الجديد

في رياضيات التوجيهي العلمي الجديد

٢٠١٨-٢٠١٩

جمال الشرباتي

القدس

سليم السيقلي

خانيونس

حلول الأسئلة الوزارية وغيرها

في مادة الفصل الأول

الوحدة الأولى

الباب الأول : متوسط التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

أو $\frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ} =$ ميل القاطع الواصل بين النقطتين

مثال : إذا قطع مستقيم منحنى الاقتران $ق(س) =$ جتاس $-$ ٢س في النقطتين $(٠، ق(٠))، \left(\frac{\pi}{٢}، ق(\frac{\pi}{٢})\right)$ احسب :

١- ميل المستقيم

٢- قياس زاوية ميل المستقيم

الحل : ١- ميل المستقيم

$$= \frac{ق(\frac{\pi}{٢}) - ق(٠)}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{\left[جتا\frac{\pi}{٢} - ٢ \times \frac{\pi}{٢}\right] - \left[جتا٠ - ٢ \times ٠\right]}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٠ - \frac{\pi}{٢} - ١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٢(-\pi - ١)}{\pi}$$

٢ – ظا زاوية الميل $= \frac{٢(-\pi - ١)}{\pi}$

مثال : $ق(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ٥$ جد متوسط التغير عندما تتغير س من -٢ إلى ٣

الحل : متوسط التغير $= \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٣) - ق(-٢)}{٣ - -٢}$

$$= \frac{\left[(٣)^٣ - ٢(٣)^٢ + ٥\right] - \left[(-٢)^٣ - ٢(-٢)^٢ + ٥\right]}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

مثال : إذا كان متوسط تغير الاقتران $ق(س) = س^٢ - ٥$ في الفترة $[١، ١+أ]$ يساوي ٩ جد أ

الحل : متوسط التغير $= \frac{ق(١+أ) - ق(١)}{١ + أ - ١} = \frac{\left[(١+أ)^٢ - ٥\right] - \left[(١)^٢ - ٥\right]}{أ} = \frac{٢أ + أ^٢}{أ}$

$$= \frac{أ(٢ + أ)}{أ} = ٢ + أ = ٩ \Leftarrow أ = ٧$$

مثال : إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) = ٧ وكان ق(٢) = ٩ جد ق(٣)

الحل : متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٢)}{٣ - ٢}$

$$٧ = \dfrac{\text{ق}(٣) - ٩}{١} \Leftarrow \text{ق}(٣) - ٩ = ٧ \Leftarrow \text{ق}(٣) = ٧ + ٩ = ١٦$$

مثال : إذا كان متوسط تغير الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س} - ١}$ يساوي $\dfrac{١}{٢}$ عندما تتغير س من ١ إلى أ جد أ

الحل : متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(\text{أ}) - \text{ق}(١)}{\text{أ} - ١}$

$$\dfrac{١}{٢} = \dfrac{\sqrt{٢\text{أ} - ١} - ١}{\text{أ} - ١}$$

$\text{أ} + ١ = ٢\sqrt{٢\text{أ} - ١}$ بالتربيع

$$\text{أ}^{٢} + ٢\text{أ} + ١ = ٤(٢\text{أ} - ١) \Leftarrow \text{أ}^{٢} + ٢\text{أ} + ١ - ٨\text{أ} + ٤ = ٠$$

$\text{أ}^{٢} - ٦\text{أ} + ٥ = ٠ \Leftarrow (\text{أ} - ٥)(\text{أ} - ١)$ إما $\text{أ} = ١$ مرفوض أو $\text{أ} = ٥$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٥$ جد متوسط التغير عندما تتغير س من (١) إلى (١+هـ)

الحل : متوسط التغير $= \dfrac{\text{ق}(١ + \text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ}} = \dfrac{(١ + \text{هـ})^{٢} - ٥ - (١^{٢} - ٥)}{\text{هـ}}$

$$= \dfrac{١ + ٢\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} - ٥ + ٤}{\text{هـ}} = \dfrac{٢\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \dfrac{\cancel{\text{هـ}}(٢ + \text{هـ})}{\cancel{\text{هـ}}} = ٢ + \text{هـ}$$

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير :

متوسط السرعة = $\frac{\text{المسافة النهائية} - \text{المسافة الابتدائية}}{\text{الفترة الزمنية}}$

مثال : يتحرك جسم وفق العلاقة ف$(ن) = ٨ن^{٢} - ٥ن$ **فإذا كانت السرعة المتوسطة في الفترة** $[١ ، أ] = ٢٨\frac{١}{٢}$

جد أ

الحل : $٢٨\frac{١}{٢} = \frac{ف(أ) - ف(١)}{أ - ١} \Leftarrow ٢٨,٥ = \frac{٨أ^{٢} - ٥أ - (٨(١)^{٢} - ٥\times١)}{أ - ١}$

$٢٨,٥ = \frac{٨أ^{٢} - ٥أ - ٣}{أ - ١} \Leftarrow ٢٨,٥أ - ٢٨,٥ = ٨أ^{٢} - ٥أ - ٣$

$٨أ^{٢} - ٣٣,٥أ - ٢٥,٥ = ٠ \Leftarrow ١٦أ^{٢} - ٦٧أ - ٥١ = ٠$

$أ = \frac{٦٧ \pm \sqrt{(٦٧)^{٢} - ٤\times١٦\times٥١}}{٢\times١٦}$

مثال : إذا كان متوسط التغير للاقتران ق$(س) = \sqrt{٣س + ١}$ **عندما تتغير س من صفر إلى** أ **يساوي** $\frac{٣}{٥}$ **جد** أ

الحل : متوسط التغير $= \frac{ق(أ) - ق(٠)}{أ}$

$\frac{٣}{٥} = \frac{\sqrt{٣أ + ١} - \sqrt{١}}{أ}$

$\frac{٣}{٥}أ = \sqrt{٣أ + ١} - ١$

$\frac{٣}{٥}أ + ١ = \sqrt{٣أ + ١}$ بالتربيع

$\frac{٩}{٢٥}أ^{٢} + \frac{٦}{٥}أ + ١ = ٣أ + ١ \Leftarrow \frac{٩}{٢٥}أ^{٢} + \frac{٦}{٥}أ - ٣أ = ٠$

$٩أ^{٢} + ٣٠أ - ٧٥أ = ٠ \Leftarrow ٩أ^{٢} - ٤٥أ = ٠$

$٩أ(أ - ٥) = ٠$ إما $أ = ٠$ مرفوض أو $أ = ٥$

مثال : إذا كان متوسط تغير $ن(س)$ في الفترة $[٢،١٧]$ يساوي ٩ جد متوسط تغير $هـ(س) = ن(س^{٢} + ١)$

في $[١،٤]$

الحل : متوسط التغير $= \dfrac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١} = \dfrac{ن(١٧) - ن(٢)}{٣}$

لكن متوسط تغير $ن = ٩ = \dfrac{ن(١٧) - ن(٢)}{١٧ - ٢} \Leftarrow ن(١٧) - ن(٢) = ٩ \times ١٥ = ١٣٥$

إذن متوسط تغر هـ $= \dfrac{١٣٥}{٣} = ٤٥$

مثال : $ن(س)$ اقتران ، $ن(٣) = ن(٥) + أ$ فإذا كان متوسط تغير $ن(س)$ في الفترة $[٣،٥]$ يساوي ١٠

جد قيمة أ

الحل : متوسط التغير $= \dfrac{ن(٥) - ن(٣)}{٥ - ٣}$

$١٠ = \dfrac{ن(٥) - \left(ن(٥) + أ\right)}{٢} \Leftarrow ٢٠ = ن(٥) - ن(٥) - أ \Leftarrow أ = -٢٠$

مثال : إذا كان متوسط تغير الاقتران $ن(س)$ في الفترة $[١،٢]$ يساوي ٤ ، ومتوسط تغير $ن(س)$ في الفترة $[٢،٥]$ يساوي ٨ ، جد متوسط تغيره في الفترة $[١،٥]$

الحل : $٤ = \dfrac{ن(٢) - ن(١)}{٢ - ١} \Leftarrow \boxed{ن(٢) - ن(١) = ٤} \leftarrow \boxed{١}$

$٨ = \dfrac{ن(٥) - ن(٢)}{٥ - ٢} \Leftarrow ٨ = \dfrac{ن(٥) - ن(٢)}{٣} \Leftarrow \boxed{ن(٥) - ن(٢) = ٢٤} \leftarrow \boxed{٢}$

نجمع المعادلتين $\boxed{١}$ $\boxed{٢}$ ينتج $٢٨ = ن(٥) - ن(١)$

$\dfrac{٢٨}{٤} = \dfrac{ن(٥) - ن(١)}{٥ - ١}$ أذن متوسط التغير في الفترة $[١،٥]$ $= ٧$

الباب الثاني : المشتقة الأولى (معدل التغير)

المشتقة الأولى : إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ فإن

$$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

أو $$\bar{\text{ق}}(\text{س}_١) = \underset{\text{س} \to \text{س}_١}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س} - \text{س}_١}$$

أو $$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

وتسمى معدل التغير ويرمز لها بالرمز $\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}}$ أو $\bar{\text{ص}}$

مثال : إذا كان التغير في الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ يساوي $٥\text{س}^٢\text{هـ} - ٣\text{هـ}^٢\text{س}$ جد $\bar{\text{ق}}(٣)$

الحل : $$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{٥\text{س}^٢\text{هـ} - ٣\text{هـ}^٢\text{س}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{هـ}}(٥\text{س}^٢ - ٣\text{س}\text{هـ})}{\cancel{\text{هـ}}} = ٥\text{س}^٢$$

$$\bar{\text{ق}}(٣) = ٥ \times (٣)^٢ = ٤٥$$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^٢$ جد $\bar{\text{ق}}(\text{س})$ بحسب التعريف

الحل : $$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} - ٢)^٢ - (\text{س} - ٢)^٢}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^٢ - ٤\text{ع} + ٤ - \text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٤}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^٢ - \text{س}^٢ - (٤\text{ع} - ٤\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س}) - ٤(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}\,(\text{ع} + \text{س} - ٤)}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}} = ٢\text{س} - ٤$$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{\text{١١}}{\text{س}}$ جد $\text{قَ}(\text{١١})$ بحسب التعريف

الحل : $\text{قَ}(\text{١١}) = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{١١}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{١١})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{١١}+\text{هـ}+\frac{\text{١١}}{\text{١١}+\text{هـ}} - \left(\text{١١}+\frac{\text{١١}}{\text{١١}}\right)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{(\text{١١}+\text{هـ})^{\text{٢}} + \text{١١} - \text{١٢}(\text{١١}+\text{هـ})}{\text{هـ}(\text{١١}+\text{هـ})} = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{١٢١}} + \text{٢٢هـ} + \text{هـ}^{\text{٢}} + \cancel{\text{١١}} - \cancel{\text{١٣٢}} - \text{١٢هـ}}{\text{هـ}(\text{١١}+\text{هـ})}$

$\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{٢}} + \text{١٠هـ}}{\text{هـ}(\text{١١}+\text{هـ})} = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{هـ}}(\text{هـ}+\text{١٠})}{\cancel{\text{هـ}}(\text{١١}+\text{هـ})} = \frac{\text{١٠}}{\text{١١}}$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{\text{١}}{\text{س}}$ جد $\text{قَ}(\text{٢})$ بحسب التعريف

الحل : $\text{قَ}(\text{٢}) = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{٢}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{٢})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{٢}+\text{هـ}+\frac{\text{١}}{\text{٢}+\text{هـ}} - \left(\text{٢}+\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{(\text{٢}+\text{هـ})^{\text{٢}} + \text{١} - \text{٢,٥}(\text{٢}+\text{هـ})}{\text{هـ}(\text{٢}+\text{هـ})} = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{٤}} + \text{٤هـ} + \text{هـ}^{\text{٢}} + \cancel{\text{١}} - \cancel{\text{٥}} - \text{٢,٥هـ}}{\text{هـ}(\text{٢}+\text{هـ})}$

$\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{٢}} - \text{١,٥هـ}}{\text{هـ}(\text{٢}+\text{هـ})} = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{هـ}}(\text{هـ}-\text{١,٥})}{\cancel{\text{هـ}}(\text{٢}+\text{هـ})} = \frac{-\text{١,٥}}{\text{٢}}$

مثال : إذا كان $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{٤} - \text{ق}(\text{س})}{\text{س}-\text{٢}} = \text{٥}$ جد $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) + \text{٨س}}{\text{س}+\text{٢}}$

الحل : $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{٤} - \text{ق}(\text{س})}{\text{س}-\text{٢}} = - \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{٤}}{\text{س}-\text{٢}}$

$-\text{قَ}(\text{٢}) = \text{٥} \Leftarrow \text{قَ}(\text{٢}) = -\text{٥}$

ولأن $\text{ق}(\text{٢}) = \text{٤}$ أي $\text{ق}(\text{٢}) = \text{٢}^{\text{٢}}$ أي $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}}$

أذن $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) + \text{٨س}}{\text{س}+\text{٢}} = \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٨س}}{\text{س}+\text{٢}} = \frac{\text{٤}+\text{١٦}}{\text{٢}+\text{٢}} = \text{٥}$

مثال : إذا كان $ق(س) = \frac{س}{س-٢}$ جد $ق'(س)$ حسب التعريف

الحل : $$ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{س+هـ}{س+هـ-٢} - \frac{س}{س-٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{(س-٢)(س+هـ) - س(س+هـ-٢)}{(س+هـ-٢)(س-٢)}}{هـ}$$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{\cancel{س^٢} + \cancel{سهـ} - \cancel{٢س} - ٢هـ - \cancel{س^٢} - \cancel{سهـ} + \cancel{٢س}}{هـ(س+هـ-٢)(س-٢)}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٢\cancel{هـ}}{\cancel{هـ}(س+هـ-٢)(س-٢)} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٢}{(س+هـ-٢)(س-٢)} = \frac{-٢}{(س-٢)^٢}$$

قابلية الاشتقاق عند $س_١$

يعتبر الاقتران قابلاً للاشتقاق عند $س_١$ إذا كان $ق'(س_١^+) = ق'(س_١^-)$ (المشتقة من اليمين = المشتقة من اليسار)

مثال : $$ق(س) = \begin{cases} ١ - س^٢ & ، \quad س > ٢ \\ ٣س & ، \quad س \leq ٢ \end{cases}$$

ابحث حسب التعريف في قابلية الاشتقاق عند س = ٢

$$ق'(٢^+) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١-(٢+هـ)^٢ - (١-٢^٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١-٤-٤هـ-هـ^٢+٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٤هـ-هـ^٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(-٤-هـ)}{هـ} = -٤$$

$$ق'(٢^-) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣(٢+هـ) - ٣\times٢}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٦+٣هـ-٦}{هـ} = ٣$$

نلاحظ أن $ق'(٢^+) \neq ق'(٢^-)$ إذن $ق'(٢)$ غير موجودة

الباب الثالث : قواعد الاشتقاق

ملخص القواعد :

١- إذا كان $ق(س) = أ$

فإن $\acute{ق}(س) = ٠$

٢- إذا كان $ق(س) = س^{ن}$

فإن $\acute{ق}(س) = ن\,س^{ن-١}$

٣- إذا كان $ق(س) = أ\,ه(س) + ب\,م(س)$

فإن $\acute{ق}(س) = ق(س) = أ\,\acute{ه}(س) + ب\,\acute{م}(س)$

٤- إذا كان $ق(س) = ق(س) = ه(س) \times م(س)$

فإن $\acute{ق}(س) = ه(س) \times \acute{م}(س) + م(س) \times \acute{ه}(س)$

٥- إذا كان $ق(س) = \frac{ه(س)}{م(س)}$

فإن $\acute{ق}(س) = \frac{م(س) \times \acute{ه}(س) - ه(س) \times \acute{م}(س)}{\left(م(س)\right)^{٢}}$

٦- إذا كان $ق(س) = \frac{أ}{ه(س)}$

فإن $\acute{ق}(س) = \frac{-أ\,\acute{ه}(س)}{\left(ه(س)\right)^{٢}}$

٧- إذا كان $ق(س) = (م \circ ه)(س)$

فإن $\acute{ق}(س) = \acute{م}\left(ه(س)\right) \times \acute{ه}(س)$

٨- إذا كان لدينا $ق(س)$

فإن $\ddot{ق}(س)$ تسمى المشتقة الثانية

مثال : إذا كان $ن(س) = م(س)\left(س^{٢} - ١\right)$ جد $\bar{ن}(٢)$ حيث $م(٢) = ٧$ ، $\bar{م}(٢) = -٩$

الحل : $\bar{ن}(س) = م(س) \times ٢س + \left(س^{٢} - ١\right) \times \bar{م}(س)$ تعديل

$\bar{ن}(٢) = م(٢) \times ٢ \times ٢ + \left((٢)^{٢} - ١\right) \times \bar{م}(٢) = ٤ \times ٧ + ٣ \times -٩ = ٢٨ - ٢٧ = ١$

مثال : إذا كان $ن(س) = س^{٣} - ٢$ جد $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{\bar{ن}(١ + هـ) - \bar{ن}(١)}{هـ}$

الحل : المطلوب هو $\bar{\bar{ن}}(١)$

إذن $\bar{ن}(س) = ٣س^{٢} \Leftarrow \bar{\bar{ن}}(س) = ٦س \Leftarrow \bar{\bar{ن}}(١) = ٦(١) = ٦$ تعديل

مثال : إذا كان $ن(س) = \frac{م(س)}{س^{٢} - ٥}$ وكان $\bar{م}(٢) = -٧$ ، $م(٢) = ٥$ جد $\bar{ن}(٢)$

الحل : $\bar{ن}(س) = \frac{\left(س^{٢} - ٥\right)\bar{م}(س) - م(س) \times ٢س}{\left(س^{٢} - ٥\right)^{٢}}$

$\bar{ن}(٢) = \frac{\left(٢^{٢} - ٥\right)\bar{م}(٢) - م(٢) \times ٢ \times ٢}{\left(٢^{٢} - ٥\right)^{٢}} = \frac{-١ \times -٧ - ٥ \times ٤}{(-١)^{٢}} = \frac{٧ - ٢٠}{١} = -١٣$

مثال : إذا كان $ن(س) = أس^{٣} + ٣ب س^{٢}$ وكان $\bar{ن}(٢) = ٩$ ، $\bar{\bar{\bar{ن}}}(س) = ٦$ جد أ، ب

($\bar{\bar{\bar{ن}}}(س)$ تكتب $ن^{(٣)}(س)$ احياناً)

