١٢

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الأدبي والشرعي

الفترة الاولى

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس +970-2-2983250 | هاتف +970-2-2983280

المحتويات

(١ - ١) متوسط التغير	Rate Of Change	٤
(١ - ٢) المشتقة الأولى	First Derivative	١٠
(١ - ٣) قواعدالاشتقاق	Derivative Rules	١٤
(١ - ٤) القيم القصوى للإقتران	Extreme Values	٢٠
(١ - ٥) التكامل غير المحدود	Indefinite Integral	٢٥
(١ - ٦) التكامل المحدود	Definite Integral	٣١
(١ - ٧) تمـــاريـــن عـــامـــة	Chapter Exercises	٣٨

الوحـــــدة المتمازجة للفترة الأولى

التّفاضل والتّكامل

Differentiation and Integration

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف مبادئ التفاضل والتكامل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. إيجاد متوسط التغير للاقتران ق(س).
٢. التعرف على مفهوم المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٣. استخدام قواعد الاشتقاق في إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٤. تحديد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) في مجاله.
٥. تعيين القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) في مجاله وتحديد نوعها.
٦. التعرف على مفهوم التكامل.
٧. إيجاد التكامل غير المحدود.
٨. استخدام خصائص التكامل المحدود في ايجاد التكاملات المختلفة.

متوسط التغير

تعريف

إذا كان ص= ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$ فإن:

التغير في قيمة س = س$_{٢}$ − س$_{١}$، ويرمز له بالرمز Δس

التغير في قيمة ص = ص$_{٢}$ − ص$_{١}$= ق(س$_{٢}$) − ق(س$_{١}$) ويرمز له بالرمز Δص

مثـال (١)

إذا كان ص = ق(س) = ٥-٢س^{٢}، وكانت س$_{١}$ = ١، Δس =٢، فما قيمة التغير في قيمة ص؟

الحلّ:

Δس = س$_{٢}$ − س$_{١}$

٢ = س$_{٢}$−١

س$_{٢}$ = ٣

Δص = ق(س$_{٢}$) − ق(س$_{١}$) = ق(٣) − ق(١)

= (٥-٢(٣)^{٢}) − (٥-٢(١)^{٢}) (لماذا؟)

= -١٣ − ٣

= -١٦

أناقش: ما التغير في قيمة ص عندما يكون قيمة التغير في س يساوي ١؟ (في المثال ٢)

تعريف

إذا كان ق(س) اقتراناً، وتغيرت س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$ فإن:

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$ ، س$_{١}$ ≠ س$_{٢}$

مثـال (٢)

أَحسبُ متوسط التغير في الاقتران ق(س) = س^{٢} + ٥، عندما تتغير س في [٣،٥] .

الحلّ: ق(٣) = (٣)^{٢} + ٥ = ١٤

ق(٥) = (٥)^{٢} + ٥ = ٣٠

متوسط التغير للاقتران = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣} = \frac{٣٠ - ١٤}{٢} = ٨$

مثـال (٣)

إذا كان هـ (س)= ٢ق(س) +٤، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٣، ٧] يساوي ١٠، أجدُ متوسط التغير للاقتران هـ (س) على الفترة ذاتها.

الحلّ: متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣}$ = ١٠

متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{هـ(٧) - هـ(٣)}{٧ - ٣} = \frac{(٢ق(٧) + ٤) - (٢ق(٣) + ٤)}{٧ - ٣}$

$= \frac{٢ق(٧) - ٢ق(٣)}{٧ - ٣} = ٢ \times \frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣} = ٢ \times ١٠ = ٢٠$

تمارين ومسائل (١ - ١)

١ أَجدُ متوسط التغير في كل من الاقترانات الآتية عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$.

أ) هـ(س) = س^{٢} + ٢ ، س$_{١}$=٢ ، س$_{٢}$= ٥.

ب) ل(س) = $\sqrt[٣]{س+٢}$ ، س$_{١}$= -١ ، س$_{٢}$= ٦.

٢ إذا كان ق(٣) =٨، وكان متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$= ٣ إلى س$_{٢}$= ٥ يساوي -٢، أَجد ق (٥).

٣ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = أس^{٢} − ٥س في [١ ، ٣] يساوي -٩،أجد قيمة الثابت أ.

٤ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [٢ ، ٤] يساوي ٥، أجد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) − ٢ في تلك الفترة.

