شبكة السوار Elsiwar Network SN

امتحان الثانوية العامة (التجريبي) للعام ٢٠٢٠/٢٠٢١م

دولــة فلسطــين | المبحث: الرياضيات | التاريخ: ٠٦/٠٤/٢٠٢١م

وزارة التربيــة والتعليــم العالــي | الفــرع: العلمي | مدة الامتحان: ساعتان ونصف

مديرية التربية والتعليم الوسطى | الورقــة: الثانية | مجموع العلامات: (١٠٠) علامة

ملاحظة: عدد أسئلة الورقة (٨) أسئلة، أجب عن (٥) منها فقط.

القسم الأول: يتكون هذا القسم من ٦ أسئلة وعلى المشترك أن يجيب عن ٤ منها على أن يكون السؤال الأول إجباريًا.

السؤال الأول: (عشرون علامة)

١) في التجزئة المنتظمة $\sigma_{ن}$ للفترة $[\ أ\ ،\ ١٢أ\ ]$ إذا كان العنصر الخامس هو $\frac{٤}{٣}أ$ ، فما عدد عناصر التجزئة؟

أ) ١٠ ب) ١٥ ج) ١٣ د) ١٢

٢) ماذا يساوي $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}}$ دس ؟

أ) −قاس+جـ ب) قاس+جـ ج) −قتاس+جـ د) قتاس+جـ

٣) إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران هـ(س) ، ت(س) اقتران مكامل للاقتران هـ(س) ، كان هـ(س) = م(س) − ت(س) فما قيمة هَ(١) ؟

أ) ١ ب) صفر ج) مَ(١) د) تَ(١)

٤) إذا كانت $\sigma_{ن}$ تجزئة منتظمة للفترة $[\ ٠\ ،\ ٤\ ]$ حيث $م(\sigma_{ن}\ ،\ هـ) = \frac{٨ + ٦ن(ن-٢)}{١ - ٣ن^{٢}}$

وكان $\int_{ب}^{أ} هـ(س)$ دس = ٣ ، فما قيمة $\int_{أ}^{٤} ٢هـ(س)$ دس ؟

أ) −٢ ب) ٧ ج) ٨ د) ١٠

٥) إذا كان $٢ \geq هـ(س) \geq ٧$ لكل س ∈ $[٤\ ،\ ٦]$ فما أكبر قيمة ممكنة للتكامل $\int_{٦}^{٤} هـ(س)$ دس؟

أ) ٤ ب) ١٤ ج) −٤ د) −١٤

٦) هـ(س) متصل على مجاله بحيث $\int_{أ}^{٣} هـ(س) = -١٨$ ، هـ(٣) = ١٥ وكان

$س^{٢} \times ل(س) = \int_{أ}^{س} هـ(ص)$ دص فما قيمة لَ(٣) ؟

أ) ٩ ب) −١٨ ج) ٥ د) ٣

٧) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢×٢ حيث $|أ| = هـ_{ي}^{٢} - ي$ ، فما هي المصفوفة أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١- & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$

٨) إذا كانت س ، ص مصفوفتين من الرتبة الثالثة حيث $ص^{-١} = ٢س$ ، فما قيمة |س ص| ؟

أ) $\frac{١}{٨}$ ب) $\frac{١}{٤}$ ج) ٨ د) ٤

٩) إذا كان ق(س) متصلًا على مجاله وكان $\int_{-١}^{٢} ق(س)\,د س = لـو_{هـ}(جتا^{٢} س + جتا^{٢} س) + س^{٢} + جـ$

فما قيمة $\int_{-١}^{٢} ق(س)\,د س$ ؟

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٦

١٠) إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين فما العبارة الصحيحة دائمًا فيما يأتي؟

أ) $(أب)^{٢} = ب^{٢} أ^{٢}$ ب) $|٢أ| = ٤|أ|$

ج) $|أ + ب|^{٢} = |أ|^{٢} + |ب|^{٢} + ٢|أب|$ د) $(ب^{-١})^{٢} = (ب^{٢})^{-١}$

السؤال الثاني: (عشرون علامة)