الحل : $\bar{ن}(س) = ٣أس^{٢} + ٦ب س$

$\bar{\bar{ن}}(س) = ٦أس + ٦ب$

$\bar{\bar{\bar{ن}}}(س) = ٦أ$

$٦أ = ٦ \Leftarrow أ = ١$

$\bar{ن}(٢) = ٦أ(٢)^{٢} + ٦ب \times ٢$

$٩ = ١٢ \times ١ + ١٢ب \Leftarrow ٩ - ١٢ = ١٢ب \Leftarrow -٣ = ١٢ب \Leftarrow ب = \frac{-٣}{١٢} \Leftarrow ب = \frac{-١}{٤}$

مثال : إذا كان $ق(س) = أ س^{٢} + ٢ب س$ وكان $ق''(س) = ٨$ جد أ

الحل : $ق'(س) = ٢أ س + ٢ب$

$ق''(س) = ٢أ \Leftarrow ٢أ = ٨ \Leftarrow أ = ٤$

مثال : إذا كان $ل(س) = (س+١)(٢س+١)(٣س+٥)$ جد $ل'(س)$

الحل : $ل(س) = \left(٢س^{٢} + ٣س + ١\right)(٣س+٥)$

$ل'(س) = \left(٢س^{٢} + ٣س + ١\right) \times ٣ + (٣س+٥)(٤س+٣)$

$ل'(س) = ٦س^{٢} + ٩س + ٣ + ١٢س^{٢} + ٢٩س + ١٥$

$= ١٨س^{٢} + ٣٨س + ١٨$

مثال : إذا كان $م(س) = (٣س+٢)\dfrac{(س-٣)}{(٢س-١)}$ جد $م'(س)$

الحل : $م(س) = \dfrac{٣س^{٢} - ٧س - ٦}{٢س - ١}$

$م'(س) = \dfrac{(٢س-١)(٦س-٧) - \left(٣س^{٢} - ٧س - ٦\right)\times ٢}{(٢س-١)^{٢}}$

$م'(س) = \dfrac{١٢س^{٢} - ٢٠س + ٧ - ٦س^{٢} + ١٤س + ١٢}{(٢س-١)^{٢}}$

$= \dfrac{٦س^{٢} - ٦س + ١٩}{(٢س-١)^{٢}}$

مثال : إذا كان $ق(س) = أ س^{٢} + ب س + ٢$ وكان $ق'(١) = ٧$ ، $ق(١) = ٧$ جد أ، ب

الحل : $ق(١) = ٧ = أ + ب + ٢ \Leftarrow \boxed{أ + ب = ٥} \leftarrow \boxed{١}$

$ق'(س) = ٢أ س + ب \Leftarrow ق'(١) = ٧ = ٢أ + ب \Leftarrow \boxed{٢أ + ب = ٧} \leftarrow \boxed{٢}$

بحل المعادلتين $\boxed{١}$ و $\boxed{٢}$ ينتج $أ = ٢$ ، $ب = ٣$

الباب الرابع : مشتقة الاقترانات المثلثية

القواعد :

١- $ق(س) = جاس$

فإن $قَ(س) = جتاس$

٢- $ق(س) = جتاس$

فإن $قَ(س) = -جاس$

٣- $ق(س) = ظاس$

فإن $قَ(س) = قا^{٢}س$

٤- $ق(س) = ظتاس$

فإن $قَ(س) = -قتا^{٢}س$

٥- $ق(س) = قاس$

فإن $قَ(س) = قاس ظاس$

٦- $ق(س) = قتاس$

فإن $قَ(س) = -قتاس ظتاس$

مثال : أثبت أنه $ص = ظاس$ فإن $\frac{دص}{دس} = قا^{٢}س$

الحل : $ص = \frac{جاس}{جتاس} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{جتاس \times جتاس - جاس \times -جاس}{(جتاس)^{٢}}$

$$= \frac{جتا^{٢}س + جا^{٢}س}{(جتاس)^{٢}} = \frac{١}{(جتاس)^{٢}} = قا^{٢}س$$

مثال : إذا كان $ص = قاس + ظاس$ جد $\frac{صَ}{ص}$

الحل : $صَ = قاس ظاس + قا^{٢}س = قاس(ظاس + قاس)$

$$\frac{صَ}{ص} = \frac{قاس(ظاس + قاس)}{قاس + ظاس} = قاس$$

مثال : إذا كان ص = أ جا٢س − ب جتا٢س أثبت أن $(\bar{ص})^٢ + ٤ص^٢ = ٤أ^٢ + ٤ب^٢$

الحل : $\bar{ص} = ٢(أ جتا٢س) − ٢(− ب جا٢س)$

$= ٢أ جتا٢س + ٢ب جا٢س$

ملاحظة : $(جتا٢س)\bar{} = − جا٢س × ٢$

$\bar{ص}^٢ = ٤أ^٢ جتا^٢ ٢س + ٨أب جتا٢س جا٢س + ٤ب^٢ جا^٢ ٢س$

$ص^٢ = أ^٢ جا^٢ ٢س − ٢أب جا٢س جتا٢س + ب^٢ جتا^٢ ٢س$

$\Leftarrow ٤ص^٢ = ٤أ^٢ جا^٢ ٢س − ٨أب جا٢س جتا٢س + ٤ب^٢ جتا^٢ ٢س$

نجمع $٤ص^٢ + \bar{ص}^٢$

$= ٤أ^٢ جا^٢ ٢س − \cancel{٨أب جا٢س جتا٢س} + ٤ب^٢ جتا^٢ ٢س + ٤أ^٢ جتا^٢ ٢س + \cancel{٨أب جتا٢س جا٢س} + ٤ب^٢ جا^٢ ٢س$

$= ٤أ^٢ جا^٢ ٢س + ٤ب^٢ جتا^٢ ٢س + ٤أ^٢ جتا^٢ ٢س + ٤ب^٢ جا^٢ ٢س$

$= ٤أ^٢ (جا^٢ ٢س + جتا^٢ ٢س) + ٤ب^٢ (جا^٢ ٢س + جتا^٢ ٢س)$

ولكن $جا^٢ ٢س + جتا^٢ ٢س = ١$ أذن $= ٤أ^٢ + ٤ب^٢$

يمكن أن نعمم ونقول ق(س) = جاس فإن $\bar{ق}$(س) = أ جتاس و هكذا ....

قوانين مثلثية :

$جتا^٢ س + جا^٢ س = ١$ $١ + ظا^٢ س = قا^٢ س$ $١ + ظتا^٢ س = قتا^٢ س$

جا٢س = ٢جاس جتاس

$$جتا٢س = \begin{cases} ١ - ٢جا^٢ س \\ ٢جتا^٢ س - ١ \\ جتا^٢ س - جا^٢ س \end{cases}$$

$جتا(\pi − س) = − جتاس$ $جا(\pi − س) = جاس$

$جتا(\frac{\pi}{٢} − س) = جاس$ $جا(\frac{\pi}{٢} − س) = جتاس$

$ظا(\pi − س) = − ظاس$ $ظا(\frac{\pi}{٢} − س) = ظتاس$

$جتا(أ \pm ب) = جاأ جتاب \pm جتاأ جاب$

الباب الخامس : قاعدة لوبيتال ومشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي

قاعدة لوبيتال : إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للأشتقاق عند س = أ

وكان $\lim\limits_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{٠}{٠}$ ، $\lim\limits_{س \to أ} \frac{ق'(س)}{هـ'(س)} = ل$ فإن $\lim\limits_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = ل$

مثال : جد $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ باستخدام قاعدة لوبيتال

الحل : نشتق كل من البسط والمقام $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٢س}{١} = ٢ \times ١ = ٢$

مثال : جد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظاس}{س}$ باستخدام قاعدة لوبيتال

الحل : نشتق كل من البسط والمقام $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{قا^٢س}{١} = قا^٢(٠) = \frac{١}{جتا^٢(٠)} = ١$

ملاحظة : العدد النيبيري هـ = ٢٫٧١٨٢٨١٨

يحقق العلاقة $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{هـ^س - ١}{س}$

خصائص هـ^س :

١- $هـ^س \times هـ^ص = هـ^{س+ص}$

٢- $\frac{هـ^س}{هـ^ص} = هـ^{س-ص}$

٣- $\left(هـ^س\right)^ص = هـ^{سص}$

٤- $هـ^٠ = ١$

٥- $هـ^{لو_هـ س} = س$

خصائص الاقتران اللوغاريتمي :

١- $لــو_{هـ} س ص = لــو_{هـ} س + لــو_{هـ} ص$

٢- $لــو_{هـ} \frac{س}{ص} = لــو_{هـ} س - لــو_{هـ} ص$

٣- $لــو_{هـ} س^{ن} = ن لــو_{هـ} س$

٤- $لــو_{هـ} هـ^{س} = س$

قاعدة (١) : إذا كان $ص = هـ^{س}$ فإن $لــو_{هـ} ص = س$

قاعدة (٢) : إذا كان $ق(س) = هـ^{س}$ فإن $\bar{ق}(س) = هـ^{س}$

قاعدة (٣) : إذا كان $ص = لــو_{هـ} س$ فإن $\bar{ق}(س) = \frac{١}{س}$

مثال : إذا كان $ص = هـ^{س} قاس$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل : $\frac{دص}{دس} = هـ^{س} قاس ظاس + قاس هـ^{س} = هـ^{س} قاس \left(ظاس + ١ \right)$

مثال : إذا كان $ص = هـ^{س} ظاس$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل : $\frac{دص}{دس} = هـ^{س} قا^{٢} س + ظاس هـ^{س}$

مثال : إذا كان $ق(س) = \frac{ظاس}{هـ^{س}}$ جد $\bar{ق}(س)$

الحل : $\bar{ق}(س) = \frac{هـ^{س} قا^{٢} س - ظاس هـ^{س}}{\left(هـ^{س} \right)^{٢}}$

مثال : إذا كان $ص = \frac{هـ^{س}}{ظاس}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل : $\frac{دص}{دس} = \frac{ظاس هـ^{س} - هـ^{س} قا^{٢}س}{(ظاس)^{٢}} = \frac{هـ^{س}(ظاس - قا^{٢}س)}{(ظاس)^{٢}}$

مثال : إذا كان $ص = لـو_{هـ} \sqrt[٣]{س}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل : $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}} \times \frac{١}{٣} س^{\frac{-٢}{٣}} = \frac{١}{٣س^{\frac{١}{٣}} \times س^{\frac{-٢}{٣}}} = \frac{١}{٣س}$

ملاحظة : $ص = لـو_{هـ}(هـ(س))^{ن}$ فإن $صَ = لـو_{هـ}(هـ(س))^{ن-١} \times \frac{١}{هـ(س)}$

مثال : $ص = (هـ^{س} - ٣)(هـ^{س} + ٣)$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل : $ص = هـ^{٢س} - ٩$

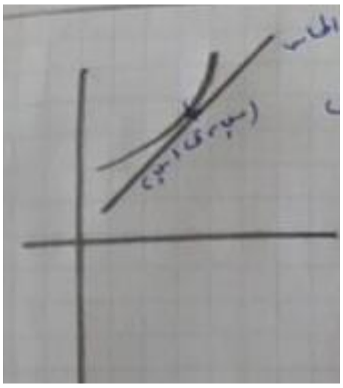
$\frac{دص}{دس} = هـ^{٢س} \times ٢ = ٢هـ^{٢س}$

ملاحظة : $ص = هـ^{م(س)}$ فإن $\frac{دص}{دس} = هـ^{م(س)} \times مَ(س)$

مثال : $ص = س^{٢} هـ^{٣س}$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل : $\frac{دص}{دس} = س^{٢} \times هـ^{٣س} \times ٣ + هـ^{٣س} \times ٢س = سهـ^{٣س}(٣س + ٢)$

الباب السادس : تطبيقات هندسية وفيزيائية



الهندسة : $\text{ق}(\text{س})$ اقتران قابل للاشتقاق عند $\left(\text{س}_{١}، \text{ق}(\text{س}_{١})\right)$

ميل المماس $= \text{ق}'(\text{س}_{١})$

معادلة المماس : $\left(\text{ص} - \text{ص}_{١}\right) = \text{م}\left(\text{س} - \text{س}_{١}\right)$

ميل العمودي = - $\dfrac{1}{\text{ميل المماس}}$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣}{٣\text{س} + ١}$ **جد :**

١- ميل المماس عندما س = ١

٢- معادلة المماس عند س = ١

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{(٣\text{س}+١)(٢\text{س}) - \left(\text{س}^{٢} - ٣\right)(٣)}{(٣\text{س}+١)^{٢}}$

١- الميل $= \text{ق}'(١) = \dfrac{(٣+١)(٢) - \left(١^{٢} - ٣\right)(٣)}{(٣+١)^{٢}} = \dfrac{٨+٦}{١٦} = \dfrac{١٤}{١٦} = \dfrac{٧}{٨}$

$\text{ص} = \text{ق}(١) = \dfrac{(١)^{٢} - ٣}{٣ \times ١ + ١} = \dfrac{-٢}{٥}$

٢- معادلة المماس $\text{ص} = \text{م}\left(\text{س} - \text{س}_{١}\right) + \text{ص}_{١}$

$\text{ص} = \dfrac{٧}{٨}(\text{س} - ١) + \dfrac{-٢}{٥} \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = \dfrac{٧}{٨}\text{س} - \dfrac{٧}{٨} + \dfrac{-٢}{٥}$

$\Leftarrow \text{ص} = \dfrac{٧}{٨}\text{س} - \dfrac{٣٥+١٦}{٤٠} \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = \dfrac{٧}{٨}\text{س} - \dfrac{٥١}{٤٠}$

مثال : إذا كان المستقيم $ص - ٣س - ٢ = ٠$ مماساً لمنحنى $ق(س)$ عند النقطة $(١، ق(١))$ جد

$$\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{ق(١ + ٥هـ) - ٥}{هـ}$$

الحل : نرتب $ص - ٣س - ٢ = ٠ \quad \Leftarrow \quad ص = ٣س + ٢$

إذن ميل المماس = ٣

إذن $قَ(١) = ٣$

$ق(١) \Leftarrow$ نعوض س في معادلة المستقيم بقيمة (١) $= ٣ \times ١ + ٢ = ٥$

المطلوب $= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{ق(١ + ٥هـ) - ق(١)}{هـ} \qquad [٥ = ق(١)]$

نفرض $٥هـ = و \quad \Leftarrow \quad هـ = \frac{و}{٥}$ ، $هـ \leftarrow ٠ \quad \Leftarrow \quad و \leftarrow ٠$

المطلوب $= \underset{و \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{ق(١ + و) - ق(١)}{\frac{و}{٥}} = ٥ قَ(١) = ٥ \times ٣ = ١٥$

مثال : إذا كان المماس لمنحنى الاقتران المطلوب $ق(س) = \left(س + \frac{٢}{س}\right)^٣$ عند $س = ٢$ يمر بالنقطة $(أ، ٠)$ احسب قيمة أ

الحل : $ق(٢) = \left(٢ + \frac{٢}{٢}\right)^٣ = (٣)^٣ = ٢٧ \Leftarrow (٢، ٢٧)$ نقطة التماس

$قَ(س) = ٣\left(س + \frac{٢}{س}\right)^٢ \left(١ + \frac{-٢}{س^٢}\right)$ حسب قانون السلسلة

ميل المماس $= قَ(٢) = ٣\left(٢ + \frac{٢}{٢}\right)^٢ \left(١ + \frac{-٢}{٢^٢}\right) = ٣ \times ٩ \times \frac{١}{٢} = \frac{٢٧}{٢} = ١٣,٥$

معادلة المماس $ص = م(س - س_١) + ص_١$

$ص = ١٣,٥(س - ٢) + ٢٧ \quad \Leftarrow \quad ص = ١٣,٥س$

النقطة $(أ، ٠)$ تحقق المعادلة $\Leftarrow ٠ = ١٣,٥أ \quad \Leftarrow \quad أ = ٠$

قاعدة السلسلة : $ق(س) = [هـ(س)]^ن$ فإن $قَ(س) = ن[هـ(س)]^{ن-١} \times هـَ(س)$

مثال : جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) = س^{٢} + س والذي يوازي المستقيم ص – ٥س = ٣

الحل : نرتب ص = ٥س + ٣

الميل = ٥

قَ(س) = ٢س + ١

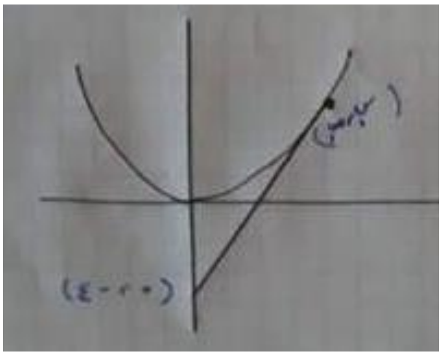
٢س + ١ = ٥ ⇐ ٢س = ٥ − ١ = ٤ ⇐ س = ٢

ص = ق(٢) = (٢)^{٢} + ٢ = ٤ + ٢ = ٦

معادلة المماس ص = م(س − س$_{١}$) + ص$_{١}$

ص = ٥(س − ٢) + ٦ ⇐ ص = ٥س − ١٠ + ٦ ⇐ ص = ٥س − ٤

مثال : جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} من النقطة (٠، −٤) الواقعة خارج المنحنى



الحل : قَ(س) = ٢س

٢س = $\frac{\text{ص} - -٤}{\text{س} - ٠}$ ⇐ ٢س^{٢} = ص + ٤

٢س^{٢} = س^{٢} + ٤ ⇐ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ±٢

ميل المماس ٢س = ٢ × ٢ = ٤

معادلة المماس ص = م(س − س$_{١}$) + ص$_{١}$

ص = ٤(س − ٢) + ٤ ⇐ ص = ٤س − ٨ + ٤ ⇐ ص = ٤س − ٤

مثال : إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٥، ٤) الواقعة عليه تساوي ٤س – ٣ص = ٨

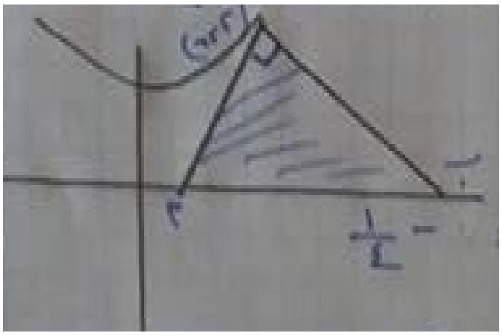
جد قَ(٥)

الحل : نرتب معادلة العمودي ٣ص = ٤س − ٨ ⇐ ص = $\frac{٤}{٣}$س − $\frac{٨}{٣}$

ميل العمودي = $\frac{٤}{٣}$ ⇐ **ميل المماس =** $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$

ميل المماس = $\frac{-١}{\frac{٤}{٣}}$ = $\frac{-٣}{٤}$ = قَ(٥)

مثال : رسم مماس وعمودي على المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٢$ **عند النقطة** $(٢،٦)$ **الواقعة عليه فقطعا محور السينات في النقطتين أ،ب جد طول أب**