المشتقة الأولى

تعريف*

إذا كان ص= ق(س) معرفاً عند س = أ، وكانت $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(أ+هـ) - ق(أ)}{هـ}$ موجودة، فإن ق(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س= أ وتسمى المشتقة الأُولى للاقتران ق(س) عند س= أ .

ويرمز لها بالرمز قَ(أ) أو $\left|\frac{ص}{س}\right|_{س=أ}$. أو $ص_{|س=أ}$

قاعدة (١): إذا كانت ص= ق(س)= أ ، حيث أ عدد حقيقي، فإن قَ(س)= $\frac{ص}{س}$ = صفر.

قاعدة (٢): إذا كانت ص= أ س+ ب، ، حيث أ ، ب عددان حقيقيان، فإن $\frac{ص}{س}$ = أ .

مثـال (١)

أَجدُ مشتقة كل من الاقترانات الآتية: أ) ق(س) = ٩٨ ب) ص=٥س

الحلّ: أ) ق(س) = ٩٨ (اقتران ثابت) إذن: قَ (س) = صفر.

ب) ص = ٥س (اقتران خطي) إذن: $\frac{ص}{س}$ = ٥

قاعدة (٣): إذا كان ق(س) = س^{ن}، فـإنّ قَ(س) = ن س$^{ن-١}$ ،حيث:

ن عدد حقيقي، ن≠ ٠، س ≠ .

مثـال (٢)

أَجدُ مشتقة الاقتران ق(س) = س^{٥} عند النقطة (-٢، -٣٢).

الحلّ: قَ(س) = ٥س$^{٥-١}$ = ٥س^{٤} ومنها قَ(-٢) = ٥(-٢)^{٤}

= ٥ × ١٦ =٨٠

* تعريف المشتقة الأولى للعلم فقط.

نشاط (٢)

إذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{س^{2}}$ فلإيجاد قَ(-٨):

ق(س) = $\sqrt[3]{س^{2}}$ = $س^{\frac{2}{3}}$ (لماذا)؟ ومنها قَ(س) = $\frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}}$

= $\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$ ومنها قَ(-٨) = _____.

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقترانا قابلاً للاشتقاق، وكان أ عدداً حقيقياً، أ ≠ ٠، فإن الاقتران هـ(س) = أ.ق(س) هو اقتران قابل للإشتقاق، وتكون هَ(س) = أ.قَ(س)

مثـال (٣)

إذا كان هـ(س) = ٥ق(س)، وكان قَ(٦) = -١، فما قيمة هَ(٦)؟

الحلّ: هـ(س) = ٥ق(س) إذن هَ(س) = ٥قَ(س) ومنها هَ(٦) = ٥ × قَ(٦) ومنها هَ(٦) = ٥ × -١ = -٥

تمارين ومسائل (١ - ٢)

١ أَجدُ مشتقة كل من الاقترانات الآتية عند قيمة س المقابلة لكل منها:

أ) ق(س) = -٢ $\sqrt[5]{}$ عند س = ١٠٠

ب) ق(س) = $\sqrt[3]{س^{5}}$ عند س = ١

ج) ق(س) = $س^{3}$ عند س = -١

٢ أجد قَ(س) لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $\frac{٦٤}{٥ س^{5}}$ ، س ≠ صفر ب) ق(س) = $(٠,٠٠٣)^{5}$ جـ) ق(س) = ٥$س^{٤}$

٣ إذا كان ص = ٦ق(س)، وكان قَ(٥) = ٧، أَجدُ قيمة $\frac{ص}{س}$ عند س = ٥

٤ إذا كان ق(س) = أ$س^{3}$، وكان قَ(٢) = ٦٠، فما قيمة الثابت أ ؟

قواعد الاشتقاق

قاعدة (١)*: إذا كان ق(س) و هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ك(س) = ق(س) ± هـ(س) فإن:

الاقتران ك(س) يكون قابلاً للاشتقاق، ويكون كَ(س) = قَ(س) ± هَ(س).

