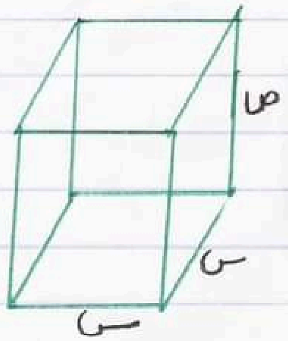
# اجابات أسئلة الثانوية العامة
## من ١٩٧٨ الى ٢٠١٥
## تطبيقات على القيم القصوى




١٩٧٨

يراد عمل خزان معدني مقفل على هيئة متوازي مستطيلات سعته: ٤٥ م³ بحيث تكون كل من قاعدتيه العليا والسفلى مربعة الشكل ، فإذا كانت تكاليف المتر المربع الواحد من القاعدة السفلى ٤ دنانير ومن القاعدة العليا ٦ دنانير لكل متر مربع، ومن الجوانب ٣ دنانير لكل متر مربع ، أوجد أبعاد هذا الخزان حتى تكون تكاليفه أقل ما يمكن وما هي تكاليفه عندئذ ؟

الحل: الحجم = س × س × ص ⟸ ٤٥ = س² ص

⟸ ص = ٤٥ / س²

التكاليف = ت = ٤ × س² + ٦ × س² + ٣ (٤ س × ص)

ت = ١٠ س² + ١٢ س ص

ت = ١٠ س² + ١٢ س × ٤٥ / س² = ١٠ س² + ٥٤٠ / س

ت' = ٢٠ س − ٥٤٠ / س² ⟸ ت' = ٠ اذن

٠ = ٢٠ س − ٥٤٠ / س² ⟸ ٢٠ س³ = ٥٤٠ ⟸ س³ = ٢٧

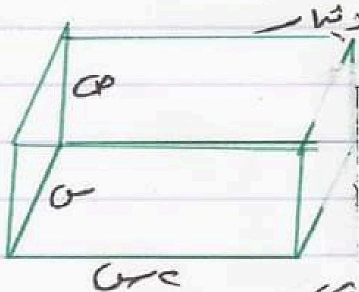
⟸ $\boxed{\text{س} = ٣}$

ت'' = ٢٠ + ١٠٨٠ / س³ ⟸ ت''(٣) > ٠

∴ عندما س = ٣ قيمة صغرى ⟸ الطول = العرض = ٣

⟸ الارتفاع = ٤٥ / ٩ = ٥

ت = ١٠ (٣)² + ٥٤٠ / ٣ = ٩٠ + ١٨٠ = ٢٧٠ دينار




١٩٧٩

صندوق من الصفيح على هيئة متوازي مستطيلات مفتوح من أعلى فإذا كان طول قاعدته مثلي عرضها وكان حجمه ٢٨٨ سم³ ، فأوجد أبعاد هذا الصندوق بحيث يكون مساحة الصفيح اللازم لصنعه أصغر ما يمكن ؟

نفرض العرض س سم الطول = ٢س

الحل: مساحة الصفيح = م = ٢س × س + ٢ (٢س + س) × ص

م = ٢س² + ٦ س ص

ح = ٢س × س × ص

ح = ٢س² ص ⟸ ٢٨٨ = ٢س² ص

ص = ١٤٤ / س²

⟸ م = ٢س² + ٦س × ١٤٤ / س²

م = ٢س² + ٨٦٤ / س

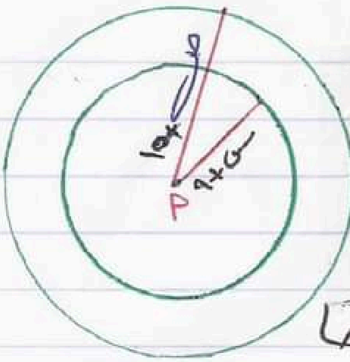
م' = ٤س − ٨٦٤ / س² ⟸ م' = ٠ اذن ٤س³ = ٨٦٤ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٦}$

م'' = ٤ + ١٧٢٨ / س³ ⟸ م''(٦) > ٠ ⟸ عندما س = ٦ قيمة صغرى

الطول = ١٢

العرض = ٦

الارتفاع = ١٤٤ / ٣٦ = ٤ سم



١٩٨٠

دائرتان لهما نفس المركز م ونصف قطر الصغرى = ٩ سم ونصف قطر الكبرى = ١٥ سم ، فإذا أخذ نصف قطر الصغرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره ٥ سم / ث بينما أخذ نصف قطر الكبرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره ٤ سم / ث ، فأوجد أكبر مساحة ممكنة بين الدائرتين بحيث لا يتعدى نصف قطر الصغرى عن نصف قطر الكبرى ؟

الحل :

$\frac{dس}{dن} = ٥$ سم/ث ⟸ س = ٥ن [المسافة = السرعة × الزمن]

$\frac{dص}{dن} = ٤$ سم/ث ⟸ ص = ٤ن

المساحة المحصورة بين الدائرتين = مساحة الكبرى − مساحة الصغرى

م = $\pi$(٤ن + ١٥)² − $\pi$(٥ن + ٩)²

م' = ٢(٤ن + ١٥) × ٤$\pi$ − ٢(٥ن + ٩) × ٥$\pi$

م' = ١٢٠$\pi$ + ٣٢$\pi$ن − ٩٠$\pi$ − ٥٠$\pi$ن

م' = ٣٠$\pi$ − ١٨$\pi$ن ، م' = ٠ ⟸ ن = $\frac{٣٠}{١٨} = \frac{٥}{٣}$

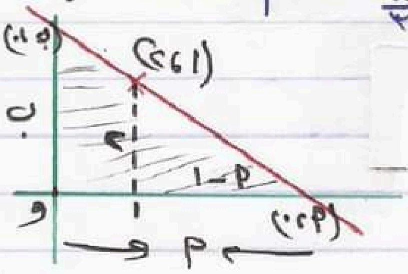
م'' = −١٨$\pi$ < ٠ ⟸ عند ن = $\frac{٥}{٣}$ قيمة عظمى

∴ م = $\pi$($\frac{٥}{٣}$ × ٤ + ١٥)² − $\pi$($\frac{٥}{٣}$ × ٥ + ٩)² = $\pi$($\frac{٦٥}{٣}$)² − $\pi$($\frac{٥٢}{٣}$)²

م = $\pi \frac{٤٢٢٥}{٩}$ − $\pi \frac{٢٧٠٤}{٩}$ = $\pi \frac{١٥٢١}{٩}$ = ١٦٩$\pi$ سم²

لاحظ أن نق الصغرى = س + ٩ = ٩ + $\frac{٥}{٣}$ × ٥ = $\frac{٥٢}{٣}$ بمعنى نق الصغرى < نق الكبرى

نق الكبرى = ص + ١٥ = ١٥ + $\frac{٥}{٣}$ × ٤ = $\frac{٦٥}{٣}$



١٩٨١

مستقيم يمر بالنقطة الثابتة (١ ، ٢) ويقطع محور السينات والصادات في النقطتين أ ، ب أوجد أصغر مساحة ممكنة للمثلث و أ ب الواقع في الربع الأول (حيث و نقطة الأصل) ؟

الحل :

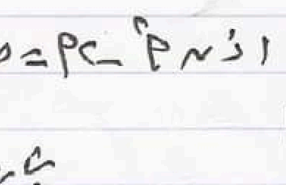
مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × أ × ب = $\frac{١}{٢}$ أ ب

من تشابه المثلثات يكون $\frac{ب}{أ} = \frac{٢}{أ - ١}$

⟸ ب = $\frac{٢أ}{أ - ١}$ ⟸ م المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ × $\frac{٢أ}{أ - ١}$ = $\frac{أ^٢}{أ - ١}$

م' = $\frac{٢أ(أ - ١) - أ^٢}{(أ - ١)^٢}$ ⟸ م' = $\frac{أ^٢ - ٢أ}{(أ - ١)^٢}$ ⟸ م' = صفر اذن أ² − ٢أ = صفر

∴ أ(أ − ٢) = ٠ ⟸ أ = صفر (مرفوضة) أو $\boxed{أ = ٢}$



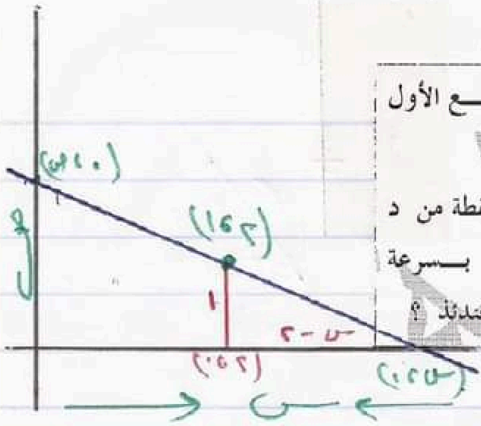
∴ عندما أ = ٢ تكون المساحة أقل ما يمكن

∴ م = $\frac{أ^٢}{أ - ١}$ ⟸ م(٢) = $\frac{٤}{٢ - ١}$ = ٤ وحدات مربعة.