الحل : $ق(س) = س^{٢} + ٢ \quad \Leftarrow \quad قَ(س) = ٢س$

الميل عند النقطة $(٢،٦) \quad \Leftarrow \quad م = ٢ \times ٢ = ٤$

معادلة المماس $ص = م(س - س_{١}) + ص_{١}$

$ص = ٤(س - ٢) + ٦ \quad \Leftarrow \quad ص = ٤س - ٨ + ٦ \quad \Leftarrow \quad ص = ٤س - ٢$

عندما ص = ٠ $\quad \Leftarrow \quad ٠ = ٤س - ٢ \quad \Leftarrow \quad ٤س = ٢ \quad \Leftarrow \quad س = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

إذن احداثيات أ $\left(\frac{١}{٢}، ٠\right)$

معادلة العمودي :

ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-١}{٤} = -\frac{١}{٤}$

معادلة العمودي $ص = م(س - س_{١}) + ص_{١}$

$ص = -\frac{١}{٤}(س - ٢) + ٦ \quad \Leftarrow \quad ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{١}{٢} + ٦ \quad \Leftarrow \quad ص = -\frac{١}{٤}س + \frac{١٣}{٢}$

عندما ص = ٠ $س = ٢٦$

إذن احداثيات ب $(٢٦، ٠)$

المسافة $أب = ٢٦ - \frac{١}{٢} = ٢٥{,}٥$

مثال : إذا كانت معادلة العمودي $٢ص + ٣س - ٧ = ٠$ **عند النقطة** $(-٣، ٨)$ **جد** $٦ قَ(-٣)$

الحل : نرتب معادلة العمودي $٢ص = -٣س + ٧ \quad \Leftarrow \quad ص = \frac{-٣}{٢}س + \frac{٧}{٢}$

ميل العمودي $= \frac{-٣}{٢} \quad \Leftarrow$ **ميل المماس =** $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}} = \frac{-١}{\frac{-٣}{٢}} = \frac{٢}{٣} = قَ(-٣)$

إذن $٦ قَ(-٣) = ٦ \times \frac{٢}{٣} = ٤$

مثال : إذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢}+٩}{س}$ جد معادلة المماس له والذي يوازي المستقيم المار بالنقطتين $(٢، -٤)$ ، $(١، ٤)$

الحل : $\bar{ق}(س) = \frac{س \times ٢س - (س^{٢}+٩)\times ١}{س^{٢}} = \frac{س^{٢}+٩}{س^{٢}}$

ميل المستقيم المعلوم $\frac{٤ - -٤}{١ - ٢} = \frac{٨}{-١} = -٨$

إذن $-٨ = \frac{س^{٢}+٩}{س^{٢}} \Leftarrow س^{٢}+٩ = -٨س^{٢} \Leftarrow -٩س^{٢} = -٩$

$س^{٢} = ١ \Leftarrow س = ١$ ، $س = -١$ مرفوض

$ق(١) = \frac{(١)^{٢}+٩}{١} = ١٠$ النقطة $(١، ١٠)$

معادلة المماس $ص = م(س - س_{١}) + ص_{١}$

$ص = -٨(س - ١) + ١٠ \Leftarrow ص = -٨س + ٨ + ١٠ \Leftarrow ص = -٨س + ١٨$

تطبيقات فيزيائية :

إذا كانت المسافة ف $\Leftarrow$ اقتران مع الزمن ن

فإن $\frac{دف}{دن}$ = السرعة (ع) ، $\frac{دع}{دن}$ = التسارع (ت)

مثال : يتحرك جسم وفق العلاقة $ف = ١٢ن - ٨ن^{٢}$ جد

١- سرعته بعد ٣ ث

٢- تسارعه بعد ٣ ث

الحل : ١- السرعة $= \frac{دف}{دن} = ١٢ - ١٦ن$

السرعة بعد ٣ ث $= ١٢ - ١٦ \times ٣ = ١٢ - ٤٨ = -٣٦$ م/ث

٢- التسارع $= \frac{دف}{دن} = ١٢ - ١٦ن$ م/ث^{٢}

مثال : قذف جسم رأسياً إلى أعلى بحيث أن ارتفاعه عن نقطة القذف معطى بالعلاقة $ف = ١٢٨ن - ١٦ن^٢$ جد :

١- اقصى ارتفاع يصل اليه
٢- سرعة الجسم بعد قطعه مسافة ٢٧٢ م

الحل : ١- $ع = \frac{دف}{دن} = ١٢٨ - ٣٢ن$

(ع = ٠ عند أقصى ارتفاع) $\Leftarrow ١٢٨ - ٣٢ن = ٠ \Leftarrow ١٢٨ = ٣٢ن \Leftarrow ن = \frac{١٢٨}{٣٢} = ٤ث$

$ف = ١٢٨ن - ١٦ن^٢ = ١٢٨ \times ٤ - ١٦(٤)^٢ = ٢٥٦م$

٢- عندما يكون قد قطع ٢٧٢ م

٢٧٢ ـ ٢٥٦ = ١٦ م يكون هابطاً أي ارتفاعه عن الأرض انذاك ٢٥٦ ـ ١٦ = ٢٤٠ م

$ف = ١٢٨ن - ١٦ن^٢ \Leftarrow ٢٤٠ = ١٢٨ن - ١٦ن^٢$ بالقسمة على ١٦

$١٥ = ٨ن - ن^٢ \Leftarrow ن^٢ - ٨ن + ١٥ = ٠$

$(ن - ٥)(ن - ٣) = ٠ \Leftarrow ن = ٥$ ، $ن = ٣$ مرفوض

إذن $ع = ١٢٨ - ٣٢ \times ٥ = -٣٢ م/ث$

مثال : قذف جسم رأسياً إلى أعلى حيث ارتفاع $ف = ٨٠ن - ١٦ن^٢$ جد زمن وصوله لأقصى ارتفاع

الحل : $ف = ٨٠ن - ١٦ن^٢$

$ع = ٨٠ - ٣٢ن$ (عند أقصى ارتفاع ع = ٠)

إذن $٨٠ - ٣٢ن = ٠ \Leftarrow ٨٠ = ٣٢ن \Leftarrow ن = ٢,٥ث$

مثال : قذف جسمان معاً رأسياً إلى الأعلى الأول وفق العلاقة $ف = ٢٠ن - ٥ن^٢$ الثاني وفق العلاقة $ف = ١٠ن - ٥ن^٢$ جد ارتفاع الثاني عندما يصل الأول إلى أقصى ارتفاع

الحل : $ف = ٢٠ن - ٥ن^٢$

$\frac{دف}{دن} = ٢٠ - ١٠ن$

$٢٠ - ١٠ن = ٠ \Leftarrow ن = ٢ث$

$ف_{الثاني} = ١٠ن - ٥ن^٢ = ١٠ \times ٢ - ٥(٢)^٢ = ٢٠ - ٢٠ = ٠$ (كأنه يعود للأرض)

مثال : أطلق جسم رأسياً للأعلى من قمة برج حسب العلاقة $\text{ف} = 24 + 64\text{ن} - 16\text{ن}^2$ جد أقصى ارتفاع يصله الجسم

الحل : $\text{ف} = 24 + 64\text{ن} - 16\text{ن}^2$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = 64 - 32\text{ن}$ (عند أقصى ارتفاع ع = ٠)

$\text{ع} = 64 - 32\text{ن} = 0 \Leftarrow 64 = 32\text{ن} \Leftarrow \text{ن} = 2\text{ث}$

$\text{ف} = 24 + 64 \times 2 - 16 \times 4 = 64\text{م}$

مثال : قذف جسم رأسياً حسب العلاقة $\text{ف} = \text{أن} - 5\text{ن}^2$ وكان اقصى ارتفاع وصله ١٢٥ م جد :

١- الثابت أ
٢- السرعة الابتدائية
٣- المسافة في أول ٦ ث

الحل : ١- $\text{ف} = \text{أن} - 5\text{ن}^2 \Leftarrow \text{ع} = \text{أ} - 10\text{ن}$ (عند أقصى ارتفاع ع = ٠)

$\text{أ} - 10\text{ن} = 0 \Leftarrow \text{أ} = 10\text{ن}$

$125 = \text{أن} - 5\text{ن}^2 \Leftarrow 125 = 10\text{ن} \times \text{ن} - 5\text{ن}^2 \Leftarrow 125 = 10\text{ن}^2 - 5\text{ن}^2$

$125 = 5\text{ن}^2 \Leftarrow \text{ن}^2 = \frac{125}{5} = 25 \Leftarrow \text{ن} = 5\text{ث}$

$\Leftarrow \text{أ} = 10 \times 5 = 50$

٢- السرعة الابتدائية (ن = ٠)

$\text{ع} = 50 - 10 \times 0 = 50 \ \text{م/ث}$

٣- المسافة في أول ٦ ث

$\text{ف} = 50\text{ن} - 5\text{ن}^2 = 50 \times 6 - 5 \times 36 = 300 - 180 = 120\text{م}$

مثال : إذا كان $\text{ف} = 8\text{ن}^2 - \text{ن}^3$ جد التسارع عندما يغير من اتجاه حركته

الحل : $\text{ع} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = 16\text{ن} - 3\text{ن}^2$

$16\text{ن} - 3\text{ن}^2 = 0 \Leftarrow \text{ن}(16 - 3\text{ن}) = 0$

إما $\text{ن} = 0$ أو $\text{ن} = \frac{16}{3}$

التسارع $= 16 - 6\text{ن} \Leftarrow 16 - 6 \times \frac{16}{3} = -16 \ \text{م/ث}^2$

مثال : برج يرتفع ٥٠ م ، أطلق منه جسم للأعلى $ف = ١٥ن - ٥ن^{٢}$ **جد :**

1. **الزمن اللازم ليكون الجسم على ارتفاع ٦٠ م عن سطح الأرض**
2. **اقصى ارتفاع**

الحل : ١- $ف = ١٥ن - ٥ن^{٢} + ٥٠$

$٦٠ = ١٥ن - ٥ن^{٢} + ٥٠ \Leftarrow ٥ن^{٢} - ١٥ن + ١٠ = ٠$ **بالقسمة على ٥**

$ن^{٢} - ٣ن + ٢ = ٠ \Leftarrow (ن - ٢)(ن - ١) = ٠$

$ن = ٢ث$ ، $ن = ١ث$

٢- عند اقصى ارتفاع ع = ٠

$\frac{دف}{دن} = ع = ١٥ - ١٠ن$

$١٥ - ١٠ن = ٠ \Leftarrow ١٠ن = ١٥ \Leftarrow ن = ١,٥ث$

اقصى ارتفاع $= ١٥ \times ١,٥ - ٥(١,٥)^{٢} = ١١,٢٥م$

اقصى ارتفاع عن سطح الأرض $= ١١,٢٥ + ٥٠ = ٦١,٢٥م$

الباب السابع : قاعدة السلسلة :

صور القاعدة :

١- إذا كان $ص = ق(ع)$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دع} = قَ(ع)$

وكان $ع = ق(س)$ $\Leftarrow$ $\frac{دع}{دس} = قَ(س)$

فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

٢- إذا كان $ص = [ق(س)]^{ن}$

فإن $\frac{دص}{دس} = ن[ق(س)]^{ن-١} \times قَ(س)$

٣- إذا كان لدينا $ق(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانان

فإن $(ق \circ هـ)َ(س) = قَ(هـ(س)) \times هـَ(س)$

٤- إذا كان $ق(س) = هـ^{م(س)}$

فإن $قَ(س) = هـ^{م(س)} \times مَ(س)$

٥- إذا كان $ق(س) = لو_{هـ}[م(س)]$

فإن $قَ(س) = \frac{مَ(س)}{م(س)}$

مثال : إذا كان $ل(س) = س\,ق(س^{٢})$ وكان $لَ(٢) = ٣$ ، $ق(٤) = ٦$ جد $قَ(٤)$

الحل : $لَ(س) = س\,قَ(س^{٢}) \times ٢س + ق(س^{٢}) \times ١$

$لَ(٢) = ٣ = ٢ \times قَ(٤) \times ٢ \times ٢ + ق(٤) \times ١$ $\Leftarrow$ $٣ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times قَ(٤) + ٦$

$٣ - ٦ = ٨قَ(٤)$ $\Leftarrow$ $٨قَ(٤) = -٣$ $\Leftarrow$ $قَ(٤) = \frac{-٣}{٨}$

مثال : إذا كان $ن(س) = لـو_{هـ}\left(س^{٢} - ١\right)$ جد $نَ(س)$

الحل : $نَ(س) = \dfrac{٢س}{س^{٢} - ١}$

مثال : إذا كان $ن(س) = هـ^{(س^{٢}-٣)}$ جد $نَ(س)$

الحل : $نَ(س) = هـ^{(س^{٢}-٣)} \times ٢س$

مثال : إذا كان $ن(س) = جتا^{٢}٣س$ جد $نَ(س)$

الحل : $نَ(س) = ٢جتا٣س \times -جا٣س \times ٣ = -٦\,جتا٣س\,جا٣س$

مثال : إذا كان $ك(س) = ن(س^{٢} - ٣س) \times س^{٣}$ وكان $كَ(٣) = ١٢$ ، $نَ(٠) = ٤$ جد $ن(٠)$

الحل : $كَ(س) = ن(س^{٢} - ٣س) \times ٣س^{٢} + س^{٣} \times نَ(س^{٢} - ٣س) \times (٢س - ٣)$

$كَ(٣) = ن(٣^{٢} - ٣ \times ٣) \times ٣ \times ٣^{٢} + (٣)^{٣} \times نَ(٣^{٢} - ٣ \times ٣) \times (٢ \times ٣ - ٣)$

$١٢ = ن(٠) \times ٢٧ + ٢٧ \times ٣ \times نَ(٠) \Leftarrow ١٢ = ٢٧ن(٠) + ٨١ \times ٤$

$١٢ = ٢٧ن(٠) + ٣٢٤ \Leftarrow ١٢ - ٣٢٤ = ٢٧ن(٠)$

$\Leftarrow ٢٧ن(٠) = -٣١٢ \Leftarrow ن(٠) = \dfrac{-٣١٢}{٢٧}$

مثال : إذا كان $ن(س) = \dfrac{ك(س)}{\sqrt{س^{٢} - ٥}}$ وكان $كَ(٤) = ٧$ ، $ك(٤) = -٥$ جد $نَ(٤)$

الحل : $نَ(س) = \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ٥} \times كَ(س) - ك(س) \times \frac{١}{٢}\left(س^{٢} - ٥\right)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢س}{س^{٢} - ٥}$

$نَ(٤) = \dfrac{\sqrt{١٦ - ٥} \times كَ(٤) - ك(٤) \times \frac{١}{٢}(١٦ - ٥)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ \times ٤}{١٦ - ٥}$

$= \dfrac{٣ \times ٧ - -٥ \times \frac{٤}{٣}}{٩} = \dfrac{٢١ + \frac{٢٠}{٣}}{٩} = \dfrac{٨٣}{٢٧}$

مثال : إذا كان ص = جتاهـ ، س = قتاهـ أثبت أن $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ص\frac{دص}{دس} = ٠$

الحل : $\frac{دص}{دس} = جتاهـ$

$\frac{دس}{دهـ} = -قتاهـظتاهـ = \frac{-جتاهـ}{جا^{٢}هـ} \quad \Leftarrow \quad \frac{دهـ}{دس} = \frac{-جا^{٢}هـ}{جتاهـ}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دهـ} \times \frac{دهـ}{دس} = جتاهـ \times \frac{-جا^{٢}هـ}{جتاهـ} = -جا^{٢}هـ$

نفرض أن ل $= \frac{دص}{دس}$ المطلوب $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$

لذلك $\frac{دل}{دس} = \frac{دل}{دهـ} \times \frac{دهـ}{دس} = -٢جاهـجتاهـ \times \frac{-جا^{٢}هـ}{جتاهـ}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢جا^{٣}هـ$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ص\frac{دص}{دس} = ٢جا^{٣}هـ + ٢جاهـ\left(-جا^{٢}هـ\right) = ٠$

مثال : إذا كان $(ق \circ هـ)'(٢) = ٢٧$ ، $ق(س) = س^{٢} - ٥س$ ، $هـ'(٢) = ٣$ جد $هـ(٢)$

الحل : $(ق \circ هـ)'(٢) = ق'\left(هـ(٢)\right) \times هـ'(٢)$

$ق'(س) = ٢س - ٥$

إذن $٢٧ = ق'\left(هـ(٢)\right) \times هـ'(٢) \quad \Leftarrow \quad ٢٧ = \left(٢هـ(٢) - ٥\right) \times ٣$

$٢٧ = ٦هـ(٢) - ١٥ \quad \Leftarrow \quad ٤٢ = ٦هـ(٢) \quad \Leftarrow \quad هـ(٢) = \frac{٤٢}{٦} = ٧$

مثال : إذا كان $(ق \circ هـ)'(٣) = ٨$ وكان $(ق' \circ هـ)(٣) = ٢$ جد $هـ'(٣)$

الحل : $(ق \circ هـ)'(٣) = ق'\left(هـ(٣)\right) \times هـ'(٣) = ٨ \leftarrow \boxed{١}$

$(ق' \circ هـ)(٣) = ق'\left(هـ(٣)\right) = ٢ \leftarrow \boxed{٢}$ بقسمة المعادلة $\boxed{١}$ على $\boxed{٢}$

$هـ'(٣) = \frac{٨}{٢} = ٤$

مثال : إذا كان $ن(س) = س^٣ + ٢$ ، $هـ(س) = س^٢ + ٣$ **جد :**

١- $(ن \circ هـ)'(س)$

٢- $(ن \circ هـ)''(س)$ **ثم عوض بـ ٢**

الحل : $ن'(س) = ٣س^٢$ ، $هـ'(س) = ٢س$

١ - $(ن \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= ٣(س^٢ + ٣)^٢ \times ٢س = ٦س(س^٤ + ٦س^٢ + ٩)$

$= ٦س^٥ + ٣٦س^٣ + ٥٤س$

٢ - $(ن \circ هـ)''(س) = ٣٠س^٤ + ١٠٨س^٢ + ٥٤$

$(ن \circ هـ)''(٢) = ٣٠(٢)^٤ + ١٠٨(٢)^٢ + ٥٤ = ٩٦٦$

مثال : إذا كان $ص = ع^٢ - ٨ع$ ، $ع س = ٥ + س$ **جد** $\frac{دص}{دس}$ **عندما س = ١**

الحل : $\frac{دص}{دع} = ٢ع - ٨$

$ع = \frac{٥}{س} + ١ \Leftarrow \frac{دع}{دس} = \frac{-٥}{س^٢}$

عندما س = ١ $ع = \frac{٥}{١} + ١ = ٦$

$\frac{دع}{دس} = \frac{-٥}{١} = -٥$

$\Leftarrow \frac{دص}{دع} = ٢ \times ٦ - ٨ = ٤$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٤ \times -٥ = -٢٠$