وبلغة أخرى: (ق + هـ)َ(س) = قَ(س) + هَ(س)

مثال (١)

إذا كان ق(س) = ٥س^{٢}، وكان هـ(س) = ٤س^{٣}، أجد:

أ) (ق + هـ)َ(س) ب) (ق − هـ)َ(١)

الحلّ: قَ(س) = ١٠س. كما أن: هَ(س) = ١٢س^{٢}

أ) بحسب القاعدة: (ق + هـ)َ(س) = قَ(س) + هَ(س)

ومنها: (ق + هـ)َ(س) = ١٠س + ١٢س^{٢} (لماذا)؟

ب) قَ(١) = ١٠(١) = ١٠

هَ(١) = ١٢(١)^{٢} = ١٢

وبما أن (ق − هـ)َ(س) = قَ(س) − هَ(س)

فإن: (ق − هـ)َ(١) = قَ(١) − هَ(١) = (١٠) − (١٢) = -٢

نشاط (١)

إذا كان ق(س) = ك(س) - ٢م(س) + ٧ حيث: ك(س) = ٣س^{٣} + ٢، م(س) = ٣س + ٢، فإن:

كَ(س) = ٩س^{٢} مَ(س) = ٣

قَ(س) = كَ(س) − ٢مَ(س)

= _____ ومنها: قَ(-٢) = _____.

* يمكن تعميم القاعدة لأكثر من اقترانين.

قاعدة (٢): إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س = أ فإن:

(ق × هـ)َ(أ) = ق(أ) × هـَ(أ) + هـ(أ) × قَ(أ).

وبالكلمات: مشتقة حاصل ضرب اقترانين= الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = (٣س^{٢} -٥س) (٧-٤س) فإن قَ(س) تساوي:

قَ(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

قَ(س) = (٣س^{٢} − ٥س) (-٤) + (٧ − ٤س) (٦س − ٥)

ومنها قَ(٢) = (٣(٢)^{٢} − ٥(٢)) (-٤) + (٧ − ٤(٢)) (٦(٢) − ٥)

= (٢ × -٤) + (١- × ٧) = -١٥

قاعدة (٣): إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان هـ (س) ≠ ٠ عند س = أ فإن:

$$\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(أ) = \frac{(هـ(أ) \times قَ(أ)) - (ق(أ) \times هـَ(أ))}{(هـ(أ))^{٢}}$$ ، وبالكلمات:

$$\text{مشتقة ناتج قسمة اقترانين} = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = $\frac{٣ - ٤س}{٢س - ٦}$ ، س ≠ ٣، أتحقق أن قَ(١) = $\frac{٩}{٨}$

الحلّ: $$قَ(س) = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

$$قَ(س) = \frac{(٢س - ٦)(-٤) - (٣ - ٤س)(٢)}{(٢س - ٦)^{٢}}$$

$$قَ(١) = \frac{(-٤)(-٤) - (١-)(٢)}{(-٤)^{٢}} = \frac{١٨}{١٦} = \frac{٩}{٨}$$

تمارين ومسائل (١ - ٣)

١ بالاعتماد على البيانات في الجدول المجاور أحسبُ ما يأتي:

ق(٥)	قَ(٥)	هـ(٥)	هَ(٥)
٩	٢	٣	-١

أ) (ق +٢هـ)َ(٥)

ب) (٣ق −٤هـ)َ (٥)

جـ) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$َ(٥)

د) (ق×هـ)َ (٥)

٢ إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٧، هـ (س) = ٢ − ٣س، أجد:

أ) (ق +هـ)َ(١)

ب) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$َ (س)

جـ) $\frac{قَ(س)}{هَ(س)}$

د) (ق×هـ)َ(٢)

هـ) قَ (٢) × هـ (٢)

و) (س^{٢}× ق(س))َ(-٢)

٣ إذا كان (ق × هـ)َ(٧) = ١٢، ق(٧) = ٣، قَ(٧) = ٦، هَ(٧) = ٣ أجد هـ (٧)

٤ إذا كان (ق ÷ هـ)َ (٩) = ٣، ق(٩) = ٥، قَ(٩) = -١٢، هـ(٩) = -٣

أجد هَ (٩)، علماً بأن هـ(س) ≠ صفر

٥ إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ٦س-٥، وكان قَ(٣) = ٠، فما قيمة الثابت أ؟

٦ إذا كان ق(س) = س^{٢} - ٢أس + ٣، هـ(س) = س^{٢} - ٢، وكان (ق × هـ)َ(١) = ٨، أجد قيمة الثابت أ.

٧ إذا كان ق(س) = $\frac{أس - ٥}{٦ - ٤س}$ ، وكان قَ(١)= - $\frac{١}{٢}$ ، فما قيمة الثابت أ؟

القيم القصوى للإقتران

تعريف

يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [أ ، ب]،إذا كان: لكل س٢ > س١ فإنَّ:
ق(س٢) > ق(س١) لأي عددين س١، س٢ ∈ [أ ، ب].
ويكون ق(س) متناقصاً على الفترة [أ ، ب]، إذا كان: لكل س٢ > س١ فإنَّ ق(س٢) < ق(س١)
لأي عددين س١، س٢ ∈ [أ ، ب].