أ) استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد $\int_{١}^{٤} ٦ - ٢س \, د س$. (١٠ علامات)

ب) إذا كان $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ جد: (١٠ علامات)

١) $س^{٢} + ٨س - ٥م_{٢}$

٢) $\left(\frac{س}{|س|}\right)^{-١}$

السؤال الثالث: (عشرون علامة)

أ) إذا كان ق(س) متصلًا على $[-١ ، ٣]$ بحيث أن اقترانه المكامل (٧ علامات)

$ت(س) = \begin{cases} أس - ٢ & -١ \le س \le ١ \\ بس^{٢} + جس & ١ < س \le ٣ \end{cases}$ ، فأوجد:

١) قيمة الثوابت أ ، ب ، جـ

٢) $\int_{٣}^{٢} ق(س)\,د س$

ب) حل نظام $٣س = ٤ + ٢ص$ ، $س + ٣ص = ٥$ بطريقة النظير الضربي. (٦ علامات)

ج) $\int قا^{٢} س \, هـ^{ظا س} \, د س$ (٧ علامات)

السؤال الرابع: (عشرون علامة)

أ) عند حل المعادلتين $٨ص + ٣س = ١$ ، $٢س - ٣ص = ٠$ حيث أن $ن$ ، $م \in ع - \{٠\}$ ، وجد أن

$أ^{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ جد قيمتي س ، ص . (١٠ علامات)

ب) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = ١٠ - س^{٢}$ ومنحنى $ك(س) = |س - ٢|$ ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول. (١٠ علامات)

السؤال الخامس: (عشرون علامة)

أ) قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ث من قمة برج ارتفاعه ٨٠ قدمًا، جد أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تصله الكرة، علمًا بأن تسارعها يساوي -٣٢ قدم/ث^{٢} . (١٠ علامات)

ب) إذا كان $\text{ق}(س) = \text{هـ}^{س}(\text{جا}^{٢}س + \text{جا}٢س)$ ، جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{ق}(س)\,\text{د}س$ (١٠ علامات)

السؤال السادس: (عشرون علامة)

أ) أوجد $\int \sqrt[٣]{س^{\frac{-٣}{٤}} + ١}\,\text{د}س$ (١٠ علامات)

ب) إذا كان $\text{ق}(س)$ ، $\text{هـ}(س)$ اقترانين قابلين للتكامل على $[١ ، ٥]$ وكان $\text{ق}(س) \leq \text{هـ}(س)$

لكل $س \in [١ ، ٥]$ ، أثبت أن $\int_{٣}^{٧} \text{ق}(س-٢)\,\text{د}س - \int_{٣}^{-١} \text{هـ}(س+٢) \geq ٠$ (١٠ علامات)

القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما.

السؤال السابع: (عشرون علامة)

أ) جد قيمة $أ$ بحيث أن المستقيم $س = أ$ يقسم المساحة المحصورة بين المنحنى $س = \sqrt[٣]{ص}$ والمستقيم $س = ٢$ ومحور السينات إلى قسمين متساوين. (١٠ علامات)

ب) إذا كان $\text{م}(\sigma_{ن}^{٢} ، \text{ق}) = \frac{٤\sigma_{ن}^{٢} + ١٠\sigma_{ن} + ٤}{٢\sigma_{ن}^{٢}}$، $س \in [٠ ، ١]$ جد $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{٢}} (٣\text{جتا}س\,\text{ق}(\text{جا}س) + ٢)\,\text{د}س$ (١٠ علامات)

السؤال الثامن: (عشرون علامة)

أ) حل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \times س \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ (١٠ علامات)

ب) جد $\int \frac{س + \text{جا}س}{١ + \text{جتا}س}\,\text{د}س$ (١٠ علامات)

انتهت الأسئلة

اجابة التجريبي الورقة الثانية رياضيات الثاني عشر علمي

السؤال الأول :-

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ع	ح	ن	ب	م	ح	ى	ح	م	ى	ى

١) العنصر الخامس = $س_{٤}$ $= \frac{٤}{٣}$ م $\Leftarrow$ م $+ ٤ \times$ ل $= \frac{٤}{٣}$ م