مثال : إذا كان $ن(س) = هـ(س^٢)$ **جد** $ن'(س)$

الحل : $ن'(س) = هـ(س^٢) \times ٢س$

مثال : $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س}^2 - 6\text{س} + 9}$ **جد** $\text{نً}(\text{س})$

الحل : $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{1}{(\text{س} - 3)^2} \Leftarrow \text{ن}(\text{س}) = (\text{س} - 3)^{-2}$

$$\text{نَ}(\text{س}) = -2 \times (\text{س} - 3)^{-3} \times 1 = \dfrac{-2}{(\text{س} - 3)^3}$$

$$\text{نً}(\text{س}) = -2 \times -3 \times (\text{س} - 3)^{-4} \times 1 = 6(\text{س} - 3)^{-4} = 6\left(\text{ن}(\text{س})\right)^2$$

مثال : إذا كان $\text{ل} = \text{س}^2 - 4\text{س} + 3$ ، $\text{س} = \sqrt{3\text{ص}^2 + 6}$ **جد** $\dfrac{\text{دل}}{\text{دص}}$ **عندما ص = ١**

الحل : $\dfrac{\text{دل}}{\text{دس}} = 2\text{س} - 4$

عندما ص = ١ $\Leftarrow \text{س} = \sqrt{3(1)^2 + 6} = \sqrt{9} = 3$

إذن $\dfrac{\text{دل}}{\text{دس}} = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$

الآن $\dfrac{\text{دس}}{\text{دص}} = \dfrac{1}{2} \times \left(3\text{ص}^2 + 6\right)^{-\frac{1}{2}} \times 6\text{ص} = \dfrac{3\text{ص}}{\sqrt{3\text{ص}^2 + 6}}$

عندما ص = ١ $\Leftarrow \dfrac{\text{دس}}{\text{دص}} = \dfrac{3(1)}{\sqrt{3(1)^2 + 6}} = \dfrac{3}{3} = 1$

إذن $\dfrac{\text{دل}}{\text{دص}} = \dfrac{\text{دل}}{\text{دس}} \times \dfrac{\text{دس}}{\text{دص}} = 2 \times 1 = 2$

مثال : إذا كان $\text{ص}^2 = \text{ع} + 1$ ، $\text{س} = \text{ع}^{10}$ **جد** $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $2\text{ص}\dfrac{\text{دص}}{\text{دع}} = 1 \Leftarrow \dfrac{\text{دص}}{\text{دع}} = \dfrac{1}{2\text{ص}}$

$$\dfrac{\text{دس}}{\text{دع}} = 10\text{ع}^9 \Leftarrow \dfrac{\text{دع}}{\text{دس}} = \dfrac{1}{10\text{ع}^9}$$

$$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \dfrac{\text{دع}}{\text{دس}} = \dfrac{1}{2\text{ص}} \times \dfrac{1}{10\text{ع}^9} = \dfrac{1}{20\text{صع}^9} \times \dfrac{\text{ع}}{\text{ع}} = \dfrac{\text{ع}}{20\text{صع}^{10}}$$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{\text{ص}^2 - 1}{20\text{صس}} \Leftarrow$ **بالضرب التبادلي**

$$(20\text{صس})\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}^2 - 1$$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س}$ وكان $(\text{ق}\circ\text{ق})'(١) = ٢٤$ جد ب

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = ٤\text{س} + \text{ب} \quad \Leftarrow \quad \text{ق}''(\text{س}) = ٤$

$$\text{ق}'(١) = ٤\times١ + \text{ب} = ٤ + \text{ب}$$

$$(\text{ق}\circ\text{ق})'(١) = \text{ق}'(\text{ق}'(١)) \times \text{ق}''(١) = ٢٤$$

$$\text{ق}'(٤+\text{ب})\times٤ = ٢٤ \quad \Leftarrow \quad ٤(٤+\text{ب}) + \text{ب} = \frac{٢٤}{٤}$$

$$١٦ + ٤\text{ب} + \text{ب} = ٦ \quad \Leftarrow \quad ٥\text{ب} = ٦ - ١٦ = -١٠ \quad \Leftarrow \quad \text{ب} = \frac{-١٠}{٥} = -٢$$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٤}{\text{هـ}(\text{س}^{٢} - ٣)}$ وكان $\text{هـ}(١) = ٢$ ، $\text{هـ}'(١) = ٥$ جد $\text{ق}'(٢)$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٤\times\text{هـ}'(\text{س}^{٢} - ٣)\times٢\text{س}}{\left[\text{هـ}(\text{س}^{٢} - ٣)\right]^{٢}}$

$$\text{ق}'(٢) = \frac{-٤\times\text{هـ}'(٢^{٢} - ٣)\times٢\times٢}{\left[\text{هـ}(٢^{٢} - ٣)\right]^{٢}}$$

$$= \frac{-٤\times\text{هـ}'(١)\times٤}{\left[\text{هـ}(١)\right]^{٢}} = \frac{-٤\times٥\times٤}{[٢]^{٢}} = \frac{-٨٠}{٤} = -٢٠$$

مثال : إذا كان $\text{ص} = \text{لـو}(\text{س}^{٢} + ٢)$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}^{٢} + ٢} \times ٢\text{س} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢}$

مثال : إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١} \times ٢\text{س}$

مثال : إذا كان ص = ع ^٢^ + ٥ ، ع = $\frac{٢س - ١}{س}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما ع = ٣

الحل : $\frac{دص}{دع} = ٢ع$

$$\frac{دع}{دس} = \frac{س \times ٢ - (٢س - ١) \times ١}{س^٢} = \frac{٦}{س^٢}$$

عندما ع = ٣ ⟸ $٣ = \frac{٢س - ١}{س}$ ⟸ ٣س = ٢س − ١ ⟸ س = −١

إذن $\frac{دص}{دع} = ٢ \times ٣ = ٦$

$$\frac{دع}{دس} = \frac{٦}{(-١)^٢} = ١$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٦ \times ١ = ٦$$

مثال : إذا كان ص = $\frac{(٢س - ٢)^٣}{(٥ - ٣س)^٢}$ **جد** $\frac{دص}{دس}$

الحل : نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$لــو ص = لــو \frac{(٢س - ٢)^٣}{(٥ - ٣س)^٢} = لــو (٢س - ٢)^٣ - لــو (٥ - ٣س)^٢$$

$$لــو ص = ٣ لــو (٢س - ٢) - ٢ لــو (٥ - ٣س)$$

$$\frac{١}{ص} صَ = ٣ \times \frac{١}{٢س - ٢} \times ٢ - ٢ \times \frac{١}{٥ - ٣س} \times -٣$$

$$\frac{١}{ص} صَ = \frac{٦}{٢س - ٢} + \frac{٦}{٥ - ٣س}$$

$$صَ = \frac{٦ص}{٢س - ٢} + \frac{٦ص}{٥ - ٣س}$$

الباب الثامن : الاشتقاق الضمني :

مثال : إذا كان $\text{ص}^{٢}\text{س} + \text{ص} = ٨$ **جد** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $\text{ص}^{٢} + \text{س} \times ٢\text{ص}\,\text{صَ} + \text{صَ} = ٠$

$$٢\text{ص}\,\text{س}\,\text{صَ} + \text{صَ} = -\text{ص}^{٢}$$

$$\text{صَ}\left(٢\text{ص}\,\text{س} + ١\right) = -\text{ص}^{٢}$$

$$\text{صَ} = \frac{-\text{ص}^{٢}}{\left(٢\text{ص}\,\text{س} + ١\right)}$$

مثال : مثال : إذا كان $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{ص}^{\frac{٢}{٣}} = ١$ **جد** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $\frac{٢}{٣}\text{س}^{-\frac{١}{٣}} + \frac{٢}{٣}\text{ص}^{-\frac{١}{٣}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

$$\frac{٢}{٣}\text{ص}^{-\frac{١}{٣}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{٢}{٣}\text{س}^{-\frac{١}{٣}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{\text{س}^{-\frac{١}{٣}}}{\text{ص}^{-\frac{١}{٣}}} = -\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{-\frac{١}{٣}} = -\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

مثال : إذا كان $\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٥} = ٣\text{س} - \text{ص}^{٢}$ **جد** $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $٥\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٤}\left(١ + ٢\text{صَ}\right) = ٣ - ٢\text{ص}\,\text{صَ}$

$$٥\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٤} + ١٠\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٤}\text{صَ} = ٣ - ٢\text{ص}\,\text{صَ}$$

$$١٠\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٤}\text{صَ} + ٢\text{ص}\,\text{صَ} = ٣ - ٥\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٤}$$

$$\text{صَ}\left(١٠\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٤} + ٢\text{ص}\right) = ٣ - ٥\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٤}$$

$$\text{صَ} = \frac{٣ - ٥\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٤}}{١٠\left(\text{س} + ٢\text{ص}\right)^{٤} + ٢\text{ص}}$$

مثال : إذا كان $\text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ٣\text{س} - ٥$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $\text{س ص}' + \text{ص} + ٢\text{ص ص}' = ٣$

$\text{س ص}' + ٢\text{ص ص}' = -\text{ص} + ٣$

$\text{ص}'(\text{س} + ٢\text{ص}) = -\text{ص} + ٣$

$\text{ص}' = \frac{-\text{ص} + ٣}{\text{س} + ٢\text{ص}}$

مثال : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢\text{جاس}}{\text{قاس}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{جاس جتاس} = \text{جا}٢\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{جتا}٢\text{س}$

مثال : إذا كان $\text{ص} = \text{جاس} - \frac{٢}{٣}\text{جا}^{٣}\text{س}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $\text{ص}' = \text{جتاس} - \frac{٢}{٣} \times ٣\text{جا}^{٢}\text{س} \times \text{جتاس} = \text{جتاس} - ٢\text{جا}^{٢}\text{س جتاس}$

$= \text{جتاس}(١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}) = \text{جتاس} \times \text{جتا}^{٢}\text{س} = \text{جتا}^{٣}\text{س}$

ملاحظة : حسب قانون السلسلة $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^{\text{ن}}\text{س} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \text{ن جا}^{\text{ن}-١}\text{س جتاس}$ **تعديل**

مثال : جد $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{جا}^{٣}(٢\text{س} - ٢\text{هـ}) - \text{جا}^{٣}٢\text{س}}{٣\text{هـ}}$

الحل : نفرض $\text{و} = -٢\text{هـ} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{-\text{و}}{٢}$

إذن $\lim\limits_{\text{و} \to ٠} \frac{\text{جا}^{٣}(٢\text{س} + \text{و}) - \text{جا}^{٣}٢\text{س}}{٣\left(\frac{\text{و}}{-٢}\right)} = \frac{-٢}{٣}\text{ق}'(\text{س})$ **حيث** $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^{٣}٢\text{س}$

إذن $\frac{-٢}{٣} \times ٣\text{جا}^{٢}(٢\text{س}) \times ٢\text{جتا}٢\text{س} = -٢\text{جا}٢\text{س}(٢\text{جا}٢\text{س جتا}٢\text{س}) = -٢\text{جا}٢\text{س جا}٤\text{س}$

استخدمنا قانون السلسلة حيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^{٣}٢\text{س} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) ٣\text{جا}^{٢}(٢\text{س})\text{جتا}٢\text{س} \times ٢$

الوحدة الثانية

الباب الأول : نظرية رول والمتوسطة

أولاً : نظرية رول :

إذا كان ق(س) متصلاً على [أ، ب] وقابل للاشتقاق في] أ، ب [وكان ق(س) فإنه يوجد جـ على الأقل ∋ ق(س) بحيث ق(س)

(يقال أحياناً عندها المماس أفقياً)

مثال : $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{١}{\text{س}}$ بين أنه يحقق شروط نظرية رول ثم جد جـ على $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{١}{\text{س}}$ مجموع اقترانين متصلين وقابلين للاشتقاق لكل س $\in \text{ح} - \{٠\}$

إذن هو متصل على $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$ وقابل للاشتقاق على $\left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$

$\text{ق}\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٢} + \frac{١}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} + ٢ = ٢\frac{١}{٢}$ ، $\text{ق}(٢) = ٢ + \frac{١}{٢} = ٢\frac{١}{٢}$ إذن يحقق شروط رول

$\therefore \exists$ جـ $\in \left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$ بحيث $\text{ق}'(\text{جـ}) = ٠$

$\text{ق}'(\text{س}) = ١ + \frac{-١}{\text{س}^٢} \Leftarrow \text{ق}'(\text{جـ}) = ١ + \frac{-١}{\text{جـ}} = ٠ \Leftarrow \frac{١}{\text{جـ}} = ١ \Leftarrow \text{جـ}^٢ = ١$

$\text{جـ} = ١ \in \left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$ ، $\text{جـ} = -١$ مرفوض

مثال : ابحث في تحقق شروط رول على الاقتران ق(س) =جتاس على $\left[\frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}\right]$

الحل : اقتران جيب التمام متصل وقابل للاشتقاق على ح

إذن هو متصل على $\left[\frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}\right]$ وقابل للاشتقاق على $\left]\frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}\right[$ حيث $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس}$

$\text{ق}\left(\frac{\pi}{٢}\right) = \text{جتا}\frac{\pi}{٢} = ٠$ ، $\text{ق}\left(\frac{٣\pi}{٢}\right) = \text{جتا}\frac{٣\pi}{٢} = ٠$ إذن تحقق شروط رول

لإيجاد جـ $\text{ق}'(\text{جـ}) = ٠ \Leftarrow \text{ق}'(\text{جـ}) = -\text{جاجـ} = ٠ \Leftarrow \text{جـ} = \pi \in \left]\frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}\right[$

مثال : جد قيمة جـ التي تحصل عليها من تطبيق نظرية رول على ق(س) = ١٢س^{٢} − ٢س^{٣} **على** [٠،٦]

الحل : ق(س) **متصل** [٠،٦] **على لأنه كثير حدود**

قابل للاشتقاق على]٠،٦[**حيث** قَ(س) = ٢٤س − ٦س^{٢}

ق(٠) = ١٢(٠)^{٢} − ٢(٠)^{٣} = ٠ ، ق(٦) = ١٢(٦)^{٢} − ٢(٦)^{٣} = ٠ **إذن تحقق شروط رول**

قَ(جـ) = ٠ $\Leftarrow$ قَ(جـ) = ٢٤جـ − ٦جـ^{٢} = ٠ $\Leftarrow$ ٦جـ(٤ − جـ) = ٠

جـ = ٤ $\in$]١،٦[، جـ = ٠ **مرفوض**

مثال : ق(س) = $\begin{cases} [\frac{١}{٣}\text{س}] + \text{جـ} & ، ١ \leq \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} + \text{أس} & ، ٣ \leq \text{س} \leq \text{ب} \end{cases}$ **يحقق شروط رول جد** أ،ب،جـ

الحل : نأخذ الفترة ١ ≤ س < ٣

$[\frac{١}{٣}\text{س}] \Leftarrow [\frac{١}{٣} \times ١] = [\frac{١}{٣}] = ٠$

إذن ق(س) = $\begin{cases} \text{جـ} & ، ١ \leq \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} + \text{أس} & ، ٣ \leq \text{س} \leq \text{ب} \end{cases}$

قَ(س) = $\begin{cases} ٠ & ، ١ < \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س} + \text{أ} & ، ٣ < \text{س} < \text{ب} \\ \text{غ.م} & ، \text{س} = ١،\text{ب} \end{cases}$

ق(س) **يحقق رول على** [١،ب] **إذن** ق(س) **متصل**

إذن $\lim_{\text{س} \to ٣^{+}}$ ق(س) = $\lim_{\text{س} \to ٣^{-}}$ ق(س) $\Leftarrow$ جـ = ٩ − ٣أ

وهو قابل للاشتقاق إذن قَ(٣^{+}) = قَ(٣^{-}) $\Leftarrow$ ٠ = ٢ × ٣ − أ $\Leftarrow$ أ = ٦

جـ = ٩ − ٣أ = ٩ − ٣ × ٦ = −٩ $\Leftarrow$ جـ = −٩

ق(١) = ق(٣) $\Leftarrow$ جـ = ب^{٢} − أب $\Leftarrow$ −٩ = ب^{٢} − ٦ب

ب^{٢} − ٦ب + ٩ = ٠ $\Leftarrow$ (ب − ٣)^{٢} = ٠ $\Leftarrow$ ب = ٣

مثال : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤س + ٦ & ، \quad س > ١ \\ ٧ - ٤س & ، \quad س \le ١ \end{cases}$

ابحث في تحقق شروط نظرية رول على الفترة [−١، ٥] ثم جد جـ

الحل : $ق(-١) = ٧ - ٤ \times -١ = ١١$

$ق(٥) = (٥)^٢ - ٤ \times ٥ + ٦ = ١١$ إذن $ق(-١) = ق(٥)$

لنبحث في قابلية الاشتقاق

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ & ، \quad س > ١ \\ ؟ & ، \quad س = ١ \\ -٤ & ، \quad س < ١ \end{cases}$

$ق'(\overset{+}{١}) = ٢ \times ١ - ٤ = -٢$

$ق'(\overset{-}{١}) = -٤$

$ق'(\overset{+}{٣}) \ne ق'(\overset{-}{٣}) \Leftarrow$ غير قابل للاشتقاق

لم تتحقق شرط النظرية

ومع ذلك نبحث عن جـ

$ق'(جـ) = ٠ \Leftarrow ق'(جـ) = ٢جـ - ٤ = ٠$

$\Leftarrow ٢جـ = ٤ \Leftarrow جـ = ٢ \in [-١، ٥]$

نظرية القيمة المتوسطة :

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ متصلاً على $[\text{ا}،\text{ب}]$ وقابلاً للاشتقاق على $]\text{ا}،\text{ب}[$ فإنه يوجد $\text{جـ} \in]\text{ا}،\text{ب}[$ على الأقل

بحيث $$\text{ق}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}}$$

(بحيث ميل المماس عندها يساوي ميل القاطع الواصل بين النقطتين $(\text{ا}،\text{ق}(\text{ا}))،(\text{ب}،\text{ق}(\text{ب}))$)

مثال : إذا كان الاقتران $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{اس} - ٣ & ، \text{س} < ٤ \\ -\text{س}^٢ + ١٠\text{س} + \text{ب} & ، \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$

يحقق المتوسطة في الفترة $[٢،٦]$ جد الثابتين $\text{ا}،\text{ب}،\text{جـ}$ ثم جد قيم جـ التي تعينها النظرية

الحل : $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{اس} - ٣ & ، \text{س} < ٤ \\ -\text{س}^٢ + ١٠\text{س} + \text{ب} & ، \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$ يحقق المتوسطة أذن متصل

إذن $$\lim_{\text{س} \to ٤^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٤^-} \text{ق}(\text{س})$$

$$٤\text{ا} - ٣ = -١٦ + ٤٠ - \text{ب} \Leftarrow ٤\text{ا} + \text{ب} = ٢٤ + ٣ \Leftarrow \boxed{٤\text{ا} + \text{ب} = ٢٧} \leftarrow \boxed{١}$$