نظرية: إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ ، ب]، فإن ق(س) يكون:

١) متزايداً في الفترة [أ ، ب]، إذاكانت قَ(س) > صفر لكل س في الفترة]أ ،ب[.

٢) متناقصاً في الفترة [أ ، ب]، إذاكانت قَ(س) < صفر لكل س في الفترة]أ ،ب[.

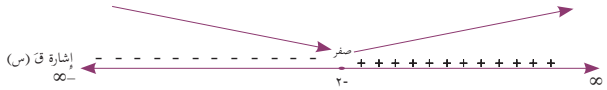
٣) ثابتاً في الفترة [أ ، ب]، إذاكانت قَ(س) = صفر لكل س في الفترة]أ ،ب[.

مثـال (١)

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س٢ + ٤س − ٧ ، س ∈ ح

الحلّ: نجد قَ(س) فتكون: قَ(س) = ٢س+٤ نضع قَ(س)= صفر ومنها: ٢س+٤=٠ إذن س= -٢

أبحث في إشارة قَ (س) في جوار س= -٢



من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور، يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [-٢،∞[، ويكون متناقصاً في الفترة]-∞، -٢].

أتعلـــم

يكون للاقتران ق(س) المعرف على ح قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند س= أ ، إذا كان:

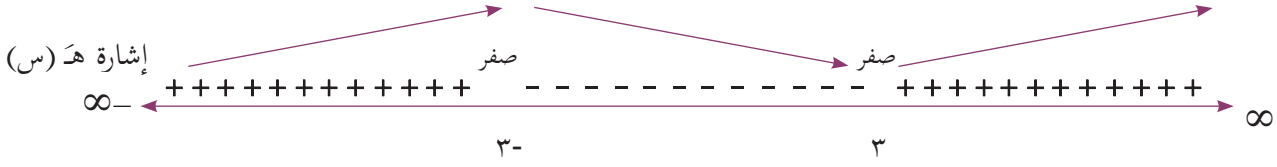
١. قَ(أ) = صفراً. ٢. يغيّر ق(س) من سلوكه حول س= أ من التزايد إلى التناقص أو العكس.

مثـال (٢)

أُجدُ القيم القصوى المحلية للاقتران هـ(س)= س^{٣}-٢٧س، س∈ ح، إن وجدت، وأحدد نوعها.

الحلّ: هَ (س) = ٣ س^{٢} − ٢٧ هَ (س) = ٠ (لماذا) ؟

٣ (س^{٢} − ٩) = ٠ ومنها (س − ٣) (س + ٣) = ٠ س= ٣ أو س= -٣ (لماذا) ؟



من إشارة هَ (س) يتضح أن الاقتران هـ(س) قد غيّر من سلوكه، حول س= -٣ من التزايد إلى التناقص.

إذن للاقتران هـ(س) قيمة عظمى محلية عند س= -٣، وقيمتها هـ (-٣) =٥٤. كما أن هـ(س) غيّر سلوكه من التناقص إلى التزايد حول س = ٣. إذن للاقتران هـ (س) قيمة صغرى محلية عند س= ٣ وقيمتها هـ (٣) = -٥٤.

تمارين ومسائل (١ - ٤)

١ إذا كان ق(س) = ٣س^{٢}+٦س-١، س∈ ح، أجد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح.

ب) القيم القصوى للاقتران ق(س)، وأحدد نوع كل منها.

٢ ما قيمة الثابت جـ في الاقتران ق(س) = ٥ − جـ س − س^{٢}، والتي تجعل ق(٢) قيمة عظمى محلية.

٣ ما فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) = (س + ٢) × (-٢س − ٤).

٤ أحددُ فترات التزايد والتناقص للاقتران ك(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٢س^{٢} − ٥س − ٥، س∈ ح، وما القيم القصوى (العظمى والصغرى) للاقتران ك(س)؟ وما نوع كل منها؟

٥ أبين أنه لا يوجد للاقتران ع(س) = ٢س^{٣} + ٢ قيم قصوى في مجاله.