ل $= \frac{م - ٣م}{ن} = \frac{م}{ن}$

$م + \frac{م}{ن} \times ٤ = \frac{٤}{٣}$ م $\Leftarrow$ م $\left(١ + \frac{٤}{ن}\right) = \frac{٤}{٣}$ م $\Leftarrow$ بالقسمة على م $\neq$ صفر

$١ + \frac{٤}{ن} = \frac{٤}{٣} \Leftarrow \frac{٤}{ن} = \frac{٤}{٣} - ١$

$\frac{٤}{ن} = \frac{١}{٣} \Leftarrow$ ن $= ١٢$ عدد القترات $\Leftarrow$ عدد عناصر التجزئة $= ١٢ + ١ = ١٣$

٢) $\int \frac{ظاس}{جتاس}$ دس $= \int$ ظاس قاس دس $=$ قاس $+$ ح

٣) م(س) أصلي لـ هـ(س) $\Leftarrow$ مَ(س) $=$ هـ(س) و نَ(س) مكامل (هـ متصل) $\Leftarrow$ نَ $=$ هـ(س)

هـ(س) $=$ م(س) $-$ ن(س) $\Leftarrow$ هَ(س) $=$ مَ(س) $-$ نَ(س) $=$ هـ(س) $-$ هـ(س) $=$ صفر .

هَ(١) $=$ صفر

٤) م(ى، هـ) $= \frac{٧ + ٦ن(٢-ن)}{١ - ٣ن^{٢}} = \frac{٧ + ١٢ن - ٦ن^{٢}}{١ - ٣ن^{٢}}$ ، ص $\in [٠, ٤٦]$

$\int_{١}^{٤}$ هـ(س) دس $=$ نهـا م(ى، هـ) $=$ $\frac{-٦}{-٣} = ٢$.

$\int_{١}^{٤} ٢$هـ(س) دس $= ٢\int_{١}^{٤}$ هـ(س) دس $= ٢\left[\int_{١}^{٠}$ هـ(س) دس $+ \int_{٠}^{٤}$ هـ(س) دس $\right]$

$= ٢\left[-٣ + ٢\right] = ٢ \times -١ = -٢$

٥) $٢ \leq$ هـ(س) ≤ ٧ $\forall$ س $\in [٤, ٦] \Leftarrow \int_{٤}^{٦} ٢$ دس $\leq \int_{٤}^{٦}$ هـ(س) دس $\leq \int_{٤}^{٦} ٧$ دس

$٢(٦-٤) \leq \int_{٤}^{٦}$ هـ(س) دس $\leq ٧(٦-٤) \Leftarrow ٤ \leq \int_{٤}^{٦}$ هـ(س) دس ≤ ١٤

$-٤ \geq \int_{٦}^{٤}$ هـ(س) دس $\geq -١٤ \Leftarrow -١٤ \leq \int_{٦}^{٤}$ هـ(س) دس ≤ -٤

$\therefore$ أكبر قيمة ممكنة للتكامل $\int_{٦}^{٤}$ هـ(س) دس $= -٤$

٦) سَ $\times$ ل(س) $= \int_{١}^{س}$ هـ(ص) دص $\Leftarrow$ سَ $\times$ لَ(س) $+$ ل(س) $\times ٢$س $=$ هـ(س)

هـ(٣) $= (٣)^{٢} \times$ لَ(٣) $+$ ل(٣) $* ٢ \times ٣$ $\Leftarrow$ بما أن ل(٣) $= \int_{١}^{٣}$ هـ(ص) دص .