أيضاً قابل للاشتقاق على $]٢،٦[$ إذن

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{ا} & ، \text{س} < ٤ \\ \text{موجودة} & ، \text{س} = ٤ \\ -٢\text{س}^٢ + ١٠ & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$$

إذن $$\text{ق}'(٤^+) = \text{ق}'(٤^-) \Leftarrow \text{ا} = -٨ + ١٠ \Leftarrow \text{ا} = ٢$$

نعوض قيمة ا في المعادلة $\boxed{١}$

$$٤ \times ٢ + \text{ب} = ٢٧ \Leftarrow \text{ب} = ٢٧ - ٨ \Leftarrow \text{ب} = ١٩$$

$$\text{ق}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ق}(٦) - \text{ق}(٢)}{٦ - ٢}$$

الاقتران بعد وضع المجاهيل

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ٣ & ، \text{س} < ٤ \\ -\text{س}^٢ + ١٠\text{س} - ١٩ & ، \text{س} \geq ٤ \end{cases}$$

$$-٢\text{جـ} + ١٠ = \frac{-(٦)^٢ + ١٠ \times ٦ - ١٩ - (٤ - ٣)}{٤} \Leftarrow -٢\text{جـ} = \frac{-٣٦ + ٦٠ - ١٩ - ١}{٤} - ١٠$$

$$-٢\text{جـ} = ١ - ١٠ = -٩ \Leftarrow ٢\text{جـ} = ٩ \Leftarrow \text{جـ} = ٤,٥ \in]٢،٦[$$

مثال : أثبت أن $ق(س) = ٢س^{٢} + ٣س + ١$ يحقق شروط المتوسطة في $[١،٤]$ ثم جد قيم جـ التي تحددها النظرية

الحل : $ق(س)$ متصل على $[١،٤]$ لأنه كثير حدود

$ق'(س) = ٤س + ٣$ أذن قابل للاشتقاق على $]١،٤[$

إذن توجد $جـ \in]١،٤[$

ابحث $ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ} = \frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١}$

$$٤جـ + ٣ = \frac{٢(٤)^{٢} + ٣ \times ٤ + ١ - (٢(١)^{٢} + ٣ \times ١ + ١)}{٣}$$

$$٤جـ + ٣ = \frac{٣٢ + ١٢ + ١ - (٢ + ٣ + ١)}{٣} = \frac{٣٩}{٣} = ١٣$$

$٤جـ = ١٣ - ٣ = ١٠ \Leftarrow ٤جـ = ١٠ \Leftarrow جـ = ٢,٥ \in]١،٤[$

مثال : إذا كان الاقتران $ق(س) = \begin{cases} أ - س^{٢} & ، \quad -٢ \leq س \leq ١ \\ ٦ - ب س & ، \quad ١ < س \leq ٢ \end{cases}$

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[-٢،٢]$ جد الثابتين أ،ب ثم جد جـ التي تعينها النظرية

الحل : متصل ، أذن متصل عند س = ١

إذن $\lim\limits_{س \to ١^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١^{-}} ق(س)$

$٦ - ب = أ - (١)^{٢} \Leftarrow أ + ب = ٦ + ١ \Leftarrow \boxed{أ + ب = ٧} \leftarrow \boxed{١}$

أيضاً قابل للاشتقاق على $]٢،٦[$ إذن $ق'(١)$ موجودة

إذن $ق'(١^{+}) = ق'(١^{-})$

$$ق'(س) = \begin{cases} -٢س & ، \quad -٢ < س < ١ \\ \text{موجودة} & ، \quad س = ١ \\ -ب & ، \quad ١ < س < ٢ \end{cases}$$

$-ب = -٢ \times ١ \Leftarrow ب = ٢$ بالتعويض في المعادلة $\boxed{١}$

$أ + ٢ = ٧ \Leftarrow أ = ٥$

$$ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ} = \frac{ق(٢) - ق(-٢)}{٢ - -٢} = \frac{٦ - ٢ \times ٢ - (٥ - (-٢)^{٢})}{٤} = \frac{٢ - ١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

الباب الثاني والثالث والرابع معاً :

الاقترانات المتزايدة والمتناقصة :

١- إذا كان ق َ (س) > ٠ على الفترة [أ ، ب] فهو متزايد عليها

٢- إذا كان ق َ (س) < ٠ على الفترة [أ ، ب] فهو متناقص عليها

القيم القصوى (العظمى والصغرى) :

١- عند النقطة (أ ، ق(أ)) قيمة عظمى للاقتران إذا كان الاقتران متزايد قبلها ومتناقص بعدها

٢- عند النقطة (أ ، ق(أ)) قيمة صغرى للاقتران إذا كان الاقتران متناقص قبلها ومتزايد بعدها

٣- أصغر القيم العظمى تسمى صغرى مطلقة

٤- أكبر القيم العظمى تسمى عظمى مطلقة

٥- مجموعة النقاط الحرجة هي النقاط (س ، ق(س)) التي تكون عندها المشقة = صفراً أو غير موجودة

٦- يمكن استخدام اختبار المشتقة الثانية لتحديد العظمى من الصغرى

فإذا كان ق ً (س) > ٠ فعند ($س_1$ ، ق($س_1$)) صغرى وإذا كان ق ً (س) < ٠ فعند ($س_1$ ، ق($س_1$)) عظمى

التقعر ونقط الانعطاف :

١- إذا كان ق ً (س) > ٠ على الفترة [أ ، ب] فهو مقعر عليها للأعلى

٢- إذا كان ق ً (س) < ٠ على الفترة [أ ، ب] فهو مقعر عليها للأسفل

٣- نقطة الانعطاف ($س_1$ ، ق($س_1$)) هي نقطة يغير عندها الاقتران من اتجاه تقعره ويكون متصلاً عندها

٤- ظا زاوية الانعطاف = ق َ (نقطة الانعطاف)

مثال : إذا كان ق(س) = ٤س^{٣} − ٣س^{٤} س∈ح

جد : ١- مجالات التزايد والتناقص

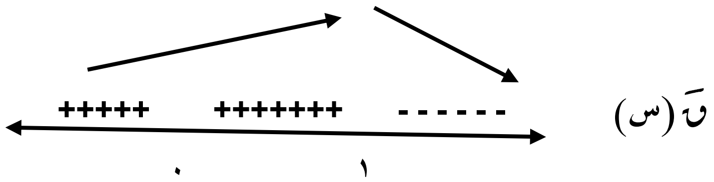
٢- القيم القصوى المحلية

٣- مجالات التقعر للأعلى وللأسفل

الحل : ١- قَ(س) = ١٢س^{٢} − ١٢س^{٣}

نفرض قَ(س) = ٠ ⇐ ١٢س^{٢} − ١٢س^{٣} = ٠ ⇐ ١٢س^{٢}(١ − س) = ٠

س = ٠ أو س = ١



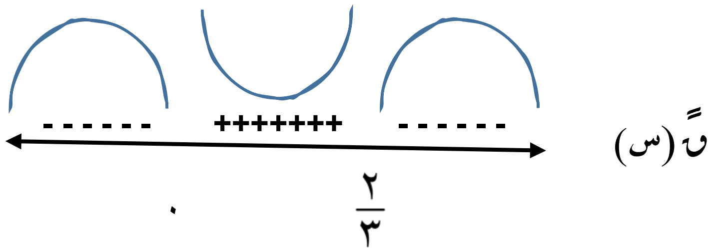
حسب الشكل : متزايد لكل س < ١ ، **متناقص لكل** س > ١

٢- عند س = ١ قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لأنه متزايد قبلها ومتناقص بعدها وهي
ق(١) = ٤(١)^{٣} − ٣(١)^{٤} = ٤ − ٣ = ١

٣ − قً(س) = ٢٤س − ٣٦س^{٢}

نفرض قً(س) = ٠ ⇐ ٢٤س − ٣٦س^{٢} = ٠ ⇐ ١٢س(٢ − ٣س) = ٠

س = ٠ أو س = $\frac{٢}{٣}$



مقعر للأسفل على س < ٠ **و على** س > $\frac{٢}{٣}$ **لأن** قً(س) < ٠ **عندهما**

مقعر للأعلى على]٠، $\frac{٢}{٣}$[**لأن** قً(س) > ٠

إضافي : جد زاوية الانعطاف

ظا زاوية الانعطاف = قَ($\frac{١}{٣}$) = ١٢($\frac{١}{٣}$)^{٢} − ١٢($\frac{١}{٣}$)^{٣}

ظا زاوية الانعطاف الأخرى = قَ(٠) = ٠

مثال : ق(س) = |س − ٢| − ٥ س ∋ [−٢،٢] جد العظمى المطلقة

الحل : س − ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

٢ - س	س - ٢
- - - - - -	+++++

٢

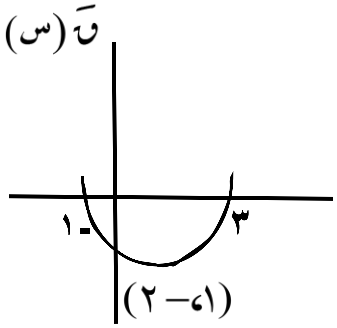
على الفترة [−٢،٢] صيغة الاقتران تكون

ق(س) = ٢ − س − ٥ = −س − ٣

قَ(س) = −١ إذن هو متناقص دائماً

إذن العظمى المطلقة تكون عند س = -٢ وتساوي ق(−٢) = −(−٢) − ٣ = −١

مثال : حدد نقطة الانعطاف من الشكل :



الحل : على الفترة س < ١ قَ(س) متناقص

إذن قً(س) < ٠ أي أن الاقتران مقعر للأسفل

وعلى الفترة س > ١ قَ(س) متزايد

إذن قً(س) > ٠ أي أن الاقتران مقعر للأعلى

إذن (١، ق(١)) نقطة انعطاف

مثال : قَ(س) = (س ^{٢} − ١) ^{٣} (س + ٢) ^{٤} متى يكون متناقصاً

الحل : قَ(س) إشارته يتحكم بها (س ^{٢} − ١) لأن (س + ٢) ^{٤} موجب دائماً

س ^{٢} − ١ = ٠ ⇐ س ^{٢} = ١ ⇐ س = ١، −١

قَ(س) + + + + + - - - - - - +++++

١ -١

إذن متناقص على] −١،١ [

مثال : إذا كان ق(س) = (س + ١) ^{٢} (س − ٢)

جد : ١- مجالات التزايد والتناقص

٢- القيم القصوى

٣- مجالات التقعر (تدريب على هذا السؤال مهم جداً)

مثال : إذا كان $ق(س) = أس^٣ + بس^٢ + جـس + ء$ له قيمة صغرى $(٢،-١)$ ، $(٠،٣)$ نقطة انعطاف

جد الثوابت أ،ب،جـ،ء

الحل : نعوض $(٢،-١)$ في الاقتران الاصلي

$-١ = أ(٢)^٣ + ب(٢)^٢ + جـ(٢) + ء \Leftarrow -١ = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ء \leftarrow \boxed{١}$

نعوض $(٠،٣)$ في الاقتران الاصلي

$٣ = أ(٠)^٣ + ب(٠)^٢ + جـ(٠) + ء \Leftarrow ٣ = ٠ + ٠ + ٠ + ء \Leftarrow \boxed{ء = ٣}$

عند س = ٢ قيمة صغرى إذن $قَ(٢) = ٠$

نشتق الاقتران $\Leftarrow قَ(س) = ٣أس^٢ + ٢بس + جـ$

$٠ = ٣أ(٢)^٢ + ٢ب(٢) + جـ \Leftarrow ٠ = ١٢أ + ٤ب + جـ \leftarrow \boxed{٢}$

عند س = ٠ نقطة انعطاف إذن $قً(٠) = ٠$

$قً(س) = ٦أس + ٢ب$

$٠ = ٦أ(٠) + ٢ب \Leftarrow ٢ب = ٠ \Leftarrow \boxed{ب = ٠}$

نعوض في المعادلة $\boxed{٢}$ $١٢أ + جـ = ٠ \Leftarrow جـ = -١٢أ$

نعوض في المعادلة $\boxed{١}$ $-١ = ٨أ + ٢جـ + ٣ \Leftarrow ٨أ + ٢جـ = -٤$ بالقسمة على ٢

$٤أ + جـ = -٢ \Leftarrow ٤أ - ١٢أ = -٢ \Leftarrow -٨أ = -٢ \Leftarrow أ = \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow جـ = -١٢أ = -١٢ \times \frac{١}{٤} = -٣$

إذن $ق(س) = \frac{١}{٤}س^٣ - ٣س + ٣$

مثال : $ق(س) = \frac{١}{٢}س + جتاس$ على $[٠،\pi]$ جد مجالات التقعر للأعلى

الحل : $قَ(س) = \frac{١}{٢} - جاس$

$قً(س) = -جتاس \Leftarrow$ (الجتا سالب في الثاني)

إذن إشارة $قً(س) > ٠$ على الفترة $\left[\frac{\pi}{٢}،\pi\right]$ فهو مقعر للأعلى

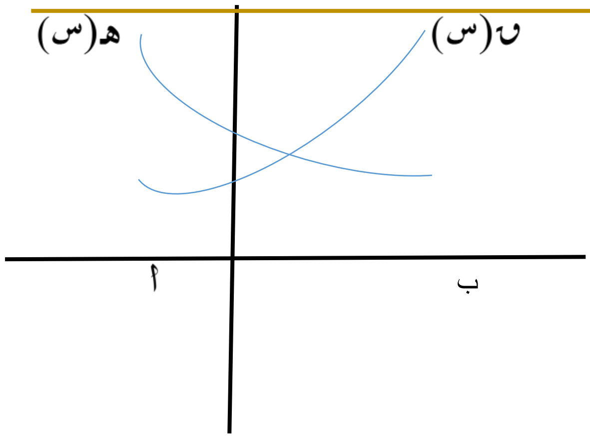
مثال : $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ١٢س}$ المطلوب مجموعة النقاط الحرجة

الحل : $\bar{ق}(س) = \left(س^{٢} - ١٢س\right)^{-\frac{١}{٢}} (٢س - ١٢) = \frac{٢س - ١٢}{\sqrt{س^{٢} - ١٢س}}$

نفرض $\bar{ق}(س) = ٠$ $\Leftarrow$ $٢س - ١٢ = ٠$ $\Leftarrow$ $٢س = ١٢$ $\Leftarrow$ $س = ٦$

وعندما س = ١٢ تكون المشتقة غير معرفة وكذلك عند س = ٠

مجموعة قيم س للنقاط الحرجة $= \{٠، ٦، ١٢\}$



مثال : بين أن $\frac{\bar{ق}(س)}{هـ(س)}$ متزايد على $[أ، ب]$

الحل : من الرسم ق(س) متزايد إذن $\bar{ق}(س) > ٠$ على الفترة

ونلاحظ أن هـ(س) متناقص على $[أ، ب]$ إذن $\bar{هـ}(س) < ٠$

ونلاحظ أن كلاهما مقعر للأعلى إذن $\bar{\bar{هـ}}(س) > ٠$ وكذلك $\bar{\bar{ق}}(س) > ٠$

الان $\frac{\bar{ق}(س)}{هـ(س)} > ٠$ لأن $\bar{ق}(س) > ٠$ وكذلك $هـ(س) > ٠$ لأنه فوق محور السينات

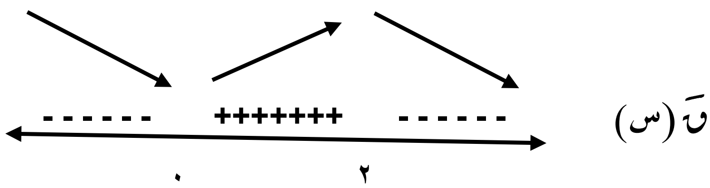
إذن $\frac{\bar{ق}(س)}{هـ(س)}$ متزايد

مثال : $ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣}$ جد العظمى والصغرى

الحل : $ق(س) = ٣س^{٢} - س^{٣}$ $\Leftarrow$ $\bar{ق}(س) = ٦س - ٣س^{٢}$

نفرض أن $\bar{ق}(س) = ٠$ $\Leftarrow$ $٦س - ٣س^{٢} = ٠$ $\Leftarrow$ $٣س(٢ - س) = ٠$

$س = ٠$ أو $س = ٢$



عند س = ٢ عظمى هي $ق(٢) = ٣(٢)^{٢} - (٢)^{٣} = ٢٤ - ٨ = ١٦$

عند س = ٠ صغرى هي $ق(٠) = ٣(٠)^{٢} - (٠)^{٣} = ٠$

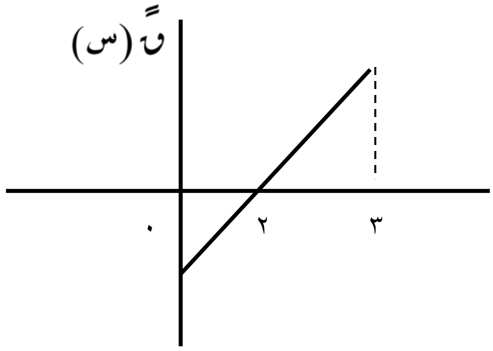
مثال : إذا كانت النقطتان (٠،ن(٠))، ($\frac{١}{٢}$، ن($\frac{١}{٢}$)) نقطتا انعطاف لمنحنى ن(س) وكان ن'(س) = ٤س^{٣} − ك س^{٢}

جد الثابت ك

الحل : ن''(س) = ١٢ س^{٢} − ٢ك س

ن''($\frac{١}{٢}$) = ٠ ⇐ ١٢ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ − ٢ك $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٠ ⇐ $\frac{١٢}{٤}$ − ك = ٠ ⇐ ك = ٣

مثال : الشكل يمثل ن''(س) جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل ، وجد نقطة الانعطاف



الحل : مقعر للأعلى على] ٢، ٣ [لأن ن''(س) > ٠

مقعر للأسفل على] ٠، ٢ [لأن ن''(س) < ٠

نقطة الانعطاف هي (٢، ن(٢)) لأنه يغير من أتجاه تقعره عندها

مثال : إذا كان ن(س) = جاس + جتاس س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٤}$] أثبت أن ن(س) متزايد على مجاله ثم أثبت أن

جاس+جتاس ≥ ١ في الفترة

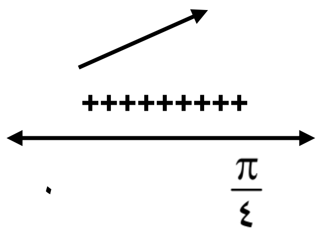
الحل : ن(س) = جاس + جتاس متصل على [٠، $\frac{\pi}{٤}$]

ن'(س) = جتاس − جاس

نفرض ن'(س) = ٠ ⇐ جتاس − جاس = ٠ ⇐ جاس = جتاس ⇐ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = ١