١٩٩٨

(أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (٢ ، ١) والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول مثلثاً مساحته أقل ما يمكن ؟

(ب) مستطيل أ ب جـ د فيه أ ب = ١٠٠ سم ب جـ = ٨٠ سم فإذا تحركت نقطة من د باتجاه أ بسرعة منتظمة مقدارها ٥ سم/ث وتحركت نقطة أخرى من ب باتجاه جـ بسرعة منتظمة مقدارها ٣سم/ث فمتى تكون المسافة بين النقطتين أقل ما يمكن وما مقدارها عندئذ ؟




(أ) الحل: مساحة المثلث = ½ س ص

لتشابه المثلثات يكون $\frac{ص}{س} = \frac{١}{س - ٢}$

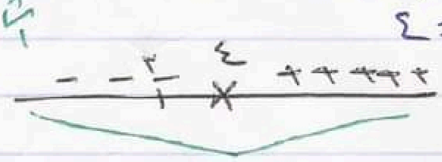
⇐ $ص = \frac{س}{س - ٢}$

⇐ $م = \frac{١}{٢} س \times \frac{س}{س - ٢} = \frac{١}{٢} \frac{س^٢}{س - ٢}$

$م' = \frac{١}{٢} \left( \frac{٢س(س - ٢) - س^٢}{(س - ٢)^٢} \right) = \frac{١}{٢} \left( \frac{س^٢ - ٤س}{(س - ٢)^٢} \right)$

م' = ٠ ⇐ س² - ٤س = ٠ ⇐ س(س - ٤) = ٠

اما س = صفر (مرفوضة) او س = ٤

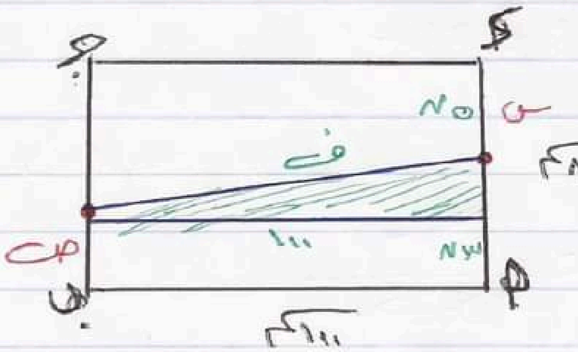



∴ عندما $\boxed{س = ٤}$ فهي صغرى

⇐ $ص = \frac{س}{س - ٢}$ ⇐ $ص = \frac{٤}{٤ - ٢} = \boxed{٢}$

∴ معادلة المستقيم هي $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٢} = ١$ $\left( \frac{س}{\text{القطع السيني}} + \frac{ص}{\text{القطع الصادي}} = ١ \right)$

⇐ $\boxed{س + ٢ص = ٤}$




(ب) $\frac{ءس}{ءن} = ٥$ سم/ث ⇐ س = ٥ن

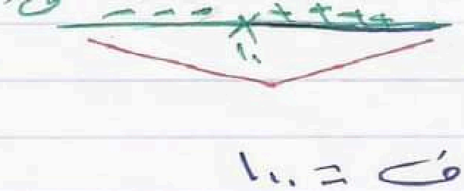
$\frac{ءص}{ءن} = ٣$ سم/ث ⇐ ص = ٣ن

ف² = (١٠٠)² + (٨٠ - (٥ن + ٣ن))²

ف² = (١٠٠)² + (٨٠ - ٨ن)²

٢ف ف' = ٢(٨٠ - ٨ن) × -٨ ⇐ ف' = صفر اذا كان -١٦(٨٠ - ٨ن) = ٠

⇐ ٨٠ - ٨ن = ٠ ⇐ $\boxed{ن = ١٠}$




∴ عندما $\boxed{ن = ١٠}$ فهي صغرى

ف² = (١٠٠)² + (٨٠ - ٨٠)² = ١٠٠² سم ف = ١٠٠

⇐ وهذا منطقي لان البعد يكون اصغر ما يمكن عندما يكون يوازي أ ب ⇐ لا يوجد دقة.

٢٠٠٦

جد أقل كمية من الصفيح اللازمة لصناعة علبة على شكل اسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعـدتين سعتها ١٦ $\pi$ سم$^3$ ؟

الحل: كمية الصفيح = المساحة الكلية = ٢ نق$^2$ $\pi$ + ٢ نق $\pi$ × ع = ل

لكن الحجم = السعة = نق$^2$ $\pi$ ع = ١٦ $\pi$

$\Leftarrow$ $\boxed{\text{ع} = \frac{16}{\text{نق}^2}}$

ل = ٢ نق$^2$ $\pi$ + ٢ نق $\pi$ × $\frac{16}{\text{نق}^2}$

ل = ٢ نق$^2$ $\pi$ + $\frac{32\pi}{\text{نق}}$

ل' = ٤ نق $\pi$ − $\frac{32\pi}{\text{نق}^2}$ $\Leftarrow$ ∴ = ٤ نق $\pi$ − $\frac{32\pi}{\text{نق}^2}$

$\Leftarrow$ ٤ نق $\pi$ = $\frac{32\pi}{\text{نق}^2}$ $\Leftarrow$ نق$^3$ = ٨ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{نق} = 2}$

إشارة ل'

− − − ٢ + + + +

∴ عندما نق = ٢ سم قيمة صغرى

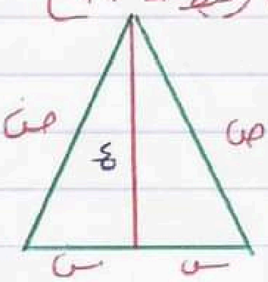
ل = ٢(٢)$^2$ $\pi$ + $\frac{32\pi}{2}$ = ٨$\pi$ + ١٦$\pi$

= ٢٤ $\pi$ سم$^2$

٢٠٠٠

مثلث متساوي الساقين محيطه ١٨ سم ، اوجد اطوال اضلاعه عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن ؟ [ إذا كان محيطه = ١٢ ]

٢٠١١ أكمل




الحل: مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ٢س × ع

= س ع

لكن ص$^2$ = س$^2$ + ع$^2$ $\Leftarrow$ ع = $\sqrt{\text{ص}^2 - \text{س}^2}$

محيط المثلث = ٢س + ٢ص = ١٨ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ص} = 9 - \text{س}}$

∴ ع = $\sqrt{(9-\text{س})^2 - \text{س}^2}$ = $\sqrt{81 - 18\text{س} + \text{س}^2 - \text{س}^2}$

ع = $\sqrt{81 - 18\text{س}}$

∴ م = س $\sqrt{81 - 18\text{س}}$ = $\sqrt{81\text{س}^2 - 18\text{س}^3}$

م' = $\frac{162\text{س} - 54\text{س}^2}{2\text{م}}$ $\Leftarrow$ م' = ∴ اذن ١٦٢س − ٥٤س$^2$ = ٠

$\Leftarrow$ ٥٤س(س − ٣) = ∴ $\Leftarrow$ اما س = ٠ مرفوضة او $\boxed{\text{س} = 3}$

إشارة م'

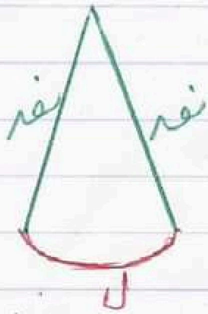
+ + + + ٣ − − −

∴ عندما س = ٣ قيمة عظمى

$\Leftarrow$ ص = ٩ − ٣ = ٦ $\Leftarrow$ اطوال المثلث هي ٦ ، ٦ ، ٦

متساوي الاضلاع

س١٣ / قطاع دائري محيطه ٢٠ م ، جد نصف قطر دائرته لتكون مساحته أكبر ما يمكن ؟




الحل :- مساحة القطاع = ½ نق² هـ

م = ½ نق ل

محيط القطاع = ٢ نق + ل

٢٠ = ٢ نق + ل ⟸ ل = ٢٠ − ٢ نق

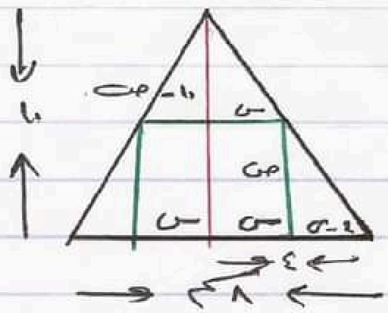
م = ½ نق (٢٠ − ٢ نق) = ١٠ نق − نق²

م′ = ١٠ − ٢ نق ⟸ ∴ ٠ = ١٠ − ٢ نق ⟸ نق = ٥

م″ = −٢ < ٠ ∴ عندما نق = ٥ تكون م نهاية عظمى

∴ $\boxed{\text{نق = ٥}}$

س١٤ / مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم ، يراد اقتطاع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث والرأسان الآخران على ساقي المثلث ، جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن ؟




الحل :- مساحة المستطيل = م = ٢ س × ص

لكن من تشابه المثلثات

يكون ١٠/٤ = (١٠ − ص)/س

⟸ ٥ س = ٢٠ − ٢ ص

س = (٢٠ − ٢ ص)/٥

∴ م = ٢ ((٢٠ − ٢ ص)/٥) × ص = ٢/٥ (٢٠ ص − ٢ ص²)

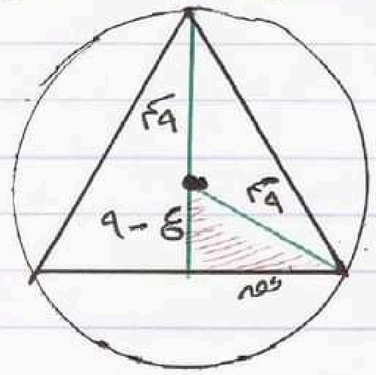
م′ = ٢/٥ (٢٠ − ٤ ص) ⟸ م′ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ص = ٥}}$

م″ = −٨/٥ < ٠ ∴ عندما ص = ٥ نهاية عظمى

∴ س = (٢٠ − ٢ × ٥)/٥ = ١٠/٥ = ٢

∴ بعدي المستطيل هما {٤ ، ٥}

س ١٨: جد نصف قطر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل كرة نصف قطرها ٩ سم بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن




الحل: حجم المخروط ح = $\frac{\pi}{3}$ نق² ع

لكن حسب فيثاغورس يكون

٨١ = (ع − ٩)² + نق²

نق² = ٨١ − (ع − ٩)²

ح = $\frac{\pi}{3}$ (٨١ − (ع − ٩)²) ع

ح = $\frac{\pi}{3}$ (~~٨١~~ − ع² + ١٨ع − ~~٨١~~) ع = $\frac{\pi}{3}$ (١٨ع² − ع³)

ح' = $\frac{\pi}{3}$ (٣٦ع − ٣ع²) ⟸ ح' = ٠ ⟸ ٣٦ع = ٣ع² ‏/ نقسم ع٣

∴ $\boxed{\text{ع = ١٢}}$

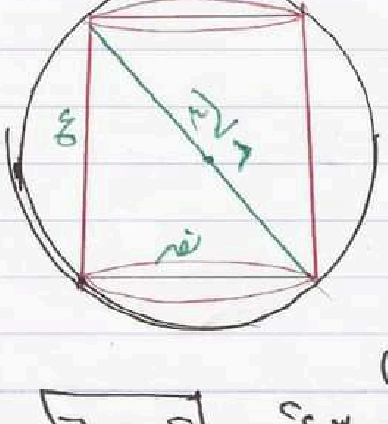
ح'' = $\frac{\pi}{3}$ (٣٦ − ٦ع) ⟸ ح''(١٢) = $\frac{\pi}{3}$ (٣٦ − ٧٢) < ٠

∴ عند ع = ١٢ قيمة عظمى

نق² = ٨١ − (١٢ − ٩)² = ٨١ − ٩ = ٧٢

∴ نق = √٧٢

س ١٩: جد ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم والتي يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها ٣√٣ سم.




الحل: حجم الأسطوانة = نق² π ع

ح = نق² π ع

لكن حسب فيثاغورس ⟸ نق² + ع² = ٣٦ × ٣

نق² = ١٠٨ − ع²

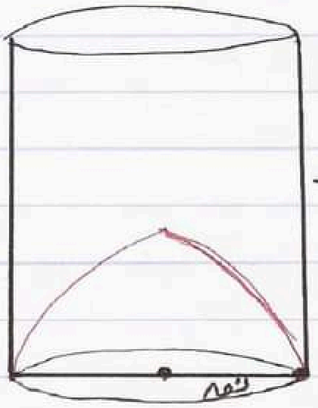
ح = π (١٠٨ − ع²) ع = π (١٠٨ع − ع³)

ح' = π (١٠٨ − ٣ع²) ⟸ ح' = ٠ ⟸ ١٠٨ = ٣ع² ⟸ $\boxed{\text{ع = ٦}}$

ح'' = π (− ٦ع) ⟸ ح''(٦) < ٠

∴ عند ع = ٦ قيمة عظمى ⟸ $\boxed{\text{ع = ٦}}$ = الارتفاع.

س٣: قطعة خشب على شكل اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٠٠π سم² حفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساوٍ لطول قطر قاعدة الاسطوانة، جد طول قطر قاعدة الاسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الاسطوانة أكبر ما يمكن




الحل: المساحة الجانبية للاسطوانة = ٤٠٠π

$٢ \text{ نق } \pi \text{ ع} = ٤٠٠ \pi$

$\text{نق ع} = ٢٠٠ \Leftarrow \text{ع} = \frac{٢٠٠}{\text{نق}}$

الحجم المتبقي = حجم الاسطوانة − ½ حجم الكرة

$\text{ح} = \text{نق}^٢ \pi \text{ ع} - \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \text{نق}^٣ \pi$

$\text{ح} = \text{نق}^٢ \pi \times \frac{٢٠٠}{\text{نق}} - \frac{٢}{٣} \text{نق}^٣ \pi$

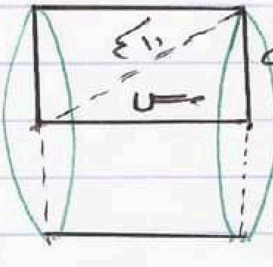
$\text{ح} = ٢٠٠ \pi \text{ نق} - \frac{٢\pi}{٣} \text{نق}^٣$

$\text{ح}' = ٢٠٠\pi - ٢\pi \text{نق}^٢ \Leftarrow \text{ح}' = ٠$

$٠ = ٢\pi(١٠٠ - \text{نق}^٢) \Leftarrow \boxed{\text{نق} = ١٠}$

$\text{ح}'' = -٤\pi \text{ نق} \Leftarrow \text{ح}''(١٠) = -٤٠\pi < ٠$ اذن عندما نق = ١٠ قيمة عظمى $\Leftarrow$ طول القطر = ٢٠

س٤: مستطيل طول قطره ١٠ سم، اذا دار المستطيل دورة كاملة حول أحد أضلاعه، احسب أكبر حجم ممكن للاسطوانة الناتجة




الحل: حجم الاسطوانة الناتجة = $\text{ص}^٢ \pi \text{ س}$

لكن $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١٠٠ \Leftarrow \text{ص}^٢ = ١٠٠ - \text{س}^٢$

بالتعويض $\text{ح} = \text{ص}^٢ \pi \text{ س} \Leftarrow \text{ح} = (١٠٠ - \text{س}^٢)\pi \text{ س}$

$\text{ح} = \pi(١٠٠\text{س} - \text{س}^٣)$

$\text{ح}' = \pi(١٠٠ - ٣\text{س}^٢) \Leftarrow \text{ح}' = ٠ \Leftarrow ١٠٠ - ٣\text{س}^٢ = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{١٠}{\sqrt{٣}}$

$\text{ح}'' = -٦\pi \text{ س} \Leftarrow \text{ح}''\left(\frac{١٠}{\sqrt{٣}}\right) < ٠$ ∴ عندما $\text{س} = \frac{١٠}{\sqrt{٣}}$ قيمة عظمى

$\text{ح} = \pi\left(١٠٠ \times \frac{١٠}{\sqrt{٣}} - \frac{١٠٠٠}{٣\sqrt{٣}}\right) = \pi\left(\frac{٣٠٠٠}{٣\sqrt{٣}} - \frac{١٠٠٠}{٣\sqrt{٣}}\right) = \frac{٢٠٠٠\pi}{٣\sqrt{٣}}$ سم³

$ح = \pi س^2 * ع(1 - \frac{س}{نق})$

$ح = \pi ع(س^2 - \frac{س^3}{نق}) \Rightarrow ح' = \pi ع(2س - \frac{3س^2}{نق})$

$ح' = 0 \Rightarrow 2س - \frac{3س^2}{نق} = 0 \Rightarrow 2س = \frac{3س^2}{نق}$ ، $س \neq 0$

$2نق = 3س \Rightarrow س = \frac{2نق}{3}$

$ح'' = \pi ع(2 - \frac{6س}{نق}) \Rightarrow ح''(\frac{2نق}{3}) = \pi ع(2 - \frac{\cancel{6} \times \frac{2نق}{3}}{نق})$

$= -2\pi ع < 0$

∴ عندما $س = \frac{2نق}{3}$ قيمة عظمى

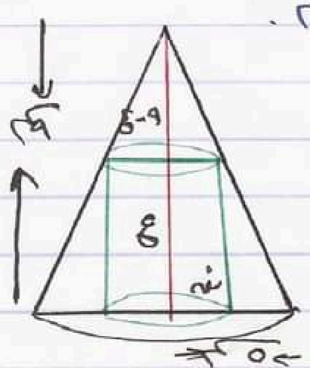
∴ $ح = \pi ع(\frac{4نق^2}{9} - \frac{\frac{8نق^3}{27}}{نق})$

$ح = \pi ع(\frac{4نق^2 \times 3}{9 \times 3} - \frac{8نق^2}{27}) = \pi ع(\frac{12نق^2}{27} - \frac{8نق^2}{27})$

$= \pi ع * \frac{4نق^2}{27} = \frac{4}{9}(\frac{1}{3}نق^2 \pi ع)$

$= \frac{4}{9}$ حجم المخروط

س١٧ جد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات اكبر حجم والتي يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم نصف قطره (٥)سم وارتفاعه ٩ سم.