٩ لَ(٣) $+ -٢ \times ٦ = ١٥$

٩ لَ(٣) $= ١٥ + ١٢ = ٢٧ \Leftarrow$ لَ(٣) $= \frac{٢٧}{٩} =$ ٣

٩ل(٣) $= -١٨ \Leftarrow$ ل(٣) $= -٢$

٧) م $= \begin{bmatrix} م_{١١} & م_{١٢} \\ م_{٢١} & م_{٢٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

٨) صَ $= ١ \times$ صَ $\Leftarrow$ $٣^{٣} = ٢$س صَ $\Leftarrow$ $|٣^{٣}| = |٢$س صَ$| \Leftarrow ٢^{٣}|$س صَ$| = ١ \Leftarrow |$س صَ$| = \frac{١}{٨}$

٩) $\int$ هـ(س) دس $= \int_{هـ}$ (ط س $+$ جتا س) $+$ س$^{٢} +$ ح $= \int_{هـ} ١ +$ س$^{٢} +$ ح $=$ س$^{٢} +$ ح . باستخدام الطرفين

هـ(س) $= ٢$س $\Leftarrow \int_{-١}^{٢}$ هـ(س) دس $= |$هـ(س)$|_{-١}^{٢} =$ هـ(٢) $-$ هـ(-١) $= ٢ \times ٢ - ٢ \times -١ = ٦$

١٠) العبارة الصحيحة $(ن^{-١})^{-١} = (ن^{-١})^{-١}$

السؤال الثاني :-

① استخدم تعريف التكامل المحدود لايجاد $\int_1^4 (6-2س)\,دس$

الحل :- ليكن $ق(س) = 6-2س$ $\quad$ $س \in [1,4]$

$\int_1^4 ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} م(ض_ن, ق)$ ، $ض_ن$ تجزئة منتظمة للفترة $[1,4]$

$* \quad ل = \frac{4-1}{ن} = \frac{3}{ن}$.

$س_ر = ا + ل ر = 1 + \frac{3}{ن} ر$

$ق(س_ر) = ق(س) = ق(1+\frac{3}{ن} ر) = 6-2(1+\frac{3}{ن} ر)$

$= 6 - 2 - \frac{6}{ن} ر = 4 - \frac{6}{ن} ر$

$م(ض_ن, ق) = \frac{ب-ا}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_ر)$

$= \frac{3}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} (4 - \frac{6}{ن} ر)$

$= \frac{3}{ن} \left(\sum_{ر=1}^{ن} 4 - \frac{6}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ر \right)$

$= \frac{3}{ن} \left(4ن - \frac{6}{ن} \cdot \frac{ن(ن+1)}{2} \right)$

$= \frac{3}{ن} \left(4ن - 3(ن+1) \right)$

$= \frac{3}{ن} (4ن - 3ن - 3) = \frac{3(ن-3)}{ن}$

$= \frac{3ن - 9}{ن}$.

$\therefore \int_1^4 ق(س)\,دس = \lim_{ن \to \infty} \frac{3ن-9}{ن} = \frac{3}{1} = 3$

---

② إذا كان $س = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ فجد :-

أ) $س^2 + 8س - 5ح$.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4+0 & 6-3 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 15 & 27 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 27 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$

ب) $(\frac{س}{|س|})^{-1}$ $\Leftarrow$ $|س| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$(\frac{س}{|س|})^{-1} = (\frac{1}{|س|} س)^{-1} = \frac{1}{2} س^{-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

السؤال الثالث :-

① $ت(س) = \begin{cases} 2س - 2 & -1 \le س \le 1 \\ ت_2 + حس & 1 < س \le 3 \end{cases}$ ، $\int_{-1}^{3} ق(س)\,دس$ حيث $ق$ متصلة

الحل :- $ت(س)$ متصل على مجاله ، $ت$ (بداية الفترة) = صفر

$ت(-1) =$ صفر $\Leftarrow -2 - 2 =$ صفر $\Leftarrow -4 = ح$

$ت(س)$ متصل عند $س = 1$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \lim_{س \to 1^+} ق(س)$

$\lim_{س \to 1^-} 2س - 2 = \lim_{س \to 1^+} ب س^2 + حس$

$0 = ب + ح$

$0 = ب - 4$ ①

$ق(س) = ت'(س) = \begin{cases} 2 & -1 < س < 1 \\ 2ب س + ح & 1 < س < 3 \end{cases}$

$ت'(س) = ق(س)$ ، $ق$ متصل عند $س = 1$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \lim_{س \to 1^+} ق(س)$

$2 = 2ب + ح$ ③ $\Leftarrow$ بالتعويض عن قيمة $ح$ في ①

$2ب - 4 - ب = 2 \Leftarrow ب - 4 = 2$

$ب = 6$ ، $ح = -4 - ب = -10$

$\therefore ت(س) = \begin{cases} 2س - 2 & -1 \le س \le 1 \\ 3س^2 - 10س & 1 < س \le 3 \end{cases}$

$\int_{-1}^{3} ق(س)\,دس = ت(3) - ت(-1)$

$= 3(3)^2 - 10(3) - (-2)$ صفر

$= -4$

---

② حل النظام $3س + 2ص = 4$ ، $س - 3ص = 5$ بالنظير الضربي .