⇐ ظاس = ١ ⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$ ∉]٠، $\frac{\pi}{٤}$[

ن'(س)



إذن هو متزايد ولأنه متزايد إذن ن(س) > ن(٠)

أي أن جاس+جتاس > جا٠ + جتا٠

جاس+جتاس > ١

مثال : إذا كان $ق(س) = \frac{1}{4}س^{4} - \frac{1}{2}س^{2}$

جد : ١- مجالات التزايد والتناقص

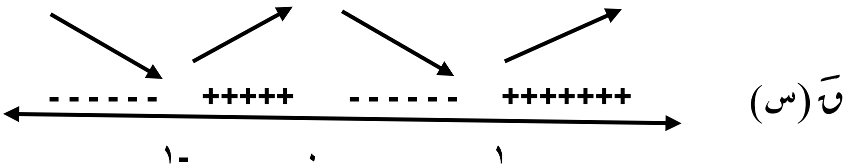
٢- مجالات التقعر للأعلى وللأسفل

٣- نقط الانعطاف

الحل : ١- $\acute{ق}(س) = \frac{1}{4} \times 4س^{3} - \frac{1}{2} \times 2س = س^{3} - س$

نفرض $\acute{ق}(س) = 0 \Leftarrow س^{3} - س = 0 \Leftarrow س(س^{2} - 1) = 0 \Leftarrow س(س-1)(س+1) = 0$

$س = 0$ أو $س = 1$ أو $س = -1$

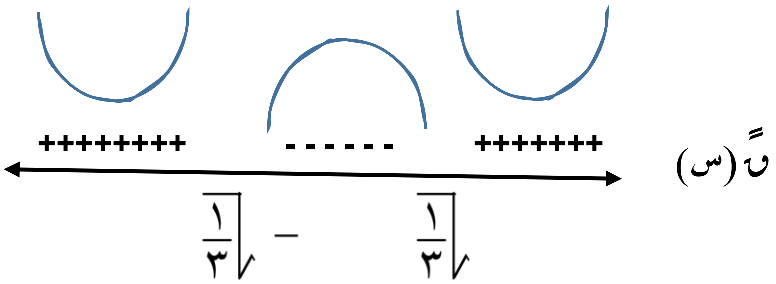


متزايد على الفترة $[-1، 0]$ وكذلك على $[1، \infty[$

متناقص على $[0، 1]$ وكذلك على $]-\infty، -1]$

٢ – $\ddot{ق}(س) = 3س^{2} - 1$

نفرض $\ddot{ق}(س) = 0 \Leftarrow 3س^{2} - 1 = 0 \Leftarrow 3س^{2} = 1 \Leftarrow س^{2} = \frac{1}{3} \Leftarrow س = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$



مقعر للأعلى على $]\sqrt{\frac{1}{3}}، \infty[$ وعلى الفترة $]-\infty، -\sqrt{\frac{1}{3}}[$

مقعر للأسفل على $[-\sqrt{\frac{1}{3}}، \sqrt{\frac{1}{3}}]$

٣ – نقط الانعطاف هي $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}، ق(-\sqrt{\frac{1}{3}})\right)$ لأنه يغير من اتجاه تقعره عندها ومتصل

وكذلك $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}، ق(\sqrt{\frac{1}{3}})\right)$ لأنه يغير من اتجاه تقعره عندها ومتصل

مثال : إذا كان ق(س) = جا^{٢}س − جتا٢س ، س ∈ $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

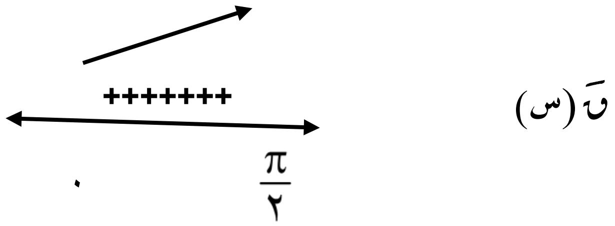
جد : ١- القيم العظمى والصغرى المحلية

٢- فترات التقعر للأعلى وللأسفل

الحل : ١- ق(س) = جا^{٢}س − جتا٢س ⇐ قَ(س) = ٢جتاس جاس + ٢جا٢س = جا٢س + ٢جا٢س = ٣جا٢س

نفرض قَ(س) = ٠ ⇐ ٣جا٢س = ٠ ⇐ جا٢س = ٠ ⇐ ٢س = π ، ٠

س = ٠ أو س = $\frac{\pi}{٢}$

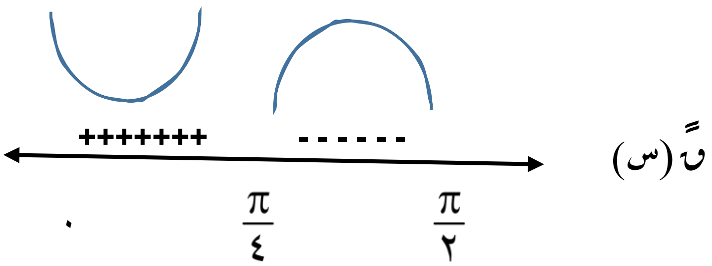


من الشكل (٠، ق(٠)) صغرى محلية ق(٠) = جا^{٢}٠ − جتا٢ × ٠ = −١ ⇐ (٠، −١) صغرى

من الشكل $\left(\frac{\pi}{٢}، ق(\frac{\pi}{٢})\right)$ صغرى محلية ق($\frac{\pi}{٢}$) = جا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ − جتا٢ × $\frac{\pi}{٢}$ = ٢ ⇐ $\left(\frac{\pi}{٢}، ٢\right)$ صغرى

٢- قً(س) = ٦جتا٢س

نفرض قً(س) = ٠ ⇐ ٦جتا٢س = ٠ ⇐ جتا٢س = ٠ ⇐ ٢س = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$



مقعر للأعلى على $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$ لأن قً(س) > ٠

مقعر للأسفل على $\left[\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢}\right]$ قً(س) < ٠

الباب الأخير من الوحدة الثانية (مسائل عملية)

مثال : احسب أقصر مسافة بين $(٢،٠)$ ومنحنى العلاقة $ص^٢ - س^٢ = ٨$

الحل : نفرض النقطة هي $(س_١، ص_١)$

المسافة $= \sqrt{\text{فرق السينات}^٢ + \text{فرق الصادات}^٢}$

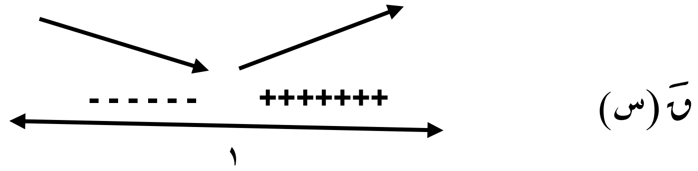
$$= \sqrt{(٢ - س_١)^٢ + ص_١^٢} = \sqrt{٤ - ٤س_١ + س_١^٢ + ص_١^٢}$$

$ص^٢ - س^٢ = ٨ \Leftarrow ص^٢ = ٨ + س^٢$ بالتعويض في المسافة

المسافة (ف) $= \sqrt{٤ - ٤س_١ + س_١^٢ + ٨ + س_١^٢} = \sqrt{٢س_١^٢ - ٤س_١ + ١٢}$

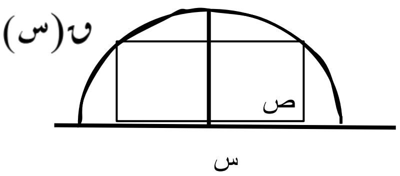
$$\frac{دف}{دس} = \frac{١}{٢}(٢س_١^٢ - ٤س_١ + ١٢)^{-\frac{١}{٢}}(٤س_١ - ٤) = \frac{٤س_١ - ٤}{٢\sqrt{٢س_١^٢ - ٤س_١ + ١٢}}$$

$$\frac{دف}{دس} = ٠ \Leftarrow ٤س_١ - ٤ = ٠ \Leftarrow ٤س_١ = ٤ \Leftarrow س_١ = ١$$



قيمة صغرى عند $س_١ = ١$ إذن أقصر مسافة $= \sqrt{٢(١)^٢ - ٤(١) + ١٢} = \sqrt{١٠}$

مثال : جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأسان على محور السينات ورأسان على



منحنى $ن(س) = ٨ - \frac{٢}{٣}س^٢$

الحل : $م = ٢س ص$

$$م = ٢س(٨ - \frac{٢}{٣}س^٢) \Leftarrow م = ١٦س - \frac{٤}{٣}س^٣$$

$$م' = ١٦ - ٤س^٢ \Leftarrow ١٦ - ٤س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$$

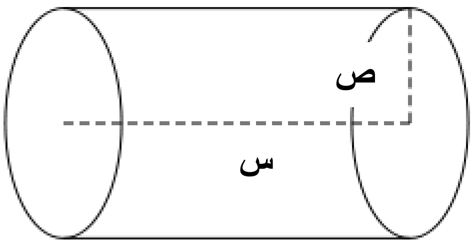
$م'' = -٨س \Leftarrow -٨ \times -٢ = ١٦ > ٠$ قيمة صغرى عند **س = -٢ مرفوض**

$\Leftarrow -٨ \times ٢ = -١٦ < ٠$ قيمة عظمى عند **س = ٢**

إذن مساحة أكبر مستطيل $م = ١٦ \times ٢ - \frac{٤}{٣} \times ٨ = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة

مثال : أوجد بواسطة التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران مستطيل محيطه ٦٠ سم دورة كاملة حول أحد أضلاعه

الحل : ينتج من الدوران اسطوانة



$$٦٠ = ٢\text{س} + ٢\text{ص} \Rightarrow ٣٠ = \text{س} + \text{ص}$$

$$\Rightarrow \text{س} = ٣٠ - \text{ص}$$

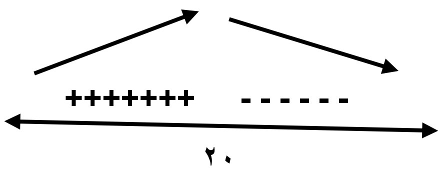
حجم الاسطوانة $= \pi\,\text{ص}^{٢}\,\text{س}$

$$\text{ع} = \pi\,\text{ص}^{٢}(٣٠ - \text{ص}) \Rightarrow \text{ع} = ٣٠\pi\,\text{ص}^{٢} - \pi\,\text{ص}^{٣}$$

$$\frac{د\text{ع}}{د\text{ص}} = ٦٠\pi\,\text{ص} - ٣\pi\,\text{ص}^{٢} \Rightarrow ٦٠\pi\,\text{ص} - ٣\pi\,\text{ص}^{٢} = ٠ \Rightarrow ٣\pi\,\text{ص}(٢٠ - \text{ص}) = ٠$$

إما $\text{ص} = ٠$ **مرفوض أو** $\text{ص} = ٢٠$

ع َ



قيمة عظمى عند ص = ٢٠ (أكبر حجم $= ٤٠٠٠\pi$ **سم**^{٣}

مثال : إذا كان $\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} + ٤\text{س} - ٢٣ = ٠$ **جد اقرب بعد عن النقطة** $(٣ ، ١)$

الحل : المسافة $= \sqrt{\text{فرق السينات}^{٢} + \text{فرق الصادات}^{٢}}$

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} - ١)^{٢}} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩ + \text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} + ١}$$

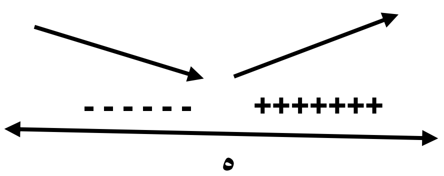
لكن $\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} + ٤\text{س} - ٢٣ = ٠ \Rightarrow \text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} = ٢٣ - ٤\text{س}$

$$\text{ف} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩ + ٢٣ - ٤\text{س} + ١} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٣٣}$$

$$\frac{د\text{ف}}{د\text{س}} = \frac{٢\text{س} - ١٠}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٣٣}} \Rightarrow \frac{٢\text{س} - ١٠}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٣٣}} = ٠$$

$$٢\text{س} - ١٠ = ٠ \Rightarrow ٢\text{س} = ١٠ \Rightarrow \text{س} = ٥$$

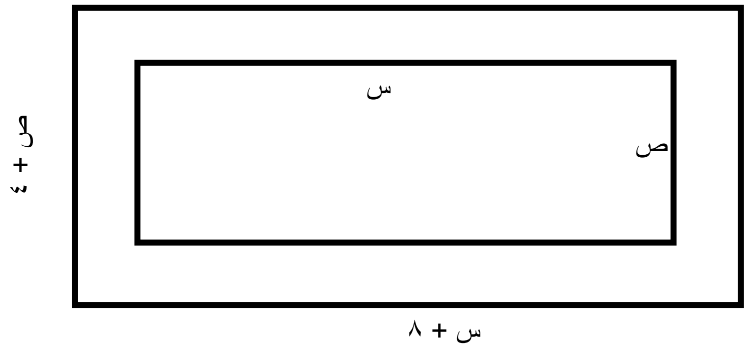
ف َ



إذن عند س = ٥ أصغر بعد

$$\text{ف} = \sqrt{(٥)^{٢} - ١٠ \times ٥ + ٣٣} = \sqrt{٢٥ - ٥٠ + ٣٣} = \sqrt{٨}$$

مثال : أرض مستطيلة الشكل رؤوسها أ،ب،جـ،ء تتكون من حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢٠٠ م^{٢} محاطة بأرصفة عرض كل من الرصيفين على الضلعين أب،جء = ٤ م وعرض كل من الرصيفين على الضلعين الآخرين ٢ م جد أقل مساحة ممكنة لقطعة الأرض



الحل : مساحة الحديقة $(\text{م}) = \text{س} \times \text{ص}$

$$\text{س} \times \text{ص} = \text{٣٢٠٠} \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = \frac{\text{٣٢٠٠}}{\text{س}}$$

مساحة الأرض $(\text{م}) = (\text{س} + \text{٨})(\text{ص} + \text{٤})$

$$= (\text{س} + \text{٨})\left(\frac{\text{٣٢٠٠}}{\text{س}} + \text{٤}\right)$$

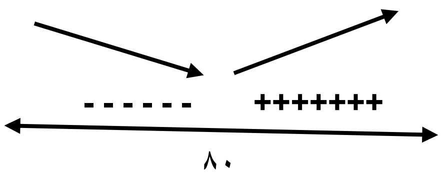
$$\acute{\text{م}} = (\text{س} + \text{٨})\left(\frac{-\text{٣٢٠٠}}{\text{س}^{٢}}\right) + \left(\frac{\text{٣٢٠٠}}{\text{س}} + \text{٤}\right) \times \text{١}$$

$$= \left(\frac{-\text{٣٢٠٠س} - \text{٣٢٠٠} \times \text{٨}}{\text{س}^{٢}}\right) + \left(\frac{\text{٣٢٠٠} + \text{٤س}}{\text{س}}\right)$$

$$\acute{\text{م}} = \frac{\text{٤س}^{٢} - \text{٣٢٠٠} \times \text{٨}}{\text{س}^{٢}} \quad \Leftarrow \quad \acute{\text{م}} = \text{٠} \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{٤س}^{٢} - \text{٣٢٠٠} \times \text{٨}}{\text{س}^{٢}} = \text{٠}$$

$$\text{٤س}^{٢} - \text{٣٢٠٠} \times \text{٨} = \text{٠} \quad \Leftarrow \quad \text{٤س}^{٢} = \text{٣٢٠٠} \times \text{٨} \quad \Leftarrow \quad \text{س}^{٢} = \text{٦٤٠٠}$$

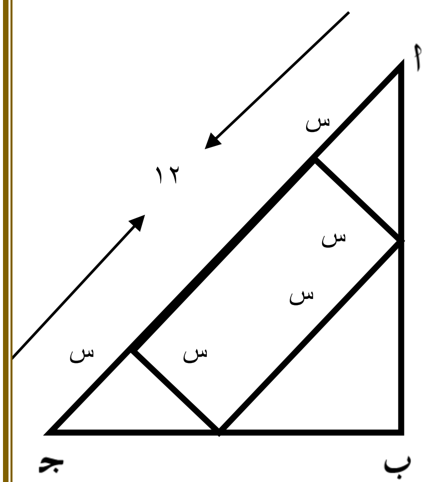
إما $\text{س} = \text{٨٠}$ **أو** $\text{س} = -\text{٨٠}$ **مرفوض**



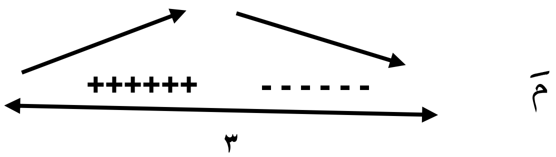
عند $\text{س} = \text{٨٠م}$ **قيمة صغرى** $\text{ص} = \frac{\text{٣٢٠٠}}{\text{٨٠}} = \text{٤٠م}$

مثال : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ومتساوي الساقين وطول الوتر أجـ = ١٢ سم ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث ينطبق أحد أضلاعه على الوتر ويقع الرأسان الآخران على ضلعي القائمة

الحل : مساحة المستطيل $= (\text{١٢} - \text{٢س})\text{س} = \text{١٢س} - \text{٢س}^{٢}$



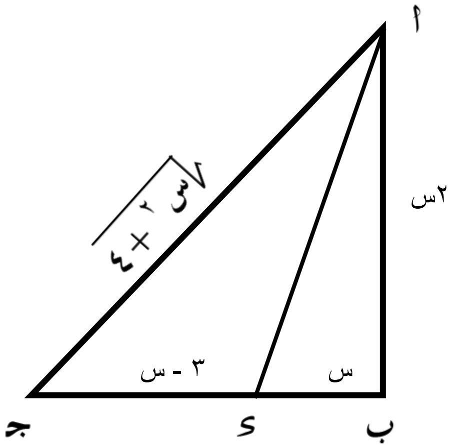
$$\acute{\text{م}} = \text{١٢} - \text{٤س} \quad \Leftarrow \quad \text{١٢} - \text{٤س} = \text{٠} \quad \Leftarrow \quad \text{٤س} = \text{١٢} \quad \Leftarrow \quad \text{س} = \text{٣}$$



إذن عند س =٣ عظمى بحسب الشكل

إذن المساحة $= \text{١٢} \times \text{٣} - \text{٢}(\text{٣})^{٢} = \text{١٨}$ **سم**^{٢}

مثال : حسب الشكل :