الحل: حجم الاسطوانة = $ح = نق^2 \pi ع$

من تشابه المثلثات $\Leftarrow \frac{9}{5} = \frac{9-ع}{نق} \Rightarrow \frac{9}{5}نق = 9 - ع$

$ع = 9 - \frac{9}{5}نق = 9(1 - \frac{1}{5}نق)$

∴ $ح = نق^2 \pi 9(1 - \frac{نق}{5}) = 9\pi(نق^2 - \frac{نق^3}{5})$

$ح' = 9\pi(2نق - \frac{3نق^2}{5}) \Rightarrow ح' = 0$ ∴ $2نق = \frac{3نق^2}{5} \Rightarrow \boxed{نق = \frac{10}{3}}$

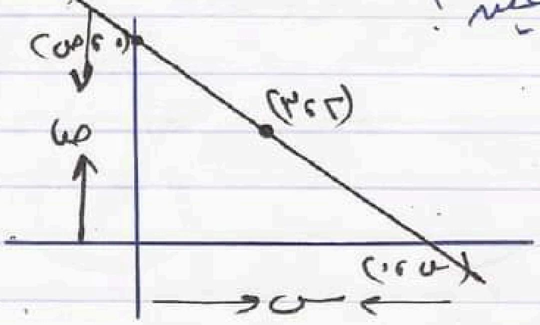
$ح'' = 9\pi(2 - \frac{6نق}{5}) \Rightarrow ح''(\frac{10}{3}) = 9\pi(2-4) = -18\pi < 0$

∴ عندما $نق = \frac{10}{3}$ قيمة عظمى

$\Rightarrow ع = 9(1 - \frac{نق}{5}) = 9(1 - \frac{\frac{10}{3}}{5}) = 9(1 - \frac{2}{3}) = 9 \times \frac{1}{3} = \boxed{3}$

∴ $\boxed{ع = 3}$

س15: جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2، 3) بحيث يصنع مع المحورين في الربع الأول مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن؟




الحل: مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ س ص

لكن من ميل المستقيم نكون

$\frac{ص}{س} = \frac{3}{س-2} \Rightarrow \boxed{ص = \frac{3س}{س-2}}$

∴ مساحة المثلث $=$ م $= \frac{1}{2}$ س $\times \frac{3س}{س-2} = \frac{3}{2}\,\frac{س^2}{س-2}$

$م' = \frac{3}{2}\left(\frac{(س-2)\,2س - س^2 \times 1}{(س-2)^2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{س^2-4س}{(س-2)^2}\right)$

$م' = 0 \Rightarrow س^2 - 4س = 0 \Rightarrow س(س-4) = 0$ ∴

إما $س = 4$ أو $س = 0$ (مرفوضة)

إشارة م'


$م'(3) < 0$ ، $م'(5) > 0$

∴ عند $س = 4$ قيمة صغرى

$ص = \frac{3 \times 4}{4-2} = \boxed{6}$

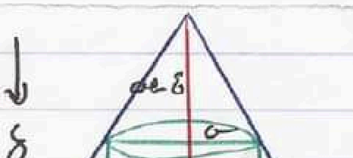
∴ معادلة المستقيم هي $\frac{ص-3}{س-2} = \frac{0-3}{4-2}$

$\Rightarrow \frac{ص-3}{س-2} = \frac{-3}{2} \Rightarrow ص - 3 = \frac{-3}{2}(س-2)$

$ص - 3 = \frac{-3س}{2} + 3$

$ص = \frac{-3}{2}س + 6$

س16: برهن أن أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{4}{9}$ حجم المخروط




الحل: حجم الأسطوانة $=$ ح $= س^2 \pi$ ص

لكن من تشابه المثلثات نكون

$\frac{ع}{نق} = \frac{ع-ص}{س} \Rightarrow \frac{س\,ع}{نق} = ع - ص$

$ص = ع\left(1 - \frac{س}{نق}\right)$

س١: لوح من الصفيح على شكل مستطيل محيطه ٣٦ سم، طوله س سم وعرضه ص سم. إذا حول هذا اللوح إلى اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ص سم ومحيط قاعدتها س سم، أوجد قيمتي س، ص اللتان تجعلان حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن؟

الحل: محيط لوح الصفيح = ٢س + ٢ص = ٣٦ ⇐ $\boxed{\text{ص} = ١٨ - \text{س}}$

محيط قاعدة الاسطوانة = ٢ نق π = س ⇐ نق = $\frac{\text{س}}{٢\pi}$

حجم الاسطوانة = نق² π ص = $\frac{\text{س}^٢}{٤\pi^٢} \times \pi$ (١٨ − س)

ح = $\frac{١}{٤\pi}$ (١٨ س² − س³)

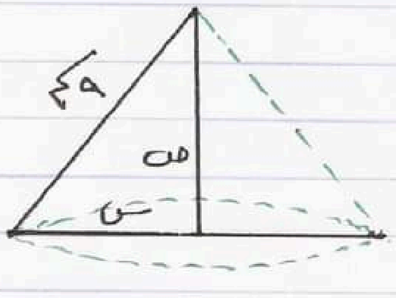
ح' = $\frac{١}{٤\pi}$ (٣٦ س − ٣ س²) ⇐ ح' = ٠ إذن ٣٦ س − ٣ س² = ٠

⇐ $\boxed{\text{س} = ١٢}$

ح'' = $\frac{١}{٤\pi}$ (٣٦ − ٦ س) ⇐ ح''(١٢) = $\frac{١}{٤\pi}$ (٣٦ − ٧٢) < صفر

∴ عندما س = ١٢ قيمة عظمى ⇐ ص = ١٨ − ١٢ = ٦ ⇐ $\boxed{\text{ص} = ٦}$

س٢: مثلث قائم الزاوية طول وتره ٩ سم وطول كل من ضلعي القائمة س، ص سم. إذا دار المثلث دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة، فما أكبر حجم ممكن للمخروط الناشئ؟




الحل: حجم المخروط الناشئ = $\frac{\pi}{٣}$ س² ص

لكن س² + ص² = ٨١

$\boxed{\text{س}^٢ = ٨١ - \text{ص}^٢}$

∴ ح = $\frac{\pi}{٣}$ (٨١ − ص²) ص

ح = $\frac{\pi}{٣}$ (٨١ ص − ص³) ⇐ ح' = $\frac{\pi}{٣}$ (٨١ − ٣ ص²)

ح' = ٠ ⇐ ٨١ − ٣ ص² = ٠ ⇐ ص = $\sqrt{٢٧}$

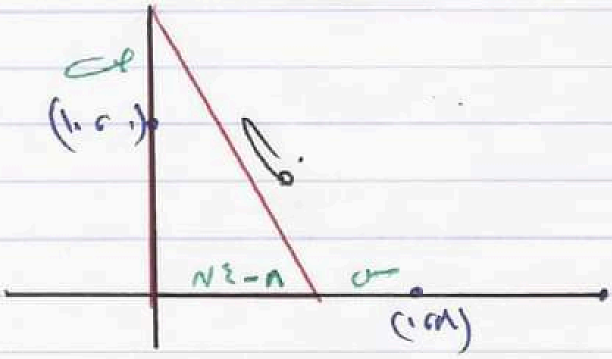
ح'' = −٢ π ص ، ح''($\sqrt{٢٧}$) < صفر ∴ عندما ص = $\sqrt{٢٧}$

قيمة عظمى

∴ ح = $\frac{\pi}{٣}$ (٨١ $\sqrt{٢٧}$ − ٢٧ $\sqrt{٢٧}$) = $\frac{\pi}{٣}$ × ٥٤ $\sqrt{٢٧}$ = ١٨ π × ٣ $\sqrt{٣}$

⇐ ح = ٥٤ $\sqrt{٣}$ π سم³

س٣: بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة (٨،٠) باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٤كم/س وفي نفس اللحظة بدأت نقطة أخرى الحركة على محور الصادات من النقطة (٠،١٠) مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢كم/س. متى يكون البعد بين النقطتين أقل ما يمكن؟




الحل: س = ٤ن ، ص = ٢ن

ف = √((٨ − ٤ن)² + (١٠ + ٢ن)²)

ف' = (−٨(٨ − ٤ن) + ٤(١٠ + ٢ن)) / (٢√((٨ − ٤ن)² + (١٠ + ٢ن)²))

ف' = ٠ ⟸ ٨(٨ − ٤ن) = ٤(١٠ + ٢ن)

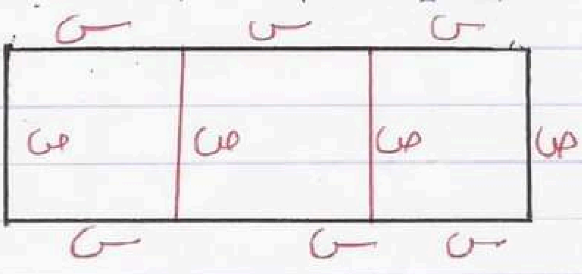
⟸ ١٦ − ٨ن = ١٠ + ٢ن ⟸ ١٠ن = ٦ ⟸ ن = ٠,٦ س

اشارة ف' : − − − ٠,٦ + + + +

عندما ن = ٠,٦ ف' صفر

∴ عندما ن = ٠,٦ يكون البعد بين النقطتين أقل ما يمكن.

س٤: لدى رجل حقل مستطيل يريد احاطته بسياج ثم قسمته الى ثلاثة أقسام متطابقة بسياج موازٍ لأحد أضلاعه، فاذا كان لديه ١٠٠٠م من السياج فأوجد أكبر مساحة يمكن احاطتها بالسياج؟




الحل: طول السياج = ٦س + ٤ص

١٠٠٠ = ٦س + ٤ص

٥٠٠ = ٣س + ٢ص

٣س = ٥٠٠ − ٢ص

مساحة القطعة = ٣س × ص

م = (٥٠٠ − ٢ص) ص

م = ٥٠٠ص − ٢ص²

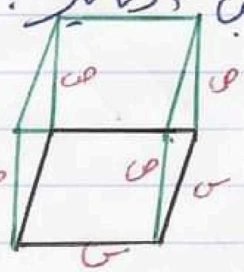
م' = ٥٠٠ − ٤ص ⟸ م' = ٠ ∴ ص = ١٢٥

م'' = −٤ ∴ عندما ص = ١٢٥ م عظمى

م = ٥٠٠ × ١٢٥ − ٢(١٢٥)² = ٦٢٥٠٠ − ٣١٢٥٠

= ٣١٢٥٠ م²

س ٣٦ :- يراد صنع صندوق من الخشب الرقيق بدون غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، جد أكبر حجم ممكن للصندوق بحيث تبلغ تكاليف صناعته ١٤٤ ديناراً علماً بأن تكلفة المتر المربع الواحد من الخشب ٣ دنانير ؟




الحل :- حجم الصندوق = ح = س² ص

التكاليف = ١٤٤ = ٣ ( س² + ٤ س ص )

٤٨ = س² + ٤ س ص

ص = (٤٨ − س²) / (٤ س)

∴ ح = س² × (٤٨ − س²) / (٤ س) ⟸ ح = ¼ ( ٤٨ س − س³ )

ح′ = ¼ ( ٤٨ − ٣ س² ) ⟸ ح′ = ٠ إذن ٤٨ − ٣ س² = ٠

س² = ١٦ ⟸ س = ±٤ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٤}$

ح″ = − ٦/٤ س ⟸ ح″(٤) = −٦ < ٠ ⟸ عندما س = ٤ نهاية عظمى

∴ ح = ¼ ( ٤٨ × ٤ − ٤³ ) = ¼ ( ٤٨ × ٤ − ٦٤ ) = ٣٢ م³ .