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$أ س = ع \Leftarrow س = أ^{-1} ع$

$س = أ^{-1} ع$

$أ = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $|أ| = -9 - 2 = -11$

$أ^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$ع = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$ع = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -12 - 10 \\ -4 + 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -22 \\ 11 \end{bmatrix}$

$ع = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $س = 2$

④ $\int_{\text{ظا}س}^{\text{قا}س} \text{هـ}^{ص}\, دص$ بالتعويض

الحل :- $ص = \text{ظا}س$ بالتربيع .

$ص^2 = \text{ظا}^2 س \Leftarrow 2ص\, دص = \text{قا}^2 س\, دس$

$دس = \frac{2ص\, دص}{\text{قا}^2 س}$

التكامل $= \int \frac{\text{قا}^2 س\ \text{هـ}^{ص} \times 2ص\, دص}{\text{قا}^2 س}$

$= \int 2ص\, \text{هـ}^{ص}\, دص$ بالأجزاء .

$ع = \text{هـ}^{ص}\, دص \Leftarrow$ مد $= 2ص$

$دع = \text{هـ}^{ص}\, دص$ ← $دمـ = 2\, دص$

$= 2ص\, \text{هـ}^{ص} - \int 2\, \text{هـ}^{ص}\, دص$.

$= 2ص\, \text{هـ}^{ص} - 2\, \text{هـ}^{ص} + ث$.

$= 2\text{ظا}س\, \text{هـ}^{\text{ظا}س} - 2\, \text{هـ}^{\text{ظا}س} + ث$.

السؤال الرابع :-

① $ن ص + 3س = ا \Leftarrow 3س + ن ص = ا$

$2س - 3ص = ٠$

$\begin{bmatrix} ن & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ا \\ ٠ \end{bmatrix}$

$|د| = \begin{vmatrix} ن & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 10 = -19$

$|د س| = \begin{vmatrix} ا & 3 \\ ٠ & -3 \end{vmatrix} = -3ا - ٠ = -3ا$

$|د ص| = \begin{vmatrix} ن & ا \\ 2 & ٠ \end{vmatrix} = ٠ - 2ا = -2ا$

$س = \frac{|د س|}{|د|} = \frac{-3ا}{-19} = \frac{3ا}{19}$

$ص = \frac{|د ص|}{|د|} = \frac{-2ا}{-19} = \frac{2ا}{19}$

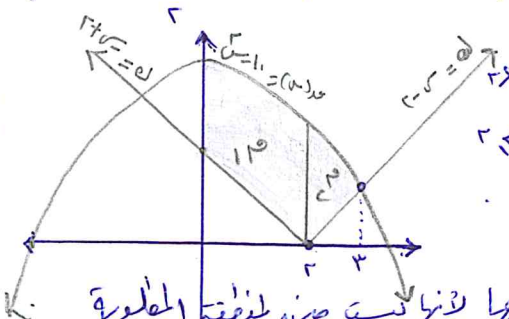
③ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى مد(س) = ١٠ − س² ومنحنى ك(س) = |س − ٢| ومحور الصادات والمستقيم الرأسي الذي معادلته س = ٤

الحل :- باعادة تعريف |س − ٢|

س − ٢	س + ٢ −
−	+

٢

س − ٢ = صفر ⇐ س = ٢



$ك(س) = \begin{cases} 2 - س & س < 2 \\ س - 2 & س \geq 2 \end{cases}$

نقط تقاطع مدع ك .

أولاً :- س < ٢

ك = مد ← لإيجاد نقاط تقاطعهما لأن المنطقة المطلوبة تحت مد

بحل نقطة التقاطع المتشابه مدوك ضمن المنطقة المطلوبة .