ورقة عمل

السؤال الأول: اختر رمز الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية:

١ إذا كان ق(س) = ٥ $\sqrt[٣]{٩س^{٣}}$ ، فما قيمة قَ(١)؟

أ. -٤ ب. ٤ جـ. ٢ د. -٤,٥

٢ إذا كان متوسط متغير الاقتران ص = ق(س) على فترة ما يساوي $\frac{٣}{٤}$ وكانت Δص = ٩، فما قيمة Δص - Δس؟

أ. ٤ ب. -٤ جـ. ١٢ د. -٣

٣ إذا كان قَ(٤) = ٧، ق(٤) = ٢، هَ(٤) = -٨ = ٢هـ (٤)، فما قيمة $(\frac{ق}{هـ})$َ(٤)؟

أ. $\frac{-٣}{٤}$ ب. $\frac{-٦}{٤}$ جـ. $\frac{-٣}{٨}$ د. $\frac{-٣}{١٦}$

٤ إذا كان قَ(٢) = صفر، ق(٢) = -٧، وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية وحيدة على مجالهِ فما أصغر قيمة للاقتران ق(س)؟

أ. ٢ ب. -٢ جـ. ٧ د. -٧

السؤال الثاني: أجد قَ(س) فيما يأتي:

١. ق(س) = (٣س^{٣}-٢) (٧س^{٢} - ٣س + ١) عند س = ١

٢. ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٥}}$ - $\frac{٢}{س^{٣} - ٧}$ + ٥ ، عندما س = -١

التكامل غير المحدود

نشاط (١)

إذا كان ق(س) اقتراناً، حيث أن مشتقته ق/(س)=٢س، فإن قاعدة ق(س) **يمكن أن تكون:**

ق١(س) = س٢ .

ق٢(س) = س٢ + ـــــ .

ق٣(س) = س٢ + $\frac{١}{٣}$ إذن الصورة العامة للاقتران هي ق(س) = _____ .

تعريف

إذا كان ق(س) اقتراناً مشتقته الأُولى قَ(س)، فإن التكامل غير المحدود للاقتران قَ(س) بالنسبة لـ س يساوي ق(س) +جـ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز ⌡، وبصورة عامة فإنَّ:

⌡قَ(س) د س = ق(س) + جـ، حيث جـ عدد حقيقي.

مثال (١)

إذا كان ق/(س) = ٦س. فإن ⌡ قَ(س) د س، ق(س) = ٣س٢ + جـ، حيث جـ عدد حقيقي.

قواعد التكامل غير المحدود:

قاعدة (١): ⌡ ٢ د س = ٢ س+جـ، حيث ٢،جـ عددان حقيقيان.

مثال (٢)

أجد ⌡ ٩ د س **الحلّ:** ⌡ ٩ د س = ٩س + جـ

قاعدة (٢): ⌡س^ن د س = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$ + جـ، حيث ن،جـ عددان حقيقيان، ن ≠ -١

مثـال (٣)

$$\int س^{٣}\,ds = \frac{س^{١+٣}}{١+٣} + جـ = \frac{١}{٤}\,س^{٤} + جـ$$

مثـال (٤)

أجد قاعدة الإقتران ق(س) الذي مشتقته قَ(س) $= \sqrt[٤]{س^{٣}}$ ، علماً بأن ق(١) = ١

$$ق(س) = \int قَ(س)\,ds = -\int \sqrt[٤]{س^{٣}}\,ds = \frac{س^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}} + جـ$$

لكن ق(١) = ١ ومنها جـ $= \frac{٣}{٧}$. اذن قاعدة الاقتران ق(س) $= \frac{٤}{٧}\,س^{\frac{٧}{٤}} + \frac{٣}{٧}$.

$$ق(س) = \frac{٤}{٧}\sqrt[٤]{س^{٧}} + \frac{٣}{٧}$$

قاعدة (٣): إذا كان ق(س) ، هـ(س) إقترانين قابلين للتكامل فإن:

$$\int (ق \pm هـ)(س)\,ds = \int ق(س)\,ds \pm \int هـ(س)\,ds$$

مثـال (٥)

أجد $\int (س^{٣}+س)\,ds$

الحلّ: $\int (س^{٣}+س)\,ds = \int س^{٣}\,ds + \int س\,ds$

$$= \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$$

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان ع(س) = ك. ق(س)، حيث ك عدد حقيقي، ك≠٠،

فإن: $\int ع(س)\,ds = ك \int ق(س)\,ds$ = ك. ق(س)

مثـال (٦)