س ٣٧ : اوجد أكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين علبة مصنوعة من صفيحة معدنية مساحتها ٦٠٠ ط سم²

الحل :- حجم الاسطوانة = نق² ط ع

∴ المساحة الكلية = ٢ نق² ط + ٢ نق ط ع

٦٠٠ ط = ٢ نق² ط + ٢ نق ط ع

٦٠٠ − ٢ نق² = ٢ نق ع ⟸ ع = (٦٠٠ − ٢ نق²) / (٢ نق) = (٣٠٠ − نق²) / نق

∴ ح = ط نق² ( (٣٠٠ − نق²) / نق ) = ط ( ٣٠٠ نق − نق³ )

ح′ = ط ( ٣٠٠ − ٣ نق² ) ⟸ ح′ = ٠ إذن ٣٠٠ = ٣ نق² ⟸ نق = ١٠

ح″ = −٦ ط نق ⟸ ح″(١٠) < ٠ ⟸ عندما نق = ١٠ نهاية عظمى

⟸ ح = ط ( ٣٠٠ × ١٠ − (١٠)³ ) = ٢٠٠٠ ط سم³

⇐ م = ٨٠ − ٣ × ٢٤/ص − ٢ ص

م' = ٧٢/ص² − ٢ ⇐ ∵ م' = ٠ ⇐ ٧٢/ص² = ٢ ⇐ ص² = ٣٦

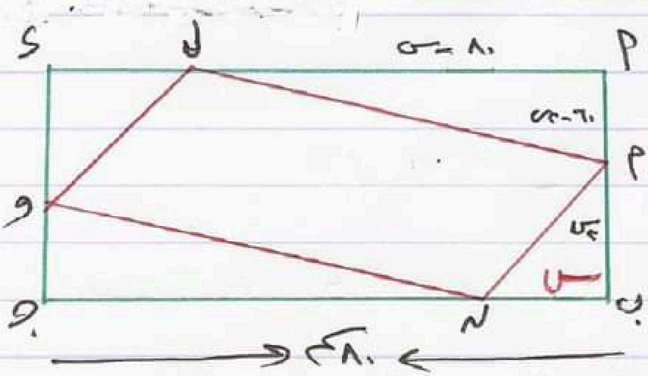
⇐ ص = √٣٦ = ٦

إشارة م'
+ + + ٦ − − −

∴ عندما ص = ٦ قيمة عظمى

س = ٢٤/ص = ٢٤/٦ = ٤ إذن مرحلة س، ص هي (٤ ، ٦)

س٤٤ أب جـ د مستطيل فيه أب = ٦٠ سم، ب جـ = ٨٠ سم، هـ و ن ل متوازي أضلاع تماماً الشكل، ما قيمة س التي تجعل مساحة متوازي الأضلاع أكبر ما يمكن علماً بأن هـ ب = ٢ ب ن




الحل ∴ مساحة متوازي الأضلاع = مساحة المستطيل − (مجموع مساحات المثلثات المتطابقة)

= ٦٠ × ٨٠ − (٢(س × ٢س) + ٢(٨٠ − س)(٦٠ − ٢س))

م = ٤٨٠٠ − (٤س² + ٢(٤٨٠٠ − ١٦٠س − ٦٠س + ٢س²))

م = ٤٨٠٠ − (٤س² + ٩٦٠٠ − ٤٤٠س + ٤س²)

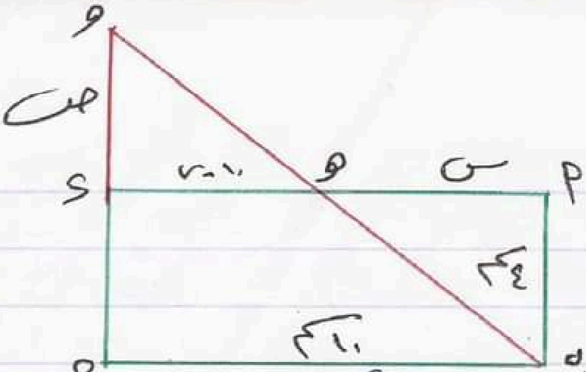
م = −٨س² + ٤٤٠س − ٤٨٠٠

م' = −١٦س + ٤٤٠ ⇐ ∵ م' = ٠ ⇐ −١٦س + ٤٤٠ = ٠

س = ٤٤٠/١٦ = ٢٧٫٥

م'' = −١٦ < ٠ ∴ عندما س = ٢٧٫٥ قيمة عظمى

∴ س = $\boxed{٢٧٫٥}$




س٤٧: أ ب جـ د مستطيل كما في الشكل حيث أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، مد الضلع جـ د على استقامته الى و ، وصل ب و فقطع أ د في هـ ، أ هـ = س ، د و = ص ، اوجد قيمتي س ، ص لتكون مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، أ هـ ب اصغر ما يمكن (توجيهي منهاج ١٩٩٤)

الحل: هـ د = ١٠ - س

مجموع مساحتي المثلثين د هـ و ، أ هـ ب = م = $\frac{1}{2}$ × س × ٤ + $\frac{1}{2}$ ص × (١٠ - س)

∴ م = ٢س + $\frac{1}{2}$ ص (١٠ - س)

المثلثان أ هـ ب ، د هـ و متشابهان ⟸ $\frac{س}{٤} = \frac{١٠ - س}{ص}$

⟸ ص = $\frac{٤(١٠ - س)}{س}$ ⟸ م = ٢س + $\frac{1}{2}$ × $\frac{٤(١٠ - س)}{س}$ × (١٠ - س)

م = ٢س + $\frac{٢}{س}$ (١٠ - س)² = ٢س + $\frac{٢}{س}$ (١٠٠ - ٢٠س + س²)

م = ٢س + $\frac{٢٠٠}{س}$ - ٤٠ + ٢س ⟸ م = ٤س + $\frac{٢٠٠}{س}$ - ٤٠

م' = ٤ - $\frac{٢٠٠}{س^2}$ ⟸ م' = ٠ ⟸ ٤س² = ٢٠٠ ⟸ س² = ٥٠

⟸ س = ٥$\sqrt{2}$

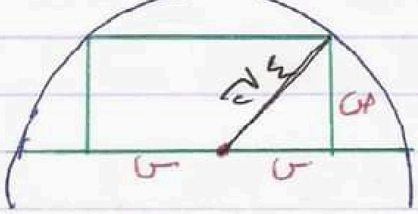
إشارة م'

∴ عند س = ٥$\sqrt{2}$ قيمة صغرى

∴ ص = $\frac{٤(١٠ - س)}{س}$ ⟸ $\frac{٤(١٠ - ٥\sqrt{2})}{٥\sqrt{2}}$

ص = ٤ ($\frac{١٠}{٥\sqrt{2}}$ - $\frac{٥\sqrt{2}}{٥\sqrt{2}}$) = ٤ ($\sqrt{2}$ - ١)

س٤٨: جد أبعاد أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها ٤$\sqrt{2}$ بحيث ينطبق أحد أضلاعه على قطر الدائرة




الحل: مساحة المستطيل = ٢س × ص

م = ٢س ص

لكن س² + ص² = (٤$\sqrt{2}$)² ⟸ ص = $\sqrt{٣٢ - س^2}$

∴ م = ٢س $\sqrt{٣٢ - س^2}$ = ٢ $\sqrt{٣٢س^2 - س^4}$

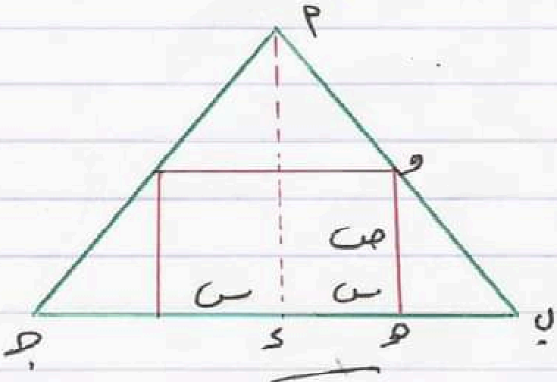
م' = ٢ × $\frac{٦٤س - ٤س^3}{٢\sqrt{٣٢س^2 - س^4}}$ ⟸ م' = ٠ ⟸ ٦٤س - ٤س³ = ٠

٤س (١٦ - س²) = ٠ ∴ س = ٠ اهمال ، س² = ١٦

⟸ س = ٤ لان -٤ مرفوضة ، نعند س = ٤ قيمة عظمى

⟸ ص = $\sqrt{٣٢ - ١٦}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ ⟸ أبعاد المستطيل ٨ ، ٤

س٥٣: Δ أ ب جـ متساوي الساقين طول قاعدته ١٤ كم، وارتفاعه ١٠ كم، أثبت أن مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث يقع رأسان من رؤوس المستطيل على قاعدة المثلث ويقع كل رأس من الرأسين الآخرين على ساق من ساقي المثلث تكون مساوية لنصف مساحة سطح المثلث؟