المطلوب طول أء الذي يجعل $ل = ءجـ + ٢أء$ أقل ما يمكن

الحل :

$$ل = ءجـ + ٢أء$$

$$ل = (٣ - س) + ٢\sqrt{س^{٢} + ٤}$$

$$ل = (٣ - س) + ٢\left(س^{٢} + ٤\right)^{\frac{١}{٢}}$$

$$لَ = -١ + ٢ \times \left(س^{٢} + ٤\right)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢س \times \frac{١}{٢}$$

$$لَ = -١ + \frac{٢س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}}$$

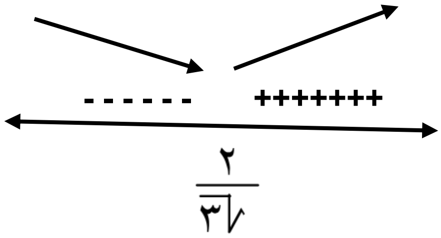
$$\Leftarrow \quad لَ = ٠ \quad \Leftarrow \quad -١ + \frac{٢س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} = ٠$$

$$\Leftarrow \quad \frac{٢س}{\sqrt{س^{٢} + ٤}} = ١ \quad \Leftarrow \quad ٢س = \sqrt{س^{٢} + ٤}$$ **بتربيع الطرفين**

$$٤س^{٢} = س^{٢} + ٤ \quad \Leftarrow \quad ٣س^{٢} = ٤ \quad \Leftarrow \quad س^{٢} = \frac{٤}{٣}$$

$$س = \pm\sqrt{\frac{٤}{٣}} \quad \Leftarrow \quad س = \pm\frac{٢}{\sqrt{٣}}$$

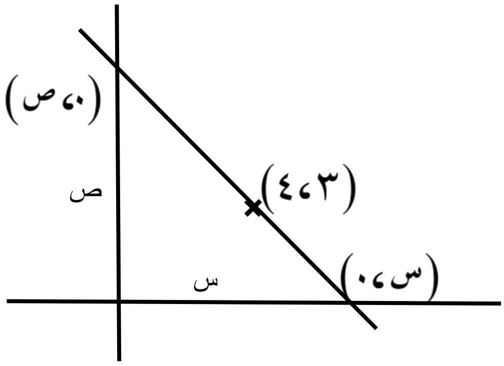
إما $س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ **أو** $س = -\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ **مرفوض**



قيمة صغرى عند $س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

طول أء $= ٣ - \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

مثال : أوجد معادلة المماس الذي يمر بالنقطة (٣،٤) ويصنع مع المحورين في الربع الأول مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن



الحل : المساحة $= \dfrac{\text{س ص}}{٢}$

ميل المستقيم المار بالنقطة (٣،٤)

$= \dfrac{٤ - ٠}{٣ - \text{س}}$ **وكذلك يساوي** $\dfrac{\text{ص} - ٤}{٠ - ٣}$

$\dfrac{٤}{٣ - \text{س}} = \dfrac{\text{ص} - ٤}{-٣}$ **بالضرب التبادلي**

$\Leftarrow\ -١٢ = (٣ - \text{س})(\text{ص} - ٤) \quad \Leftarrow \quad \dfrac{-١٢}{٣ - \text{س}} = \text{ص} - ٤$

$\text{ص} = ٤ - \dfrac{١٢}{٣ - \text{س}} = \dfrac{١٢ - ٤\text{س} - ١٢}{٣ - \text{س}} = \dfrac{-٤\text{س}}{٣ - \text{س}}$

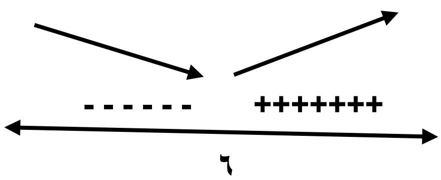
المساحة $= \dfrac{\text{س}(-٤\text{س})}{٢(٣ - \text{س})} = \dfrac{-٢\text{س}^{٢}}{٣ - \text{س}}$

$\text{م}' = \dfrac{(٣ - \text{س})(-٤\text{س}) - (-٢\text{س}^{٢})(-١)}{(٣ - \text{س})^{٢}} = \dfrac{-١٢\text{س} + ٤\text{س}^{٢} - ٢\text{س}^{٢}}{(٣ - \text{س})^{٢}}$

$\text{م}' = \dfrac{٢\text{س}^{٢} - ١٢\text{س}}{(٣ - \text{س})^{٢}} \quad \Leftarrow \quad \text{م}' = ٠ \quad \Leftarrow \quad \dfrac{٢\text{س}^{٢} - ١٢\text{س}}{(٣ - \text{س})^{٢}} = ٠$

$٢\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} = ٠ \quad \Leftarrow \quad ٢\text{س}(\text{س} - ٦) = ٠$

إما $\text{س} = ٠$ **مرفوض** **أو** $\text{س} = ٦$



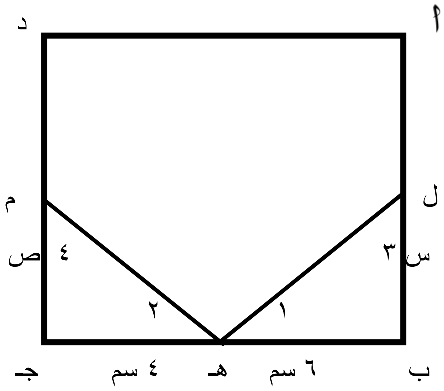
قيمة صغرى عند $\text{س} = ٦ \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = \dfrac{-٤ \times ٦}{٣ - ٦} = ٣$

الميل $= \dfrac{٤}{٣ - ٦} = -\dfrac{٤}{٣}$

المعادلة : $\text{ص} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١}) + \text{ص}_{١}$

$\text{ص} = \dfrac{-٤}{٣}(\text{س} - ٦) + ٣ \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = \dfrac{-٤}{٣}\text{س} + ٨ + ٣ \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = \dfrac{-٤}{٣}\text{س} + ١١$

مثال : ا ب جـ ء مستطيل فيه ا ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٠ سم ما قيمة س ، ص لتكون مساحة الشكل ا ب هـ م ء أكبر ما يمكن



الحل : م = مساحة المستطيل – مساحة المثلثين

$$م = ٨ \times ١٠ - \left(\frac{٦ \times س}{٢} + \frac{٤ \times ص}{٢}\right)$$

$$م = ٨٠ - ٣س - ٢ص$$

يوجد تشابه بين المثلثين

إذن $\hat{١} + \hat{٢} = ٩٠^\circ$ **وكذلك** $\hat{١} + \hat{٣} = ٩٠^\circ$

إذن $\hat{٢} = \hat{٣}$ **وكذلك** $\hat{١} = \hat{٤}$

فنطبق خاصية تناسب الأضلاع

$$\frac{س}{٤} = \frac{٦}{ص} \Leftarrow س ص = ٢٤ \Leftarrow ص = \frac{٢٤}{س}$$

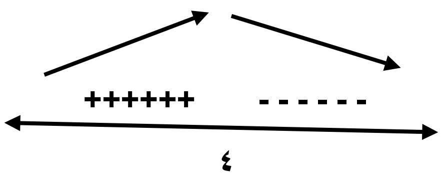
إذن $م = ٨٠ - ٣س - ٢ \times \frac{٢٤}{س}$

$$م = ٨٠ - ٣س - ٤٨س^{-١}$$

$$مَ = -٣ + \frac{٤٨}{س^{٢}}$$

$$مَ = ٠ \Leftarrow -٣ + \frac{٤٨}{س^{٢}} = ٠ \Leftarrow \frac{٤٨}{س^{٢}} = ٣ \Leftarrow ٣س^{٢} = ٤٨ \Leftarrow س^{٢} = ١٦$$

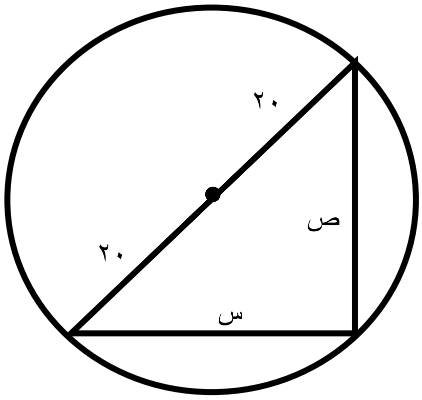
إما $س = -٤$ **مرفوض** **أو** $س = ٤$



عند $س = ٤$ **قيمة عظمى للمساحة**

$$ص = \frac{٢٤}{٤} = ٦$$

مثال : جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة قطرها ٤٠ سم



الحل : $\text{م} = \text{س} \times \text{ص}$

لكن $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = (٤٠)^{٢}$

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٦٠٠ \quad \Leftarrow \quad \text{ص}^{٢} = ١٦٠٠ - \text{س}^{٢}$$

$$\text{ص} = \sqrt{١٦٠٠ - \text{س}^{٢}}$$

$$\text{م} = \text{س} \times \sqrt{١٦٠٠ - \text{س}^{٢}} = \sqrt{١٦٠٠\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}}$$

$$\text{م} = \left(١٦٠٠\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}\right)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{مَ} = \frac{١}{٢}\left(١٦٠٠\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}\right)^{-\frac{١}{٢}}\left(٣٢٠٠\text{س} - ٤\text{س}^{٣}\right)$$

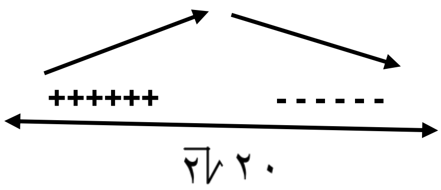
$$= \frac{٣٢٠٠\text{س} - ٤\text{س}^{٣}}{٢\sqrt{١٦٠٠\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}}}$$

$$\text{مَ} = ٠ \quad \Leftarrow \quad \frac{٣٢٠٠\text{س} - ٤\text{س}^{٣}}{٢\sqrt{١٦٠٠\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}}} = ٠$$

$$٣٢٠٠\text{س} - ٤\text{س}^{٣} = ٠ \quad \Leftarrow \quad ٤\text{س}\left(٨٠٠ - \text{س}^{٢}\right) = ٠$$

إما $\text{س} = ٠$ **مرفوض** **أو** $٨٠٠ - \text{س}^{٢} = ٠ \quad \Leftarrow \quad \text{س}^{٢} = ٨٠٠ \quad \Leftarrow \quad \text{س} = \pm\sqrt{٨٠٠}$ **السالب مرفوض**

$$\text{س} = \sqrt{٨٠٠} = ٢٠\sqrt{٢}$$



عند $\text{س} = ٢٠\sqrt{٢}$ **قيمة عظمى**

إذن أكبر مساحة

$$\text{م} = \sqrt{١٦٠٠ \times ٨٠٠ - ٨٠٠ \times ٨٠٠} = ٨٠٠ \text{ سم}^{٢}$$

إضافي :

١- يريد مزارع عمل حديقة مستطيلة الشكل يحيطها بسياج ، إذا كانت المساحة المطلوبة للحديقة ٨٠٠ م ^{٢} ، وكانت تكلفة السياج من جهة الطريق ٦ دنانير لكل متر ومن الجهات الأخرى دينارين لكل متر ، فجد بعدي الحديقة اللذين يجعلان التكاليف أقل ما يمكن ، وكم تبلغ قيمة هذه التكاليف ؟

٢- جد أقرب نقطة واقعة على المنحنى ص = $\sqrt{\text{س} - ١}$ إلى النقطة أ(٢، ٠)

٣- يراد صنع وعاء معدني في هيئة اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى وسعتها ٨١ π دسم ^{٣} ، فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة ٣ دنانير لكل دسم ^{٣} من قاعدة الاسطوانة ، وديناراً واحداً لكل دسم ^{٢} من سطحها الجانبي فجد أبعاد الاسطوانة التي تجعل التكاليف أقل ما يمكن

٤- ثني سلك طوله ١٢ سم ليكون مثلثاً متساوي الساقين . أوجد أطوال أضلاع المثلث إذا كانت مساحته أكبر ما يمكن

٥- جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٢٠ سم

٦- يراد صنع صندوق في هيئة متوازي مستطيلات مفتوح من أعلى ، وذلك بقطع أربعة مربعات صغيرة متطابقة من زوايا صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ دسم ، ثم ثني الحواف إلى أعلى . ما طول ضلع كل من هذه المربعات إذا كانت سعة الصندوق أكبر ما يمكن ؟

٧- تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث يكون بعدها (ف) بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) على هذا الخط معطى بالعلاقة ف = ٢ن ^{٣} − ٩ن ^{٢} + ١٢ن ، ن الزمن بالثواني . جد الزمن الذي تكون فيه السرعة أصغر ما يمكن .

٨- برهن باستخدام التفاضل أن العمود النازل من النقطة (٢، ٣) على محور السينات هو أقصر القطع المستقيمة التي تصل بين النقطة (٢، ٣) ومحور السينات .

٩- أوجد أقصر مسافة بين النقطة (٠، ٦) والمنحنى س ^{٢} − ص ^{٢} = ١٦

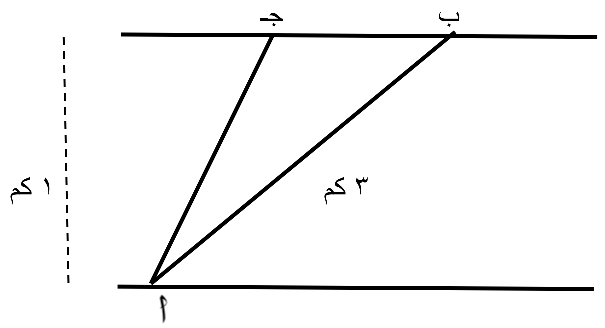
١٠ - جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٤) ويصنع مع المحورين الإحداثيين في الربع الأول مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن

١١ – تقف سفينتان أ،ب في عُرض البحر بحيث تقع أ جنوب ب على بعد ٢٠ كم منها . انطلقت السفينتان بحيث سارت أ بسرعة منتظمة ١٠ كم / ساعة شرقاً وسارت الثانية بسرعة ٥ كم / ساعة جنوباً . جد الزمن اللذي يكون فيه البعد بين السفينتين أصغر ما يمكن ، وكم يكون هذا البعد آنذاك ؟

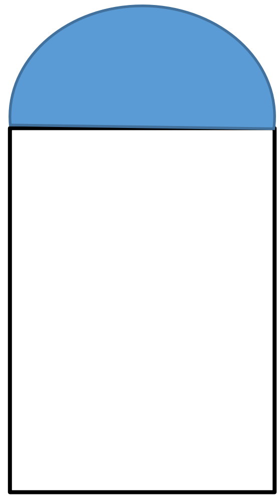
١٢ – يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل بحيث يحتوي على ٤٥٠ سم ^{٢} من المادة المطبوعة وبحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوي والسفلي ١٠ سم ، وكل من الهامشين الجانبيين ٥ سم . ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن ؟

١٣ – جد أبعاد المستطيل ذي المساحة الكبرى والواقع في الربع الأول بحيث تنطبق قاعدته على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = –٥ + ٦س – س ^{٢}

١٤ – يصل أنبوب نفط نقطتين أ،ب البعد بينهما ٣ كم وعلى جانبين مختلفين من نهر عرضه ١ كم ، فإذا كان جزء من الأنبوب تحت الماء بيم أ و جـ والجزء الآخر مكشوفاً على الشاطئ ، من جـ إلى ب ، وكانت تكلفة الكيلومتر من الأنبوب تحت الماء ثلاثة أضعاف تكلفة الكيلومتر في الجزء الواقع على الشاطئ فجد موقع جـ الذي يجعل التكاليف أقل ما يمكن .



١٥ – نافذة في هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة . فإذا كان زجاج نصف الدائرة يسمح بدخول نصف ما يسمح به زجاج المستطيل من الضوء لكل وحدة مربعة ، وإذا علمت أن المحيط الكلي للنافذة يساوي ٦ م ، فجد أبعاد النافذة التي تسمح بمرور أكبر قدر من الضوء .



الوحدة الثالثة

الباب الأول : مفهوم المصفوفة

المصفوفة : تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد على هيئة صفوف وأعمدة ، تسمى الأعداد مدخلات وتحدد رتبة المصفوفة بالعددين $م \times ن$ حيث م عدد الصفوف ، ن عدد الأعمدة

وعدد المدخلات = عدد الصفوف × عدد الأعمدة

مثال : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \\ ٢- & ٦ \end{bmatrix}$ **الرتبة =** ٢×٣ **، عدد المدخلات** $٦ = ٢ \times ٣$ **، المدخلة** $٥ = أ_{١٢}$

- **المصفوفة المربعة : هي مصفوفة عدد صفوفها = عدد أعمدتها**
- **المصفوفة الصفرية : هي مصفوفة جميع مدخلاتها صفراً**
- **مصفوفة الوحدة (المحايدة)**

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = م_{٣} \qquad \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = م_{٢}$$

- **مصفوفة الصف : تتكون من صف واحد** **مثال** $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$
- **مصفوفة العمود تتكون من عمود واحد** **مثال** $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$
- **المصفوفة القطرية** **مثال** $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

تساوي مصفوفتين : إذا كان لهما نفس الرتبة وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية

مثال $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣ص & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} م & ١+ع \\ ص+٢ & ٣-س \end{bmatrix}$ **جد** س،ص،ع،م

الحل : $٢ = ع + ١ \Leftarrow ع = ٢ - ١ = ١ \qquad م = ٣$

$س = ٣ - س \Leftarrow ٢س = ٣ \Leftarrow س = ١,٥$

$٣ص = ٢ + ص \Leftarrow ٢ص = ٢ \Leftarrow ص = ١$

الباب الثاني :

١- جمع مصفوفتين

يمكن جمع مصفوفتين إذا كانتا من نفس الرتبة

مثال : $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ جد $أ + ب$

الحل : $أ + ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ + -١ & ٣ + ٢ \\ ١ + -٣ & ٥ + ٤ \\ ٦ + ٥ & ١ + ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ٩ \\ ١١ & ٧ \end{bmatrix}$

٢- ضرب مصفوفة بعدد مثل (ك)

إذا تم ذلك نضرب كافة المدخلات بالعدد ك

مثال : جد $٢ \times \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ -٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٠ \\ -٤ & ٢ \\ ٢ & -٦ \end{bmatrix}$

٣- طرح مصفوفتين

يمكن طرح مصفوفتين إذا كانتا من نفس الرتبة

مثال : $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٧ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ -٢ & ٣ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ جد $أ - ب$

الحل : $أ - ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٧ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ١ \\ -٢ & ٣ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ - ٧ & ٥ - ١ \\ ١ - -٢ & ٧ - ٣ \\ ٣ - -٥ & -٢ - ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٤ \\ ٣ & ٤ \\ ٨ & -٩ \end{bmatrix}$

مثال : حل المعادلة المصفوفية التالية $٢س + ٣\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$

الحل : $٢س + \begin{bmatrix} ٦ & ١٢ \\ ٣ & ١٥ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix}$

$$٢س - س = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٥ & -١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ١٢ \\ ٣ & ١٥ \end{bmatrix} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} -٥ & -١٤ \\ ٢ & -١٦ \end{bmatrix}$$