أَحسبُ: $\int ٦س^{٢}\,ds$

الحلّ: $\int ٦س^{٢}\,ds = ٦ \int س^{٢}\,ds$

$= ٦ \times \frac{س^{٣}}{٣} + جـ = ٢س^{٣} + جـ$

تمارين ومسائل (١ - ٥)

١ أَحسبُ كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int (٣س^{٢}+٤س-٥)\,ds$ ب) $\int س^{\frac{٢}{٥}}\,ds$ جـ) $\int \sqrt[٧]{س}\,ds$

د) $\int (٦س^{-٤} + \frac{٢}{٥س^{٢}})\,ds$ هـ) $\int (٥٦س^{٣} + ٧س^{٢} + ٣س)\,ds$ و) $\int (٥)^{٤٠٠٢}\,ds$

٢ إذا كان ق(س) = $\int (س^{٥}-٤س^{٣}+٨)\,ds$، أجد قَ(١).

٣ إذا كان $\int$ قَ(س) ds= ٣س^{٢} + ٢س+جـ، أَجدُ قَ(س).

٤ إذا كان ص = $\int (س^{٢}+٣)\,ds$، أَجدُ $\frac{ds ص}{ds س}$.

التكامل المحدود

أولاً: التكامل المحدود

تعريف

التكامل المحدود: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن: $\int_{أ}^{ب} ق'(س)\,ds = ق(س)\Big|_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ)$،

حيث أ: الحد الأدنى ، ب: الحد الأعلى ، أ ، ب عددان حقيقيان.

مثال (١)

أحسبُ قيمة: $\int_{٠}^{٢} (٢س + ٥)\,ds$

الحلّ: $\int_{٠}^{٢} (٢س + ٥)\,ds = (س^{٢}+٥س)\Big|_{٠}^{٢} = (٤+١٠) - (٠) = ١٤$

مثال (٢)

إذا كانت ص= $\int_{٢}^{٣} س^{٢}\,ds$ ، فإن $\frac{ds ص}{ds س}$ = ٠ (لماذا).

الحلّ: $\int_{-١}^{٢} ٢ق'(س)\,ds = ٢\int_{١-}^{٢} ق'(س)\,ds$ (لماذا؟)

أتعلم

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفراً دائماً.

مثـال (٣)

إذا كان $\int_{ب}^{٦} (٤س + ٣)\,ds س = ٩٠$ فما قيمة الثابت ب؟

الحلّ: $\int_{ب}^{٦} (٤س + ٣).ds س = (٢س^{٢} + ٣س)\Big|_{ب}^{٦}$ (لماذا)؟ $= ق(٦) - ق(ب)$

$= ((٢)(٣٦) + ٣(٦)) - (٢ب^{٢} + ٣ب) = ٩٠$

$= ٩٠ - (٢ب^{٢} + ٣ب) = ٩٠$ إذن: ب = ٠ أو ب $= \frac{-٣}{٢}$ (لماذا؟)

ملاحظة: تنطبق جميع قواعد التكامل غير المحدود على التكامل المحدود.

ثانياً: خصائص التّكامل المحدود

خاصية (١)

$$\int_{ب}^{ب} ق(س)\,ds س = \text{صفر، حيث: ب عدد حقيقي}$$

مثـال (٤)

$$\int_{٣}^{٣} (س - ٤)^{٤}\,ds س = \int_{٣}^{٣} (س - ٤)^{٤}\,ds س = \text{صفر، لأن الحد الأعلى يساوي الحد الأدنى.}$$

خاصية (٢)

$$\int_{م}^{ب} ق(س)\,ds س = -\int_{ب}^{م} ق(س)\,ds س$$

مثـال (٥)

إذا كان $\int_{١}^{٤}$ ق(س) ﺩﺱ = ٩ فما قيمة $\int_{٤}^{١}$ (٢ق(س) + ٧) ﺩﺱ ؟

الحلّ: $\int_{٤}^{١}$ (٢ق(س) + ٧) ﺩﺱ = ٢ $\int_{٤}^{١}$ ق(س) ﺩﺱ + $\int_{٤}^{١}$ ٧ ﺩﺱ

$= -٢ \int_{١}^{٤}$ ق(س) ﺩﺱ + $\left| ٧س \right|_{٤}^{١}$

$= (-٢)(٩) + (٧ -٢٨)$ (لماذا؟)

$= -١٨ - ٢١ = -٣٩$

خاصية (٣)

إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ، ب]، وكان جـ عدد حقيقي بحيث أ < جـ < ب، فإنَّ:

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ﺩﺱ = $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) ﺩﺱ + $\int_{جـ}^{ب}$ ق(س) ﺩﺱ . وتسمى هذه الخاصية خاصية الإضافة.