الحل: د منتصف ب جـ ⇐ ب د = ٧ كم

∴ ب هـ = ٧ − س

من تشابه المثلثات تكون $\frac{أد}{وهـ} = \frac{ب د}{ب هـ}$

⇐ $\frac{١٠}{ص} = \frac{٧}{٧ - س}$ ⇐ ص = $\left(\frac{٧٠ - ١٠س}{٧}\right)$

مساحة المستطيل = ٢س × ص

م = ٢س $\left(\frac{٧٠ - ١٠س}{٧}\right)$ = $\frac{١٤٠س - ٢٠س^٢}{٧}$

م′ = $\frac{١٤٠ - ٤٠س}{٧}$ ⇐ م′ = صفر إذن $\boxed{س = ٣,٥}$

م″ = $\frac{-٤٠}{٧}$ < ٠ ∴ عندما تكون س = ٣,٥ م نهاية عظمى

∴ مساحة المستطيل = $\frac{١٤٠ × ٣,٥ - ٢٠(٣,٥)^٢}{٧}$ = $\frac{٤٩٠ - ٢٤٥}{٧}$

= $\frac{٢٤٥}{٧}$ = ٣٥ كم²

لكن مساحة المثلث = ½ × ١٤ × ١٠ = ٧٠ كم²

∴ مساحة المستطيل = ½ مساحة المثلث.

س٥٤: سلك طوله (٦٠ سم) قطع إلى جزأين طول أحدهما س سم، ثم ثني كل جزء فتكون من منهما مستطيل طوله ضعف عرضه، أوجد بعدي كل مستطيل ليكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن؟

الحل: طول الجزء الأول س ⇐ طول الجزء الآخر = ٦٠ − س

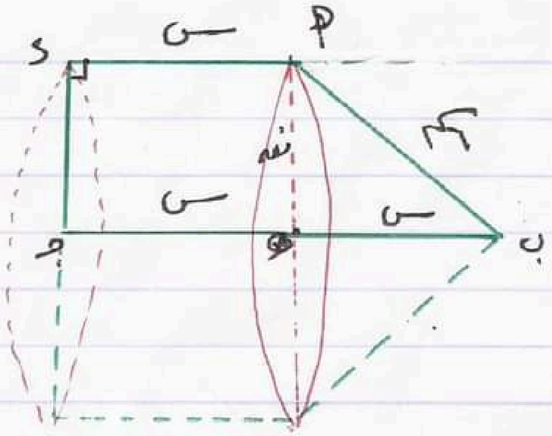
نفرض المستطيل الأول طوله ص ⇐ عرضه = ٢ص

" الثاني طوله ع ⇐ عرضه = ٢ع

محيط المستطيل الأول = س = ٢ص + ٤ص ⇐ س = ٦ص ⇐ ص = $\frac{س}{٦}$

" الثاني = ٦٠ − س = ٢ع + ٤ع ⇐ س = ٦٠ − ٦ع ⇐ ع = $\frac{-س + ٦٠}{٦}$

س٥٩ : أ ب جـ د شبه منحرف طول ب جـ ضعف طول أ د ، ق(أ د جـ) = ق(د جـ ب) = ٩٠°
طول أ ب = ٦ كم ثابت الشكل المجاور
تم تدوير الشكل حول الضلع ب جـ
جد أكبر حجم للجسم الناتج عن الدوران




الحل : الجسم الناتج هو عبارة عن اسطوانة + مخروط

نفرض أن أ د = س ⟸ ب هـ = هـ جـ = س

حجم الجسم الناتج = حجم الاسطوانة + حجم المخروط

$ح = نق^2 \pi \times س + \frac{1}{3} نق^2 \pi س$

$ح = \pi نق^2 (س + \frac{س}{3}) = \frac{4\pi}{3} نق^2 س$

لكن $نق^2 = 36 - س^2 \Leftarrow ح = \frac{4\pi}{3}(36 - س^2)س$

$ح = \frac{4\pi}{3}(36س - س^3)$

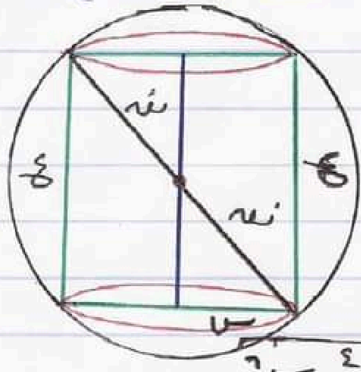
$ح' = \frac{4\pi}{3}(36 - 3س^2) \Leftarrow ح' = 0 \therefore$ إذن $س = \sqrt{12}$

$ح'' = \frac{4\pi}{3} \times -6س \Leftarrow ح''(\sqrt{12}) < 0$ إذن عظمى عندما $س = \sqrt{12}$
نهاية عظمى

$\therefore ح = \frac{4\pi}{3}(36 \times \sqrt{12} - (\sqrt{12})^3) = \frac{4\pi}{3}(36\sqrt{12} - 12\sqrt{12})$

$ح = \frac{4\pi}{3} \times 24\sqrt{12} = 32\pi\sqrt{12} = 64\pi\sqrt{3}$ كم³

س٦١: كرة نصف قطرها نق حيث نق ثابت، جد بدلالة نق كلاً من نصف قطر قاعدة وارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التي يمكن رسمها داخل هذه الكرة؟




الحل: حجم الاسطوانة $= س^2 \times \pi \times ع$

$ح = س^2 \pi ع$

لكن $(2س)^2 + ع^2 = (2نق)^2$ (حسب فيثاغورس)

$4س^2 + ع^2 = 4نق^2$

$ع = \sqrt{4نق^2 - 4س^2} = 2\sqrt{نق^2 - س^2}$

$\therefore ح = س^2 \, 2\pi \sqrt{نق^2 - س^2} \Leftarrow ح = 2\pi \sqrt{نق^2 س^4 - س^6}$

$ح' = 2\pi \frac{4نق^2 س^3 - 6س^5}{\cancel{2}\sqrt{نق^2 س^4 - س^6}} \Leftarrow ح' = صفر$ اذن

$\therefore 4نق^2 س^3 - 6س^5 \Leftarrow 2س^3(2نق^2 - 3س^2) = صفر$

اما س = صفر (مرفوض) أو $2نق^2 = 3س^2 \Leftarrow س = \sqrt{\frac{2}{3}}\, نق$

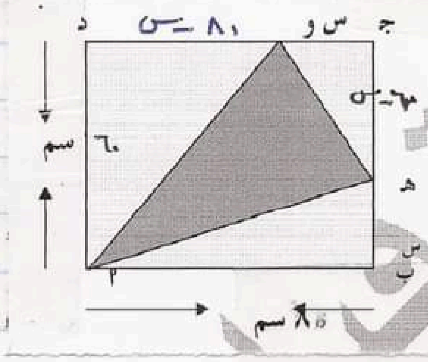
$ح'$: +++ + ----- عند $\sqrt{\frac{2}{3}}\, نق$

$\therefore$ عندما $س = \sqrt{\frac{2}{3}}\, نق$ فهي عظمى

$\Leftarrow$ نصف قطر الاسطوانة $= \sqrt{\frac{2}{3}}\, نق$

ارتفاع الاسطوانة $= ع = 2\sqrt{نق^2 - \frac{2}{3}نق^2} = 2\sqrt{\frac{نق^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, نق$

س٦٢: أراد أحد الأندية تصميم راية له مستطيلة الشكل صفراء اللون وبداخلها مثلث أحمر اللون بحيث: ب هـ = جـ و = س ، كما في الشكل المجاور جد أقل مساحة ممكنة للمثلث أ هـ و ؟




مساحة المثلث أ هـ و = مساحة المستطيل − (مجموع مساحات المثلثات أ ب هـ + هـ جـ و + أ د و)

$م = 60 \times 80 - \left(\frac{1}{2} \times 80 \times س + \frac{1}{2} \times س \times (60 - س) + \frac{1}{2} \times (80 - س) \times 60\right)$

$م = 4800 - \left(40س + \cancel{30س} - \frac{س^2}{2} + 2400 - \cancel{30س}\right)$

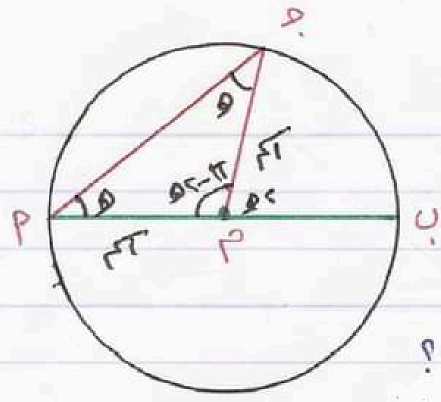
$م = 4800 - 40س + \frac{س^2}{2} - 2400 = 2400 - 40س + \frac{س^2}{2}$

$م' = -40 + س \Leftarrow م' = 0$ اذن $س = 40$

$م'' = 1 > 0$ اذن عندما $س = 40$ فهي صغرى

$\therefore م = 2400 - 40 \times 40 + \frac{(40)^2}{2} = 2400 - 1600 + 800$

$م = 1600$ سم$^2$




س٦٠: دائرة مركزها م طول نصف قطرها ١كم
سارت نملة من أ الى ج عبر الضلع أ ج بسرعة
١٫٥كم/ث ثم سارت من ج الى ب عبر القوس
ب ج للنصف الدائرة ، جد قياس ∠ج أ م التي
تجعل الزمن المستغرق من أ ← ج ← ب أكبر ما يمكن ؟