٤- ضرب المصفوفات

$أ \times ب = جـ$ يجب أن تكن رتبة $أ = م \times ن$ ورتبة $ب = ن \times ل$ حيث الجواب من رتبة $م \times ل$

والشرط هو عدد أعمدة الاولى = عدد صفوف الثانية حيث تضرب كافة مدخلات الصف بكافة مدخلات العمود

مثال : جد $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

الحل : $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times١+٣\times٣ & ٢\times-٢+٣\times-١ \\ ٥\times١+١\times٣ & ٥\times-٢+١\times-١ \\ ٤\times١+٢\times٣ & ٤\times-٢+٢\times-١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & -٧ \\ ٨ & -١١ \\ ١٠ & -١٠ \end{bmatrix}$

مثال : هل يمكن إجراء ضرب $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ١ & ٧ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

الحل : لا يمكن لأن رتبة الأولى ٢×٢ ورتبة الثانية ٣×٢

مثال : $أ \times ب = جـ$ رتبة $أ = ٢ \times س$ رتبة $ب = ٥ \times ٧$ جد :

١- س $\Leftarrow$ $س = ٥$

٢- رتبة جـ $= ٢ \times ٧$

الباب الثالث : المحددات

تعريف المحددة :

١- $أ = [أ_{١١}]$ فإن المحددة $|أ| = أ_{١١}$

٢- إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$ فإن $|أ| = س \times ل - ع \times ص$

٣- إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & هـ \\ و & ر & د \end{bmatrix}$ فإن $|أ| = س \times \begin{vmatrix} م & هـ \\ ر & د \end{vmatrix} - ص \times \begin{vmatrix} ل & هـ \\ و & د \end{vmatrix} + ع \times \begin{vmatrix} ل & م \\ و & ر \end{vmatrix}$

مثال : $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ جد المحددة $|أ|$

الحل : $|أ| = ٢ \times ٧ - -٥ \times ٣ = ١٤ + ١٥ = ٢٩$

مثال : $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ إذا كان $|أ| = ٠$ جد س

الحل : $س \times ٢ - ٣ \times ٢ = ٠ \Leftarrow ٢س - ٦ = ٠$

$\Leftarrow ٢س = ٦ \Leftarrow س = ٣$

ملاحظة : لإيجاد محددة مربعة ثلاثية توجد طريقتان

١- طريقة التعريف (الصف الأول)

٢- طريقة اختيار العمود

مثال : جد $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل : ١- طريقة التعريف (الصف الأول) المحددة $= ٢ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} - ٣ \times \begin{vmatrix} ٧ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} + ٥ \times \begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$

$$= ٢(٢\times٢ - ٣\times٤) - ٣(٧\times٢ - ٥\times٤) + ٥(٧\times٣ - ٥\times٢) = -١٦ + ١٨ + ٥٥ = ٥٧$$

٢ ــ طريقة اختيار عمود (ونختار الأوسط دائماً)

حيث تكون العاملات للأول (-١) للثاني (١) لثالث (-١)

المحددة $= -٣ \times \begin{vmatrix} ٧ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} + ٢ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} - ٣ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix}$

$$= -١\times٣(٧\times٢ - ٥\times٤) + ١\times٢(٢\times٢ - ٥\times٥) - ١\times٣(٢\times٤ - ٧\times٥) = ١٨ - ٤٢ + ٨١ = ٥٧$$

مثال : جد $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ١ \\ ٢ & ٧ & ٦ \\ ٤ & ٢ & -٣ \end{vmatrix}$ **باختيار مدخلات العمود الأوسط**

الحل : المحددة $= -٥ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix} + ٧ \times \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix} - ٢ \times \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$

$$= -١\times٥(٢\times -٣ - ٤\times٦) + ١\times٧(٣\times -٣ - ٤\times١) - ١\times٢(٣\times٦ - ٢\times١) = ١٥٠ - ٩١ - ٣٢ = ٢٧$$

مثال : لديك المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ **بين أن محددتها** $|أ|$ **تساوي سالب محددة المصفوفة** $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل : $|أ| = ٢\times١ - ٥\times٣ = ٢ - ١٥ = -١٣$

$|ب| = ٥\times٣ - ٢\times١ = ١٥ - ٢ = ١٣$

إذن $|أ| = -|ب|$

خصائص المحددات :

١- عند تبديل صف مكان صف أو عمود مكان عمود فإن المحددة الجديدة = (-١) المحددة القديمة

٢- يمكن إخراج عامل مشترك من أي صف أ أي عمود ولا تتغير قيمة المحدد

٣- إذا أضيف لأي صف أ لأي عمود مضاعفات نظائرها من أي صف أو أي عمود لا تتغير المحددة

٤- إذا تساوت المدخلات المتناظرة في أي صفين أو عمودين فإن المحددة = صفراً

٥- المصفوفة المثلثية العلوية محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر

٦- المصفوفة المربعة من الرتبة ن $|\text{ك}\,\text{أ}| = \text{ك}^{\text{ن}}\,|\text{أ}|$

مثال : لديك $|\text{٣أ}| = \text{١٢}$ حيث المصفوفة مربعة جد $|\text{أ}|$

الحل : $|\text{٣أ}| = \text{٣}^{\text{٢}}\,|\text{أ}|$

$\Leftarrow \text{١٢} = \text{٩}\,|\text{أ}|$

$\Leftarrow |\text{أ}| = \dfrac{\text{١٢}}{\text{٩}} = \dfrac{\text{٤}}{\text{٣}}$

الباب الرابع : النظير الضربى :

تعريف : المصفوفة أ نظيرها الضربي أ$^{-1}$ إذا كان $أ \times أ^{-1} = أ^{-1} \times أ = م = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

خطوات إيجاد النظير الضربى أ$^{-1}$

١- نجد المحددة $|أ|$ **للمصفوفة** $\begin{bmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{bmatrix}$

٢- $|أ| = س \times ل - ع \times ص$

٣- نقسم كل المدخلات على المحددة $|أ|$

٤- نضعها سالب لـِ كل من ع ، ص (نغير إشارتها)

مثال : $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ **جد** $أ^{-1}$

الحل : المحددة $= ٣ \times ١ - ٢ \times ٥ = ٣ - ١٠ = -٧$

$$أ^{-1} = \frac{١}{-٧} \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{-٧} & \frac{١}{-٧} \\ \frac{٣}{-٧} & \frac{-٥}{-٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٧} & \frac{١}{-٧} \\ \frac{٣}{-٧} & \frac{٥}{٧} \end{bmatrix}$$

المصفوفة المنفردة : هي مصفوفة ليس لها نظير ضربي وهي التي تكون محددتها = صفراً

مثال : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل : منفردة لأن $|أ| = ٢ \times ٣ - ٣ \times ٢ = ٠$

<u>خصائص النظير الضربى :</u>

١- $\left(\text{أ}^{-١}\right)^{-١} = \text{أ}$

٢- $\left(\text{ك أ}\right)^{-١} = \frac{١}{\text{ك}}\,\text{أ}^{-١}$

٣- $\left(\text{أ ب}\right)^{-١} = \text{ب}^{-١} \times \text{أ}^{-١}$

مثال : حل المعادلة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

نجد نظير المصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

يتم إيجاد المحددة أولاً $|\text{أ}| = ٢ \times -٢ - ٣ \times ١ = -٤ - ٣ = -٧$

النظير $= \frac{١}{-٧}\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{-٧} & \frac{-١}{-٧} \\ \frac{-٣}{-٧} & \frac{٢}{-٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \\ \frac{٣}{٧} & \frac{-٢}{٧} \end{bmatrix}$

$\text{س} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \\ \frac{٣}{٧} & \frac{-٢}{٧} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

حل آخر من هذه الخطوة $\text{س} = \frac{١}{-٧}\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

$\text{س} = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{٧} + \frac{١}{٧} & \frac{٨}{٧} + \frac{٣}{٧} \\ \frac{-٣}{٧} + \frac{-١٠}{٧} & \frac{١٢}{٧} + \frac{-٦}{٧} \end{bmatrix}$

$\text{س} = \frac{١}{-٧}\begin{bmatrix} ٢ + -٥ & -٨ + -٣ \\ ٣ + ١٠ & -١٢ + ٦ \end{bmatrix}$

$\text{س} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٧} & \frac{١١}{٧} \\ \frac{-١٣}{٧} & \frac{٦}{٧} \end{bmatrix}$

$\text{س} = \frac{١}{-٧}\begin{bmatrix} -٣ & -١١ \\ ١٣ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٧} & \frac{١١}{٧} \\ \frac{-١٣}{٧} & \frac{٦}{٧} \end{bmatrix}$

الباب الخامس : حل أنظمة من المعادلات

أولاً : طريقة كريمر :

مثال : حل المعادلتين الآتيتين

$$\text{٢س} + \text{ص} = ٤$$
$$\text{٣س} - \text{ص} = ١$$

الحل : نرتب المعادلتين كمصفوفات

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix} \Leftarrow |\text{أ}| = ٢ \times -١ - ٣ \times ١ = -٥$

مصفوفة $\text{أ}_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \Leftarrow |\text{أ}_{\text{س}}| = ٤ \times -١ - ١ \times ١ = -٤ - ١ = -٥$

مصفوفة $\text{أ}_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow |\text{أ}_{\text{ص}}| = ٢ \times ١ - ٣ \times ٤ = ٢ - ١٢ = -١٠$

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-٥}{-٥} = ١ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-١٠}{-٥} = ٢$$

$$\boxed{\text{س} = ١} \qquad \boxed{\text{ص} = ٢}$$

مثال : حل المعادلتين الآتيتين

$$2\text{س} + 3\text{ص} = 0$$
$$\text{ص} - 2\text{س} = -8$$

الحل : نرتب المعادلتين

$$2\text{س} + 3\text{ص} = 0$$
$$-2\text{س} + \text{ص} = -8$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - -2 \times 3 = 2 + 6 = 8$$

$$|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times 1 - -8 \times 3 = 24$$

$$|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 2 \times -8 - -2 \times 0 = -16$$

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{24}{8} = 3 \quad ، \quad \text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-16}{8} = -2$$

$$\boxed{\text{س} = 3} \qquad \boxed{\text{ص} = -2}$$

مثال : حل المعادلتين الآتيتين

$$\text{س} + \text{ص} = 7$$
$$\text{س} - \text{ص} = 1$$

الحل : نرتب المعادلتين كمصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times -1 - 1 \times 1 = -2$$

$$|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \times -1 - 1 \times 1 = -8$$

$$|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 7 = -6$$

$$\text{س} = \frac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad ، \quad \text{ص} = \frac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\boxed{\text{س} = 1} \qquad \boxed{\text{ص} = 2}$$

ثانياً : طريقة النظير الضربى :

مثال :

$$٢\text{س} + ٣\text{ص} = ١٣$$
$$٣\text{س} - ٢\text{ص} = ٠$$

نرتب المعادلتين كمصفوفات

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ **نجد محددها ونظيرها**

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = ٢ \times -٢ - ٣ \times ٣ = -٤ - ٩ = -١٣$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-١٣} \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{١٣} & \frac{٣}{١٣} \\ \frac{٣}{١٣} & \frac{-٢}{١٣} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{١٣} & \frac{٣}{١٣} \\ \frac{٣}{١٣} & \frac{-٢}{١٣} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{١٣} \times ١٣ + \frac{٣}{١٣} \times ٠ \\ \frac{٣}{١٣} \times ١٣ + \frac{-٢}{١٣} \times ٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{س} = ٢}$ $\boxed{\text{ص} = ٣}$

حل آخر

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{-١٣} \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{-١٣} \begin{bmatrix} -٢ \times ١٣ + -٣ \times ٠ \\ -٣ \times ١٣ + ٢ \times ٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{-١٣} \begin{bmatrix} -٢٦ \\ -٣٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٢٦}{-١٣} \\ \frac{-٣٩}{-١٣} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{س} = ٢}$ $\boxed{\text{ص} = ٣}$

مثال :
$$3\text{س} = 5\text{ص} + 1$$
$$\text{س} - \text{ص} = 1$$

نرتب المعادلتين

$$3\text{س} - 5\text{ص} = 1$$
$$\text{س} - \text{ص} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}| = 3 \times -1 - -5 \times 1 = -3 + 5 = 2$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} + \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} + \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{س} = 2} \qquad \boxed{\text{ص} = 1}$$

يوجد حل آخر مثل المثال السابق وهي إدخال $\frac{1}{2}$ ثم الضرب

ثالثاً : طريقة جاوس :

مثال : س + ٢ص = ١٢
٣س – ص = ١

الحل : نرتب المصفوفة $\left[\begin{array}{c|cc} ١٢ & ٢ & ١ \\ ١ & -١ & ٣ \end{array}\right]$

نقوم بعمليات مثل ضرب صف بعدد وجمعه للصف الثاني للحصول على مدخلة صفر في بداية الصف الثاني

إذن الصف الأول نضربه في (-٣) ونجمعه للثاني

فينتج $\left[\begin{array}{c|cc} ١٢ & ٢ & ١ \\ -٣٥ & -٧ & ٠ \end{array}\right]$ مع الإبقاء على الصف الأول كما هو

إذن – ٧ص = –٣٥ ⇐ ص = $\frac{-٣٥}{-٧}$ = ٥

نعوض في الأول س + ٢ × ٥ = ١٢ ⇐ س = ١٢ – ١٠ = ٢

$\boxed{\text{س} = ٢}$ $\boxed{\text{ص} = ٥}$

مثال : ص = ٥س – ٢
٢س + ص = ١٢

الحل : نرتب المعادلتين – ٥س + ص = –٢
٢س + ص = ١٢

نرتب المصفوفة $\left[\begin{array}{c|cc} -٢ & ١ & -٥ \\ ١٢ & ١ & ٢ \end{array}\right]$

نضرب الصف الأول في (٢) ونجمع الأول للثاني

فينتج $\left[\begin{array}{c|cc} -٢ & ١ & -٥ \\ ٥٦ & ٧ & ٠ \end{array}\right]$ مع الإبقاء على الصف الأول كما هو

إذن ٧ص = ٥٦ ⇐ ص = $\frac{٥٦}{٧}$ = ٨

نعوض في الأول – ٥س + ٨ = –٢ ⇐ – ٥س = –٢ – ٨
⇐ – ٥س = –١٠ ⇐ س = ٢

$\boxed{\text{س} = ٢}$ $\boxed{\text{ص} = ٨}$

مثال : حل المعادلات بطريقة جاوس :

٢س − ٥ص + ٥ع = ١٧

س − ٢ص + ٣ع = ٩

− س + ٣ص = −٤

الحل : نرتب المصفوفة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ٢ & -٥ & ٥ & ١٧ \\ ١ & -٢ & ٣ & ٩ \\ -١ & ٣ & ٠ & -٤ \end{array}\right]$$

نبدل الصف الثاني بالأول فينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -٢ & ٣ & ٩ \\ ٢ & -٥ & ٥ & ١٧ \\ -١ & ٣ & ٠ & -٤ \end{array}\right]$$

نضرب الأول في (-٢) ونجمعه للثاني فينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -٢ & ٣ & ٩ \\ ٠ & -١ & -١ & -١ \\ -١ & ٣ & ٠ & -٤ \end{array}\right]$$

نجمع الأول مع الثالث فينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -٢ & ٣ & ٩ \\ ٠ & -١ & -١ & -١ \\ ٠ & ١ & ٣ & ٥ \end{array}\right]$$

نبدل الثاني بالثالث فينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -٢ & ٣ & ٩ \\ ٠ & ١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & -١ & -١ & -١ \end{array}\right]$$

نجمع الثاني للثالث فينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -٢ & ٣ & ٩ \\ ٠ & ١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٢ & ٤ \end{array}\right]$$

نقسم الثالث على (٢) فينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -٢ & ٣ & ٩ \\ ٠ & ١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right]$$

ع = ٢

ص + ٣ع = ٥ ⇐ ص + ٣ × ٢ = ٥ ⇐ ص + ٦ = ٥ ⇐ ص = ٥ − ٦ = −١

س − ٢ص + ٣ع = ٩ ⇐ س − ٢ × −١ + ٣ × ٢ = ٩ ⇐ س + ٢ + ٦ = ٩

⇐ س + ٨ = ٩ ⇐ س = ٩ − ٨ = ١ $\boxed{\text{س} = ١}$ $\boxed{\text{ص} = -١}$ $\boxed{\text{ع} = ٢}$

مثال : بطريقة جاوس حل المعادلات الآتية :

$$س - ٢ص + ٣ع = ٧$$
$$٢س + ص + ع = ٤$$
$$-٣س + ٢ص - ٢ع = -١٠$$

الحل : **نرتب المصفوفة**

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٧ & ٣ & -٢ & ١ \\ ٤ & ١ & ١ & ٢ \\ -١٠ & -٢ & ٢ & -٣ \end{array}\right]$$

نضرب الصف الأول في (-٢) ثم نجمعه للثاني فينتج

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٧ & ٣ & -٢ & ١ \\ -١٠ & -٥ & ٥ & ٠ \\ -١٠ & -٢ & ٢ & -٣ \end{array}\right]$$

نضرب الصف الأول في (٣) ونجمعه للصف الثالث فينتج

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٧ & ٣ & -٢ & ١ \\ -١٠ & -٥ & ٥ & ٠ \\ ١١ & ٧ & -٤ & ٠ \end{array}\right]$$

نقسم الصف الثاني على (٥)

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٧ & ٣ & -٢ & ١ \\ -٢ & -١ & ١ & ٠ \\ ١١ & ٧ & -٤ & ٠ \end{array}\right]$$

نضرب الصف الثاني في (٢) ونجمعه للأول

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٣ & ١ & ٠ & ١ \\ -٢ & -١ & ١ & ٠ \\ ١١ & ٧ & -٤ & ٠ \end{array}\right]$$

نضرب الصف الثاني في (٤) ونجمعه للثالث

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٣ & ١ & ٠ & ١ \\ -٢ & -١ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٣ & ٠ & ٠ \end{array}\right]$$

نقسم الثالث على (٣) فينتج

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٣ & ١ & ٠ & ١ \\ ٢- & ١- & ١ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right]$$

نضرب الثالث في (-١) ثم جمعه للأول فينتج

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٢ & ٠ & ٠ & ١ \\ ٢- & ١- & ١ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right]$$

نجمع الثالث مع الثاني فينتج

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٢ & ٠ & ٠ & ١ \\ ١- & ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ & ٠ \end{array}\right]$$

$\boxed{س = ٢}$ $\boxed{ص = -١}$ $\boxed{ع = ١}$

للتدريب : حل المعادلات التالية بواسطة جاوس

س + ص + ع = ٦

س – ص – ع = –٢

س + ص – ع = ٤

الحل : نرتب المصفوفة

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٦ & ١ & ١- & ١ \\ ٢- & ١- & ١- & ١ \\ ٤ & ١- & ١ & ١ \end{array}\right]$$

أكمل .....