مثـال (٦)

إذا كان $\int_{-٣}^{٢}$ ق(س) ﺩﺱ = ٢ ، وكان $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) ﺩﺱ = ٤، فما قيمة $\int_{-٣}^{٦}$ ٥ق(س) ﺩﺱ؟

الحلّ: $\int_{-٣}^{٦}$ ق(س) ﺩﺱ = $\int_{-٣}^{٢}$ ق(س) ﺩﺱ + $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) ﺩﺱ

$= ٢ + ٤ = ٦$

اذن: $\int_{-٣}^{٦}$ ٥ق(س) ﺩﺱ = ٥ $\int_{-٣}^{٦}$ ق(س) ﺩﺱ = ٥ × ٦ = ٣٠

تمارين ومسائل (١ - ٦)

١ أحسبُ كل من التكاملات التالية:

أ) $\int_{-٢}^{١} (٣س + ١)\, ds$ ب) $\int_{٢}^{٥} (٧ - ٢س)\, ds$ جـ) $\int_{١}^{٤} (٣ + \sqrt{س})\, ds$

٢ إذا كان $\int ع(س)\, ds = ٣س^{٢} - ٢س + جـ$، فما قيمة $\int_{-٢}^{٢} ٢ع(س)\, ds$؟

٣ إذا كان $\int_{١}^{٥} ٣هـ(س)\, ds = ١٢$، ما قيمة $\int_{٥}^{١} (هـ(س) + ٢س - ١)\, ds$؟

٤ إذا كان $\int_{٣}^{٥} (٢س + ب)\, ds = ١٢$، فما قيمة الثابت ب؟

٥ إذا كان $\int_{-١}^{جـ} ٦س\, ds$ = صفر، فما قيمة/قيم الثابت جـ؟

٦ إذا كان $\int_{-١}^{٥} ق(س)\, ds = ١٣$، $\int_{٥}^{-١} هـ(س)\, ds = ٧$، فما قيمة: $\int_{-١}^{٥} (٢ق(س) - هـ(س))\, ds$؟

٧ إذا كان $\int_{٢}^{٧} ق(س)\, ds = ٣$، وكان $\int_{٣}^{٧} ٣ق(س)\, ds = -٩$، فما قيمة $\int_{٢}^{٣} ٤ق(س)\, ds$؟

تمـــــاريـــن عـــامـــــة

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان ق(س)= $\frac{٢}{س}$ ، س≠٠، فما قيمة قَ(١)؟

أ) -٨ ب) ٨ جـ) ٢ د) -٢

٢. إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) يساوي $\frac{٣}{٢}$ ، وكان Δس=٦، فما قيمة Δص ؟

أ) ٩ ب) ٣ جـ) ١٨ د) ٦

٣. إذا كان ق(س) = (٥س−١) (٢س) ؛ فما قيمة قَ(١) ؟

أ) ٨ ب) ١٠ جـ) ١٨ د) -٧

٤. إذا كان ق(س) = $\frac{٣س^{٢} + ١}{٢ - س}$ ، س≠٢، فما قيمة قَ(٣)؟

أ) ٣٧ ب) -٣٧ جـ) ١٠ د) ١

٥. إذا كان ق(٧) = -٥، هـ(٧) =٢، قَ(٧) =٣، هَ(٧)= -١ فما قيمة (٢ق×٣هـ)َ(٧)؟

أ) ٦٦ ب) -٦ جـ) ٦ د) -١٨

٦. إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة(-١٠، ٥)، فما قيمة قَ(-١٠)؟

أ) ٥ ب) -١٠ جـ) صفر د) ٣

٧. إذا كان قَ(س) ≠ س= ٣س^{٢} − ٤س+جـ، فما قيمة قَ(٢)؟

أ) ١٢ ب) ٤ جـ) -٢ د) ٨

٨. إذا كان ق(س)= $\int_{١}^{٩}$ (٥س^{٣} + ٣س − ٢)^{٥} ds، فما قيمة قَ(٨)؟

أ) ٢٤ ب) ٤٤ جـ) صفر د) ٢

٩. إذا كان $\int_{٥}^{٧}$ ٢ق(س) ds=٦، $\int_{٥}^{١}$ ق(س) ds=٤، فما قيمة $\int_{١}^{٧}$ (٣ق(س)+٢) ds؟