الحل :. الزمن الكلي = زمن أ ج + زمن ب ج

نفرض أن ∠ج أ م = هـ ⟸ ∠م ج أ = هـ

اذن ∠ أ م ج = π − ٢هـ

زمن أ ج = المسافة / السرعة = أ ج / ١٫٥ = ٢ أ ج / ٣ = ن١

لكن حسب قانون جيب التمام يكون أ ج² = ١² + ١² − ٢×١×١ جتا(π−٢هـ)

(أ ج)² = ٢ + ٢ جتا ٢هـ

أ ج = √(٢+٢جتا٢هـ) = √(٢(١ + جتا٢هـ))

أ ج = √(٢×٢جتا²هـ) = ٢ جتا هـ

∴ ن١ = ٢×٢جتا هـ / ٣ = ٤/٣ جتا هـ

زمن ب ج = طول القوس ب ج / السرعة = نق هـ / ١٫٥ = هـ / ١٫٥ = ٢هـ′ / ٣

ن٢ = ٢هـ′ / ٣

ن = الزمن الكلي = ن١ + ن٢ = ٤/٣ جتا هـ + ٢/٣ هـ′

دن / دهـ = −٤/٣ جا هـ + ٢/٣

∴ = −٤/٣ جا هـ + ٢/٣ ⟸ جا هـ = ١/٢ ⟸ هـ = π/٦

د²ن / دهـ² = −٤/٣ جتا هـ ⟸ عندما هـ = π/٦ ⟸ قيمة عظمى

∴ عندما هـ = π/٦ (٣٠°) قيمة عظمى.

طول أهـ = ٢نق - ع

من نظرية الأوتار المتقاطعة في الدائرة ينتج أن

$$س \times س = ع \times أهـ$$

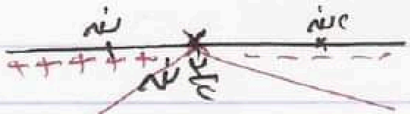
$$س^2 = ع(٢نق - ع) = ٢نق ع - ع^2$$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times ٢س \times ع = س ع$

$$م = \sqrt{٢نق ع - ع^2} \times ع = \sqrt{٢نق ع^3 - ع^4}$$

$$م' = \frac{٦نق ع^2 - ٤ع^3}{2\sqrt{٢نق ع^3 - ع^4}} \Leftarrow م' = صفر \text{ اذن } ٦نق ع^2 = ٤ع^3$$

بما أن $ع \neq ٠$ ⟸ $٦ نق = ٤ع$ ⟸ $ع = \frac{3}{2} نق$




∴ عندما $ع = \frac{3}{2} نق$ قيمة عظمى

⟸ $ب هـ = ع = \frac{3}{2} نق$

$ب هـ = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} هـ = \frac{3}{4} أو \Leftarrow ب هـ = \frac{3}{4} \overline{أو}$

س٥٨ صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه، إذا كان مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته ٧٢ سم جد الابعاد التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن؟

العرض = ص

الطول = ٢ص

الحل: حجم الصندوق = الطول × العرض × الارتفاع

$$ح = ٢ص \times ص \times ع = ٢ص^2 ع$$

لكن $ع + ٢(٢ص + ص) = ٧٢ \Leftarrow ع = ٧٢ - ٦ص$

$$ح = ٢ص^2(٧٢ - ٦ص) \Leftarrow ح = ١٤٤ص^2 - ١٢ص^3$$

$$ح' = ٢٨٨ص - ٣٦ص^2$$

$$٠ = ٣٦ص(٨ - ص) \Leftarrow$$ إما ص = ٠ مرفوض

أو ص = ٨

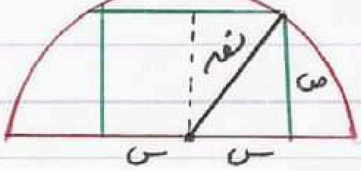
$ح'' = ٢٨٨ - ٧٢ص \Leftarrow ح''(٨) < ٠ \Leftarrow$ عندما ص = ٨ قيمة عظمى

∴ الحجم أكبر ما يمكن عندما يكون الطول = ٢ص = ١٦

العرض = ص = ٨

الارتفاع = ٧٢ - ٦×٨ = ٢٤

س٥٦: أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة طول نصف قطرها (نق) بحيث ينطبق أحد أضلاع المستطيل على قطر نصف الدائرة، ثم أثبت أن النسبة بين مساحة الدائرة ومساحة هذا المستطيل ثابتة




الحل: مساحة المستطيل = ٢س × ص

م = ٢ س ص

لكن س² + ص² = نق² (من نظرية فيثاغورس)

⟸ ص = √(نق² − س²)

∴ م = ٢ س √(نق² − س²) ⟸ م = ٢ √(نق² س² − س⁴)

م′ = ٢ × (٢ س نق² − ٤ س³) / (٢ √(نق² س² − س⁴)) ⟸ م′ = صفر

∴ ٢ س نق² = ٤ س³ ⟸ بالقسمة على ٢ س (س ≠ ٠)

نق² = ٢ س² ⟸ س = نق/√٢

∴ عندما س = نق/√٢ عظمى

∴ م = ٢ × نق/√٢ √(نق² − نق²/٢)

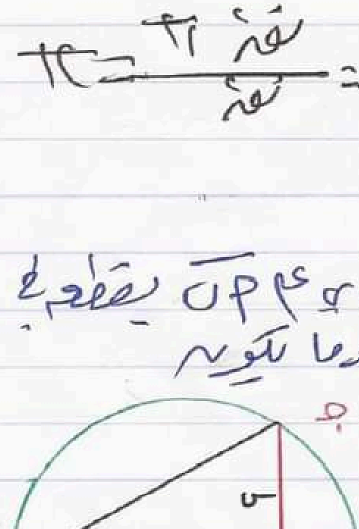
م = √٢ نق √(نق²/٢) ⟸ م = √٢ نق × نق/√٢ = نق²

∴ مساحة المستطيل = نق²

مساحة الدائرة = نق² π ⟸ مساحة الدائرة / مساحة المستطيل = نق² π / نق² = π

وهي نسبة ثابتة.

س٥٧: أب قطر في دائرة، جـ د وتر في الدائرة عمودي على أب يقطعه في هـ. أثبت أن مساحة المثلث ب جـ د تكون أكبر ما يمكن عندما تكون ب هـ = ٣/٤ أب




الحل: بما أن جـ د ⊥ أب ⟸ جـ هـ = هـ د

⟸ ب جـ = ب د ⟸ Δ جـ ب د متساوي الساقين

نفرض أن طول جـ هـ = س ، ب هـ = ع

مساحة المثلث الأول + مساحة المثلث الثاني = م

ص × ٢ص + ع × ٢ع = م

$\frac{س}{٦} \times \frac{٢س}{٦} + \left(\frac{-س+٦٠}{٦}\right) \times ٢\left(\frac{-س+٦٠}{٦}\right) = م$

$\frac{س^٢}{١٨} + \frac{١}{١٨}\left(س^٢ - ١٢٠س + ٣٦٠٠\right) = م$

⇐ $\frac{٢س^٢}{١٨} - \frac{١٢٠}{١٨}س + \frac{٣٦٠٠}{١٨} = م$

$\frac{س^٢}{٩} - \frac{٦٠}{٩}س + \frac{١٨٠٠}{٩} = م$

$\frac{١}{٩}\left(س^٢ - ٦٠س + ١٨٠٠\right) = م$

$م' = \frac{١}{٩}(٢س - ٦٠)$ ⇐ م' = ٠ ∴ اذا س = ٣٠

$م'' = \frac{٢}{٩}$ ، ⇐ عندما س = ٣٠ نهاية صغرى

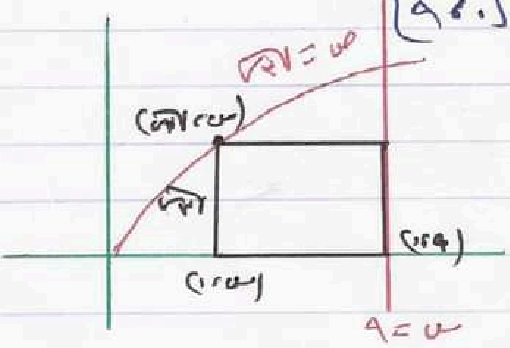
∴ بعدي المثلث الأول هو ص ، ٢ص ⇐ $\frac{٣٠}{٦}$ ، ٢ × $\frac{٣٠}{٦}$ = (٥ ، ١٠)

بعدي المثلث الثاني هو ع ، ٢ع ⇐ $\frac{-س+٦٠}{٦}$ ، ٢$\left(\frac{-س+٦٠}{٦}\right)$

⇐ $\frac{٣٠}{٦}$ ، ٢ × $\frac{٣٠}{٦}$ = ٥ ، ١٠

∴ المثلثين متساويين.