ثانياً :- س > ٢

ك = مد ⇐ س − ٢ = ١٠ − س² ⇐ س² + س − ١٢ = ٠

(س + ٤)(س − ٣) = صفر ⇐ س = −٤ مرفوضة ، س = ٣

$م_1 = \int_2^3 (10 - س^2) - (س + 2)\, دس = \int_2^3 10 - س^2 + س - 2\, دس$

$= \int_2^3 -س^2 + س + 8\, دس = -\frac{س^3}{3} + \frac{س^2}{2} + 8س \Big|_2^3$

$= (-9 + \frac{9}{2} + 24) - (-\frac{8}{3} + 2 + 16) = \frac{49}{6}$ وحدة مربعة = ١٥,٣

$م_2 = \int_2^4 (10 - س^2) - (س - 2)\, دس = \int_2^4 10 - س^2 - س + 2\, دس = \int_2^4 12 - س^2 - س\, دس$

$= 12س - \frac{س^3}{3} - \frac{س^2}{2} \Big|_2^4 = (48 - \frac{64}{3} - 8) - (24 - \frac{8}{3} - 2)$

$= 32 - 22,5 = 9,2$ وحدة مربعة

$\therefore م = م_1 + م_2 = 15,3 + 9,2 = 24,5$ وحدة مربعة

السؤال الخامس :-

① ارتفاع البرج = ٨٠ م ، السرعة الابتدائية ٦٤ م/ث

$ت = -32$.

$\therefore ع = \int ت\, دن = \int -32\, دن = -32ن + ص$.

$64 = -32 \times 0 + ص \Leftarrow ن = 0$ ، ع = ٦٤

$\therefore ع = -32ن + 64$

$\therefore$ نصل الجسم لأقصى ارتفاع ⇐ ع = ٠ ⇐

$0 = -32ن + 64 \Leftarrow \frac{32ن}{32} = \frac{64}{32} \Leftarrow$ **ن = ٢**

يمكن ف لكي نحسب أقصى ارتفاع عن البرج .

$ف = \int ع\, دن = \int -32ن + 64\, دس = -\frac{32ن^2}{2} + 64ن + ك$

$ف = -16ن^2 + 64ن + ك$ عندما ن = ٠ ⇐ ف = ٨٠ الارتفاع عن سطح الأرض .

$\therefore 80 = -16(0)^2 + 64(0) + ك$

ك = ٨٠ ⇐ $ف = -16ن^2 + 64ن + 80$

$\therefore$ أقصى ارتفاع عن الأرض = $ف|_{ن=2} = -16(2)^2 + 64(2) + 80$

= ١٤٤ قدماً .

٣ $\text{مقـ}(س) = \text{هـ}(\text{حا}^2 س + \text{حتا}^2 س)$

الحل :-

$\int_{\text{مقـ}(س)}^{} \text{د}س = \int \text{هـ}(\text{حا}^2 س + \text{حتا}^2 س)\, \text{د}س$

$= \int (\text{هـ}\,\text{حا}^2 س + \text{هـ}\,\text{حتا}^2 س)\, \text{د}س$

$= \int \text{هـ}\,\text{حا}^2 س\, \text{د}س + \int \text{هـ}\,\text{حتا}^2 س\, \text{د}س$

بالأجزاء — تتركها كما هي

$\text{مقـ} = \text{حا}^2 س$ ، $\text{د}\text{مقـ} = 2\,\text{حا}س\,\text{حتا}س\,\text{د}س$ ، $\text{د}ع = \text{هـ}^{س}\,\text{د}س$ ، $ع = \text{هـ}^{س}$

$= \text{هـ}\,\text{حا}^2 س - \int \text{هـ}^{س}\, 2\,\text{حا}س\,\text{حتا}س\,\text{د}س + \int \text{هـ}\,\text{حتا}2س\,\text{د}س$

$= \text{هـ}\,\text{حا}^2 س - \int \text{هـ}^{س}\,\text{حا}2س\,\text{د}س + \int \text{هـ}\,\text{حتا}2س\,\text{د}س$