أ) ٣٢ ب) ٩ جـ) ٣٣ د) ٣

١٠. إذا كان ق(س) = $\int_{٣}^{٥}$ (٦ − ٢س) ds، فما قيمة قَ(٤)؟

أ) صفر ب) ٥ جـ) ٣ د) -٤

السؤال الثاني: إذا كان ق(س) = س٣ _ جـ س _ ٦ ، وكانت قَ(٢) = صفر ، أجد قيمة الثابت جـ؟

السؤال الثالث: إذا كان ق(س)= $\int_{ب}^{٥}$ (٢س + ١) ds = ٢٤، أجد قيمة / قيم الثابت ب ؟

السؤال الرابع : إذا كان هـ(س) = ٤س^{٢} − ٨س + ١ :

أ) فما فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س)؟

ب) ما القيم القصوى المحلية للاقتران هـ(س)، وما نوعها؟

إختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية:

١ إذا كان ع (س) = $\frac{٤س^{٢} - ١}{٥س + ٥}$ ، فما قيمة عَ (٠)

أ. $\frac{-٦}{٥}$ ب. $\frac{٦}{٥}$ جـ. $\frac{-٦}{٢٥}$ د. صفر

٢ إذا كان ك(س) = ق(س) - ٥هـ(س)، وكان كَ(٩) = ٧، قَ(٩) = ٢ فما قيمة هـَ(٩)؟

أ. -١ ب. ١ جـ. -٥ د. ٥

٣ إذا كان ص = $\int_{٤}^{٢}$ (٩س^{٢} + ٧) دس فما قيمة $\frac{دص}{دس}$ ؟

أ. ٤ ب. ٣٦ جـ. ١٠٨ د. صفر

٤ إذا كان $\int_{٢}^{٧}$ ٣ق(س) دس = -١٨، وكان $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس = ٩، ما قيمة $\int_{١}^{٧}$ ٢ق(س) دس؟

أ. -٦ ب. ٦ جـ. -٩ د. ٩

٥ إذا كان $\int_{٤}^{٨}$ ٥ق(س) دس = ٣٠ فما قيمة $\int_{٤}^{٨}$ (٢ق(س) + س - ٣) دس؟

أ. ٢٤ ب. صفر جـ. ١٢ د. ٧

٦ إذا كان م = $\int_{-٢}^{٩}$ قَ(س) دس، وكان ق(-٢) = -١٥، ق(٩) = ٣ فما قيمة م؟

أ. صفر ب. -١٨ جـ. ١٨ د. -١٢

٧ إذا كان ق(س) = ٤س^{٢} - ٥، هـ(١) = ٣، هـَ(١) = -٨، فما قيمة (ق × ٢هـ)َ (١)؟

أ. -٦١ ب. ٦٤ جـ. ٨ د. -٦٧

٨ ما قيمة $\int_{٢}^{٣}$ π^{٢} دس؟

أ. π^{٢} ب. ٥π^{٢} جـ. صفر د. ١

٩ ما قيمة $\int_{٩}^{٩} \frac{٣س^{٢} - ٩س}{\sqrt{س^{٥} - ٢}}$ ؟

أ. ٩ ب. صفر جـ. -٩ د. ٥٤

السؤال الثاني: إذا كان $\int (٢س - ق(س))$ دس = $س^{٣} - ٢س^{٢} + ٧س - ٣$، فما قيمة $\int_{٠}^{٢} (٣ق(س))$ دس؟

السؤال الثالث: إذا كان $\int_{٤}^{١-}$ هـ(س) دس = ٩، $\int_{١-}^{٤}$ ٢ق(س) دس = -٨ ، فما قيمة $\int_{١-}^{٤}$ (٢هـ(س) + ق(س)) دس؟

السؤال الرابع: إذا كان متوسط تغير الإقتران ق(س) على [٧ ، ٩] يساوي -٥، فما قيمة متوسط تغير الإقتران ك(س) = س ق(س) + ٢ على [٧ ، ٩] علماً بأنّ ق(٧) = ٤٠؟

السؤال الخامس: يوضح الرسم أدناه إشارة قَ(س) اعتمد عليه في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ. متى يكون الاقتران ق(س) متزايداً؟

ب. متي يكون للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية في مجاله؟

جـ. هل تعتبر النقطة (٣، ق(٣)) نقطة قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)؟ لماذا؟