءس \le \boxed{١} \Leftarrow$ اكبر قيمة $\boxed{١}$ اصغر قيمة $\boxed{\frac{٣}{٥}}$ وهو المطلوب

الفرع العلمي ( النموذج الأول )
المبحث رياضيات – الورقة الثانية
أ . بديع أحمد حمدان

نموذج امتحان تجريبي لعام ٢٠٢١

التاريخ : ٥/ ٤ / ٢٠٢١
مدة الإمتحان : ساعتان ونصف
مجموع العلامات : ١٠٠ علامة

ملاحظة : عدد أسئلة الورقة ( ثمانية ) أسئلة ، أجب عن ( خمسة ) منها فقط

**القسم الأول : يتكون هذا القسم من ( ستة ) أسئلة ، أجب عن ( أربعة ) فقط على أن يكون الأول منها**

**السؤال الأول : ( ٢٠ علامة )**

يتكون هذا السؤال من ( ١٠ ) فقرات من نوعِ اختيار من متعدد ، من أربعة بدائل اختر رمز الإجابة الصحيحة ثم ضع إشارة ( X ) في المكان المخصص في دفتر الإجابة :

١ . إذا كان ع ( س ) ، هـ ( س ) إقترانين أصليين للإقتران المتصل بحيث إن ( ٢هـ – ع )َ( ١ ) = ٢٤ وكان ٯ ( ١ ) = ٦ ، ٯَ( ١ ) = ٤ ، فإن قيمة الثابت ٢ :

(أ) ٢　(ب) ٣　(ج) ٥　(د) ٧

٢ . $\int \frac{\text{د س}}{\text{جتا}^{2}\text{س} - ١}$ = :

(أ) – ظتاس + جـ　(ب) ظاس + جـ　(ج) ظتاس + جـ　(د) – ظاس + جـ

٣ . بدأ جسم الحركة من نقطة الأصل فكانت سرعته ع (ن ) = ( ٢ ن + ٢ ) م / ث فإذا قطع مسافة ٤٠ متر خلال ثانيتين من من بدء الحركة فإن قيمة ٢ تساوي :

(أ) ٢٠　(ب) ١٨　(ج) ١٦　(د) ١٤

٤ . إذا علمت $\int$ س$^{2}$ جتاس د س = س$^{2}$ جاس + $\int$ ع د ٯ فما قيمة ع د ٯ ؟

(أ) س جاس د س　(ب) س جتاس د س　(ج) ٢س جاس د س　(د) – ٢س جاس د س

٥ . إذا كانت σ م = { ١ ، ١ + $\frac{٢}{ن}$ ، ١ + $\frac{٤}{ن}$ ، . . ، ١٥ } تجزئة منتظمة للفترة [ ١ ، ١٥ ] فإن عدد عناصر التجزئة

(أ) ن + ١　(ب) ٧ ن + ١　(ج) ١٤ ن　(د) ٦ ن + ١

٦ . إذا كان م ( س ) = ٢س$^{3}$ + ب س$^{2}$ إقتران أصلي للإقتران ٯ ( س ) وكان ٯ ( ١ ) = ٦ ، $\int_{٠}^{٢}$ ٯ ( س ) د س = ٢٠

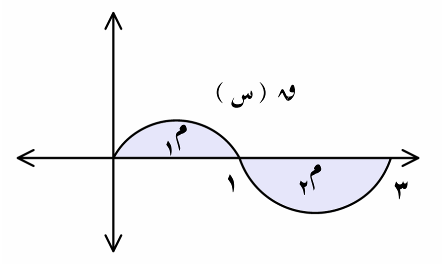
فإن قيمتي كل من ٢ ، ب على الترتيب :

(أ) ١ ، ٥　(ب) ٤ ، –٣　(ج) –٤ ، ٣　(د) ٦ ، ٢٠

٧ . إذا كان ٯ : [ ١ ، ٣ ] ⟵ ح إقتراناً متصلاً على الفترة وكانت σ ن تجزئة منتظمة لنفس الفترة بحيث

م ( σ ن ، ٯ) = ٥ + $\frac{٣ ن - ١}{ن}$ فإن $\int_{١}^{٣}$ ٢ ( ٯ ( س ) + ١ ) د س يساوي

(أ) ٢٠　(ب) ١٨　(ج) ١٦　(د) ١٤



٨ . في الشكل المجاور إذا علمت أن $م_{١}$ = وحدة مربعة ، $م_{٢}$ = ٣ وحدات مربعة فإن $\int_{١}^{٢}$ س ق(س$^{٢}$ − ١ ) د س يساوي :

Ⓟ ٤ ⓑ −٤ ⓙ −٢ ⓓ −١

٩ . إذا كانت Ⓟ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين بحيث إن : | Ⓟ . ب | = ١٨ ، | Ⓟ | + | ب | = ١١ وكان | Ⓟ | ⩽ | ب | فإن قيمة | Ⓟ | = :

Ⓟ ٧ ⓑ ٢ ⓙ ٩ ⓓ ٦

١٠ . إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ وكان ٢٣ ( Ⓟ − ب ) = Ⓟ + ٢٤ ( Ⓟ − ب ) فإن | $Ⓟ^{-١}$ | .

Ⓟ $\frac{١}{٧}$ ⓑ ٧ ⓙ $\frac{١}{٢}$ ⓓ ٢

---

**السؤال الثاني : ( ٢٠ علامة )**

Ⓟ ) باستخدام تعريف التكامل المحدود احسب : $\int_{١}^{٣}$ س ( ١ − $\frac{٢}{س}$ ) د س متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر}$

ب ) إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ ( ٣ ق (س ) + ٢س − ٤ ) د س = ٣ ، $\int_{٣}^{١}$ ( ق (س + ١ ) − ٣س$^{٢}$ ) د س = ٢٧

جد : $\int_{-١}^{٤}$ ق (س ) د س

ج ) حل المعادلة المصفوفية الآتية ٣ ( سـ + $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ) = ٢ $\begin{bmatrix} ٦ & -١ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ .

**السؤال الثالث : ( ٢٠ علامة )**

Ⓟ ) إذا كان ق (−١ ) = ٢ ، ق (٧ ) = ١١ جد $\int_{٠}^{٢}$ س$^{٢}$ قَ(س$^{٣}$ − ١ ) د س

ب ) إذا كان ق ، هـ إقترانين معرفين على الفترة [ ١ ، ٥ ] وكان ق (س ) = ٢س − ١ ، هـ (س ) = س ق (س ) + ٢

وكانت $\sigma_{٤}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } جد م ($\sigma_{٤}$ ، هـ ) متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر-١}$

ج ) إذا كان Ⓟ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ حل المعادلة المصفوفية : $Ⓟ^{-١}$ × ( $سـ^{-١}$ × ب )$^{-١}$ = م + ب .

**السؤال الرابع : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) جد قيمة ما يلي :**

١ ) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}$ د س  ٢ ) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}$ د س

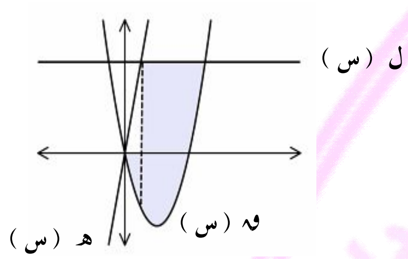
**ب ) إذا كان ميل المماس لمنحنى الإقتران ق ( س ) عند أي نقطة عليه يساوي أ س − ٣ س$^{٢}$ جد قاعدة الإقتران ق ( س ) علماً بأن المستقيم س + ص = ٤ يمس منحنى الإقتران عند النقطة ( ١، ق ( ١ ) )**

**ج ) إذا كان ق ( س ) =** $\begin{cases} \text{٢س − ٤} & ، \quad ٠ \leqslant \text{س} < ٢ \\ \text{٦س}^{٢} + \text{١٢س} & ، \quad ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$ **جد الإقتران المكامل ت ( س ) للإقتران ق ( س ) على الفترة [ ٠ ، ٤ ]**

**السؤال الخامس : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) جد قاعدة الإقتران ق ( س ) علماً بأن ق$''$ ( س ) = ق$'$( س ) ، ق$'$( س ) ≠ ٠ وأن ق$'$( ٠ ) = ١ ، ق ( ٠ ) = ٠**

**ب ) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث ق ( س ) = س$^{٢}$ − ٤س ، هـ ( س ) = ٥س ، ل ( س ) = ٥**



**ج ) إذا كان ق متصل على ح** $\int_{\text{س}}^{\text{أ}}$ **ق ( ص ) د ص = س$^{٢}$ − ب س − ٣ وكان ق ( ١ ) = صفر جد الثابتين أ ، ب**

**السؤال السادس : ( ٢٠ علامة )**

**أ ) إذا كان ق ، هـ إقترانين معرفين في الفترة [ ٢ ، ١٠ ] وكان هـ ( س ) = ٣ ق ( س ) + س بحيث :**

**م ( $\sigma_{٤}$ ، ق ) = ٦ ، جد م ( $\sigma_{٤}$ ، هـ ) معتبراً س$^{*}_{ر}$ = س$_{ر}$ علماً بأن $\sigma_{٤}$ تجزئة منتظمة للفترة [ ٢ ، ١٠ ] .**

**ب ) حل النظام الأتي من المعادلات بإستخدام طرقة كريمر : − ص + ٣س = ٢ ، ٢س + ٣ص = ٥ .**

**ج ) جد قيمة ما يلي :**

١ ) $\int \frac{(\sqrt{\text{س}} + ٢)^{٥}}{\text{س}^{٤}}$ د س  ٢ ) $\int$ (س$^{٤}$ جا س − ٤ س$^{٣}$ جتا س ) د س

**القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط**

## السؤال السابع : ( ٢٠ علامة )

أ ) إذا كان ق ( ١ ) = ٤ ، ق ( −١ ) = ٣ ، $\int_{-١}^{١}$ ق ( س ) د س = ٢٠ جد $\int_{٢}^{٣}$ ٨س قَ ( ٥ − ٢س ) د س

ب ) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٥ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، جد قيمة ك ∈ ح التي تجعل المصفوفة ب = (( ك − ٣ ) $م_{٣}$ − ٢ أ ) غير منفردة .

## السؤال الثامن : ( ٢٠ علامة )

أ ) إذا كان ق ( س ) = $\frac{س}{ك}$ + ١ وكانت $\sigma_{٤}$ = { ٠ ، ك ، ٣ك ، ٧ك ، ١٠ك } حيث ك ثابت > صفر ، تجزئة للفترة

جد قيمة ك حيث م ( $\sigma_{٤}$ ، ق ) = ٩٠ متخذاً $س^{*}_{ر}$ = $س_{ر-١}$ .

ب ) جد قيمة ما يلي :

١ ) $\int \frac{١}{( جتا^{٤} س - جا^{٤} س )^{٢}}$ د س

٢ ) $\int_{٠}^{١} \frac{٣ \ د س}{( س^{٢} + ٢س + ١ )^{٣}}$

( النموذج الأول )

الإمتحان تم إعداده وفق النظام الجديد للعام الحالي

تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

أ . بديع أحمد حمدان