$\therefore \int_{\pi/2}^{\pi} \text{مقـ}(س)\,\text{د}س = \text{هـ}^{س}\,\text{حا}^2 س \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \text{هـ}^{\pi}\,\text{حا}^2\pi - \text{هـ}^{\pi/2}\,\text{حا}^2\tfrac{\pi}{2}$

$= 0 - \text{هـ}^{\pi/2} = -\text{هـ}^{\pi/2}$

السؤال السادس :-

① أوجد $\int \sqrt[4]{س^{-3}} + 1 \;\text{د}س$ ← بسبب $س^{-3/4}$ عامل مشترك

الحل :-

$\int \sqrt[4]{س^{-3}\,(1 + س^{3/4})}\;\text{د}س$ ← نوزع الجذر

$= \int \sqrt[4]{س^{-3}} \times \sqrt[4]{1 + س^{3/4}}\;\text{د}س$

$= \int س^{-3/4} \times \sqrt[4]{1 + س^{3/4}}\;\text{د}س$

$ع = \sqrt[4]{1 + س^{3/4}}$ بالتكعيب

$ع^4 = 1 + س^{3/4}$

$4ع^3\,\text{د}ع = \tfrac{3}{4} س^{-1/4}\,\text{د}س$

$\text{د}س = \dfrac{4ع^3\,\text{د}ع}{\frac{3}{4} س^{-1/4}} = \dfrac{4ع^3\,\text{د}ع}{س^{-1/4}}$

$= \int س^{-1/4} \times ع \times \dfrac{4ع^3\,\text{د}ع}{س^{-1/4}}$

$= \int 4ع^4\,\text{د}ع$

$= 4\dfrac{ع^5}{5} + ث$

$= \dfrac{4}{5}\left(\sqrt[4]{1 + س^{3/4}}\right)^5 + ث$

تابع السؤال السادس : الفرع الثاني

١٢ $\text{مقـ}(س) \geq \text{هـ}(س)$ $\forall\, س \in [0,5]$.

$\int_1^5 \text{مقـ}(س)\,\text{د}س \geq \int_1^5 \text{هـ}(س)\,\text{د}س$ ← ①

$\int_3^7 \text{مقـ}(س-2)\,\text{د}س$ نغير الحدود: $س=7 \Rightarrow ص=5$ ، $س=3 \Rightarrow ص=1$

بجعل $ص = س - 2$ ، $\text{د}ص = \text{د}س$

$= \int_1^5 \text{مقـ}(ص)\,\text{د}ص$

$\int_3^7 \text{هـ}(س+2)\,\text{د}س$ نغير الحدود: $س=3 \Rightarrow ع=5$ ، $س=-1 \Rightarrow ع=1$

بجعل $ع = س + 2$ ، $\text{د}ع = \text{د}س$

$= \int_1^5 \text{هـ}(ع)\,\text{د}ع$

بالرجوع إلى ① $\Rightarrow \int_1^5 \text{مقـ}(س)\,\text{د}س \geq \int_1^5 \text{هـ}(س)\,\text{د}س$.

$-\int_1^5 \text{مقـ}(س)\,\text{د}س \leq -\int_1^5 \text{هـ}(س)\,\text{د}س$.

$-\int_5^1 \text{مقـ}(ص)\,\text{د}ص \leq -\int_5^1 \text{هـ}(ع)\,\text{د}ع$.

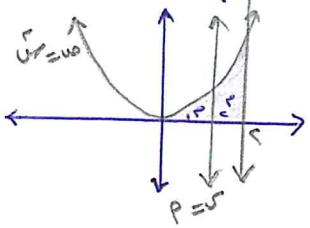
$-\int_7^3 \text{مقـ}(س-2)\,\text{د}س \leq -\int_3^{-1} \text{هـ}(س+2)\,\text{د}س$.

نضرب الطرفين في -1 مع تغيير اشارة التباين

$\int_3^7 \text{مقـ}(س-2)\,\text{د}س \geq \int_3^{-1} \text{هـ}(س+2)\,\text{د}س$.

السؤال السابع :-

① $س = |ص|$ بالتربيع $\Rightarrow س^2 = ص^2 \Rightarrow ص = س^2$



المستطيل مستطيل .

$\text{م}_1 = \text{م}_2$

$\int_p^2 س^2\,\text{د}س = \dfrac{1}{3} س^3 \Big|_p^2$

$\dfrac{8}{3} - \dfrac{p^3}{3} = \dfrac{1}{3}(2)^3 - \dfrac{1}{3}(p)^3$

$\dfrac{8}{3} - \dfrac{p^3}{3} = \dfrac{8}{3} \Leftarrow \dfrac{p^3}{3} = 0$ ($\times \tfrac{3}{8}$)

$p^3 = \dfrac{8}{8} \times \dfrac{3}{1} = 3$

$\therefore p = \sqrt[3]{3}$

السابع :-

$$\text{م}(\text{ن}_{\text{س}}, \text{ع}_{\text{س}}) = \frac{3\text{ن}^2 + 10\text{ن} + 3}{2\text{ن}^2} \quad \text{س} \in [1, \infty[$$

$$\therefore \text{ع}(\text{س}) = \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{م}(\text{ن}_{\text{س}}, \text{ع}_{\text{س}}) = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{3\text{ن}^2 + 10\text{ن} + 3}{2\text{ن}^2} = \frac{3}{2}$$

المطلوب :-

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \text{جتاس ع}(\text{جاس}) + 2)\, \text{دس} \quad \text{نوزع التكامل}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \text{جتاس ع}(\text{جاس})\, \text{دس} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\, \text{دس}$$

نستخدم التعويض

ص = جاس

دص = جتاس دس $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

نغير الحدود : س = $\frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$ ص = جا $\frac{\pi}{2}$ = 1

س = $\frac{\pi}{4}$ $\Leftarrow$ ص = جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{التكامل} = 3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \text{ع}(\text{ص})\, \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \text{ع}(\text{ص})\, \text{دص} + 2 \times \frac{\pi}{4}$$

$$= 3 \times 2 - \pi = 6 - \pi$$

السؤال الثامن :-

حل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

الحل :-

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \text{س} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \longleftarrow ①$$

محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ = 3×0 − (−1)×(−1) = 1

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ بالضرب فيها معادلة ①

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{م}_2 \times \text{س} = \begin{bmatrix} 0+3 & -1+1 \\ -9+2 & -3+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$$

---

٢ $\int \frac{\text{س} + \text{جاس}}{1 + \text{جتاس}}\, \text{دس}$.

الحل :-

$$\int \frac{\text{س}}{1+\text{جتاس}}\, \text{دس} + \int \frac{\text{جاس}}{1+\text{جتاس}}\, \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{س}}{2\text{تا}^2\frac{\text{س}}{2}}\, \text{دس} - \text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{جتاس}| + \text{ث}$$

$$\int \frac{1}{2}\text{س}\, \text{قا}^2\frac{1}{2}\text{س}\, \text{دس} - \text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{جتاس}| + \text{ث}$$

نضع على التكامل بالأجزاء .

ع = $\frac{1}{2}$س ، دع = قا$^2\frac{1}{2}$س دس

د = $\frac{1}{2}$دس ، ج = 2 ظا $\frac{1}{2}$س

التكامل = $\frac{1}{2}$س × 2 ظا $\frac{1}{2}$س − $\int$ 2 ظا $\frac{1}{2}$س × $\frac{1}{2}$ دس − لو$_{\text{هـ}}$|1+جتاس| + ث

= س ظا $\frac{1}{2}$س − $\int$ ظا $\frac{1}{2}$س دس − لو$_{\text{هـ}}$|1+جتاس| + ث

= س ظا $\frac{1}{2}$س − $\int \frac{\text{جا}\frac{1}{2}\text{س}}{\text{جتا}\frac{1}{2}\text{س}}\, \text{دس}$ − لو$_{\text{هـ}}$|1+جتاس| + ث

= س ظا $\frac{1}{2}$س + 2 لو$_{\text{هـ}}$|جتا $\frac{1}{2}$س| − لو$_{\text{هـ}}$|1+جتاس| + ث