س ٥٥: جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث ينطبق أحد أضلاعه على محور السينات وضلعه الآخر على المستقيم س = ٩ ، ورأسه الرابع على منحنى ص = $\sqrt{٣س}$ ، علماً بأن منحنى الدالة معرفة [٠، ٩]



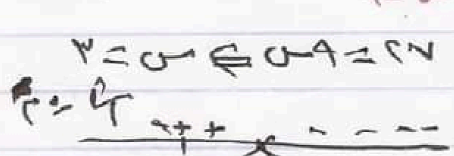

الحل: مساحة المستطيل = الطول × العرض

م = (٩ - س) × $\sqrt{٣س}$

$م' = (٩ - س) \times \frac{٣}{٢\sqrt{٣س}} + \sqrt{٣س} \times -١$

م' = ٠ ⇐ $\frac{٣(٩-س)}{٢\sqrt{٣س}} = \sqrt{٣س}$

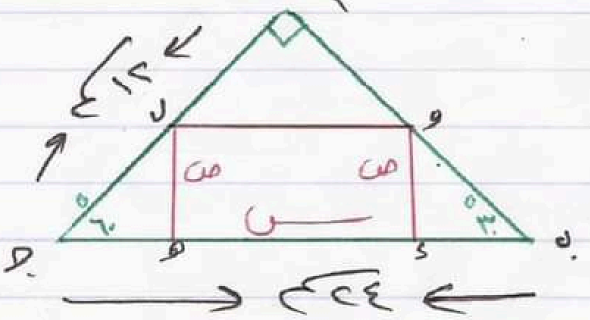
⇐ ٣(٩ - س) = ٢(٣س) ⇐ ٢٧ - ٣س = ٦س ⇐ ٢٧ = ٩س ⇐ س = ٣




عندما س = ٣ نهاية عظمى ⇐ م = (٩ - ٣) $\sqrt{٣ \times ٣}$

= ٦ × ٣ = ١٨ وحدة مربعة.

س٢٥ جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث قائم الزاوية طول وتره (٢٤سم) وقياس إحدى زواياه (٣٠°) بحيث تقع إحدى قاعدتي المستطيل على الوتر والرأسان الآخران على ضلعي القائمة




الحل: نفرض أن طول المستطيل = س

عرض المستطيل = ص

طول الضلع أب = ½ ب جـ = ١٢ سم

مساحة المستطيل = س × ص

Δ و ب د يكون ظا ٣٠° = ص / ب د ⟸ $\boxed{\sqrt{3}\ \text{ص} = \text{ب د}}$

Δ ل هـ جـ يكون ظا ٦٠° = ص / هـ جـ ⟸ هـ جـ = ص / $\sqrt{3}$

س = ٢٤ − (ب د + هـ جـ) = ٢٤ − ($\sqrt{3}$ ص + ص / $\sqrt{3}$)

س = ٢٤ − (٣ص + ص) / $\sqrt{3}$ = ٢٤ − ٤ص / $\sqrt{3}$

∴ مساحة المستطيل = (٢٤ − ٤ص / $\sqrt{3}$) ص

م = ٢٤ص − ٤ص² / $\sqrt{3}$

م′ = ٢٤ − ٨ص / $\sqrt{3}$ ⟸ م′ = صفر ∴ ٢٤ $\sqrt{3}$ = ٨ص

⟸ ص = ٣ $\sqrt{3}$

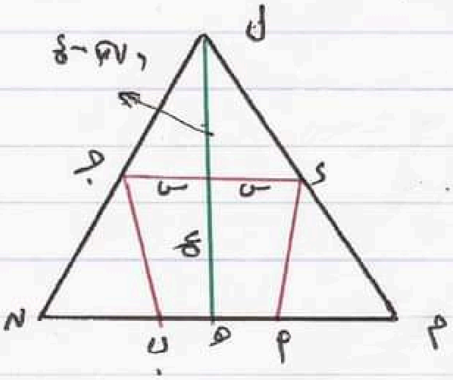
م″ = − ٨ / $\sqrt{3}$ < ٠ ⟸ عندما ص = ٣ $\sqrt{3}$ تكون عظمى

∴ م = مساحة المستطيل = ٢٤ × ٣ $\sqrt{3}$ − ٤(٣ $\sqrt{3}$)² / $\sqrt{3}$

م = ٧٢ $\sqrt{3}$ − (٣٦ × ٣) / $\sqrt{3}$ = ٧٢ $\sqrt{3}$ − ٣٦ $\sqrt{3}$

= ٣٦ $\sqrt{3}$

س٥: ل م ن مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم ، أ ، ب نقطتان ∈ القاعدة م ن بحيث م أ = أ ب = ب ن ، د جـ // م ن ، جد أكبر مساحة لشبه المنحرف أ ب جـ د




الحل: بما أن م أ = أ ب = ب ن ⟸ أ ب = ٤ سم $\left(\frac{١٢}{٣}\right)$

⟸ أ هـ = ٢ سم

مساحة شبه المنحرف = م = $\frac{١}{٢}(٢\text{س} + ٤) \times \text{ع}$

$\text{م} = (\text{س} + ٢) \times \text{ع}$

لكن $\text{ل هـ} = \sqrt{١٢^٢ - ٦^٢} = \sqrt{١٠٨} = ٦\sqrt{٣}$

∵ من التشابه بين المثلثات ⟸ $\frac{\text{ل هـ}}{\text{م هـ}} = \frac{٦\sqrt{٣} - \text{ع}}{\text{س}}$

⟸ $\frac{٦\sqrt{٣}}{٦} = \frac{٦\sqrt{٣} - \text{ع}}{\text{س}}$ ⟸ $\sqrt{٣}\,\text{س} = ٦\sqrt{٣} - \text{ع}$

⟸ $\text{ع} = ٦\sqrt{٣} - \sqrt{٣}\,\text{س}$

∴ $\text{م} = (\text{س} + ٢)(٦\sqrt{٣} - \sqrt{٣}\,\text{س})$

$\text{م} = ٦\sqrt{٣}\,\text{س} - \sqrt{٣}\,\text{س}^٢ + ١٢\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}\,\text{س}$

$\text{م} = ٤\sqrt{٣}\,\text{س} - \sqrt{٣}\,\text{س}^٢ + ١٢\sqrt{٣}$

$\text{م}' = ٤\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}\,\text{س}$ ⟸ م' = صفر ⟸ $\boxed{\text{س} = ٢}$

$\text{م}'' = -٢\sqrt{٣} < ٠$ ∴ عندما س = ٢ قيمة عظمى

∵ $\text{م} = ٤\sqrt{٣}\,\text{س} - \sqrt{٣}\,\text{س}^٢ + ١٢\sqrt{٣}$

$\text{م}(٢) = ٨\sqrt{٣} - ٤\sqrt{٣} + ١٢\sqrt{٣} = ١٦\sqrt{٣}$ سم٢ .

س٥: مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٠ سم وطول ضلعي القائمة س ، ص سم ، جد أكبر قيمة للمقدار س + ٣ص ؟

$\text{م} = \text{س} + ٣\text{ص}$ لكن $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١٠٠$ ⟸ $\text{س} = \sqrt{١٠٠ - \text{ص}^٢}$

∴ $\text{م} = \sqrt{١٠٠ - \text{ص}^٢} + ٣\text{ص}$ ⟸ $\text{م}' = \frac{-٢\text{ص}}{٢\sqrt{١٠٠ - \text{ص}^٢}} + ٣$

م' = ٠ ⟸ $٣ = \frac{\text{ص}}{\sqrt{١٠٠ - \text{ص}^٢}}$

⟸ $٣\sqrt{١٠٠ - \text{ص}^٢} = \text{ص}$ بالتربيع

$٩(١٠٠ - \text{ص}^٢) = \text{ص}^٢$ ⟸ $٩٠٠ = ١٠\text{ص}^٢$ ⟸ $\text{ص}^٢ = ٩٠$ ⟸ $\text{ص} = ٣\sqrt{١٠}$

عندما ص = $٣\sqrt{١٠}$ قيمة عظمى

− − − $٣\sqrt{١٠}$ + + +

⟸ $\text{م} = \sqrt{١٠٠ - ٩٠} + ٣ \times ٣\sqrt{١٠} = \sqrt{١٠} + ٩\sqrt{١٠} = ١٠\sqrt{١٠}$

س٢٩ سلك طوله ٦٠ سم، يُراد قطعه إلى جزئين فنكون من أحدهما مربع ومن الجزء الآخر دائرة، فأين نقطع السلك بحيث تكون مجموع المساحة (أ) أقل ما يمكن (ب) أكبر ما يمكن.

الحل: (أ) مساحة الدائرة = نق$^2$ ط ، مساحة المربع = س$^2$

لكن طول السلك = محيط الدائرة + محيط المربع

$٦٠ = ٢$ نق ط + ٤ س

نق ط = $\frac{٦٠ - ٤س}{٢}$ ⟸ $\boxed{نق = \frac{٣٠ - ٢س}{ط}}$

م = المساحة = مساحة المربع + مساحة الدائرة

= س$^2$ + نق$^2$ ط = س$^2$ + $\left(\frac{٣٠ - ٢س}{ط}\right)^2$ ط

م = س$^2$ + $\frac{١}{ط}$ (٩٠٠ − ١٢٠ س + ٤ س$^2$)

م$'$ = ٢ س + $\frac{١}{ط}$ (−١٢٠ + ٨ س)

م$'$ = ٠ ⟸ $\frac{١٢٠}{ط}$ = ٢ س + $\frac{٨ س}{ط}$ ⟸ س = $\frac{١٢٠ \times ط}{(٢ط + ٨)ط}$

س = $\frac{١٢٠}{٢ط + ٨}$ = $\frac{٦٠}{ط + ٤}$

م$''$ = ٢ + $\frac{٨}{ط}$ > ٠ ∴ عندما س = $\frac{٦٠}{ط + ٤}$ قيمة صغرى

(ب) تحدث القيمة العظمى عندما نعمل مربعاً أو دائرة كاملاً من السلك

المربع: ٤ س = ٦٠ ⟸ س = ١٥ ⟸ مساحة المربع = ١٥ × ١٥ = ٢٢٥ سم$^2$

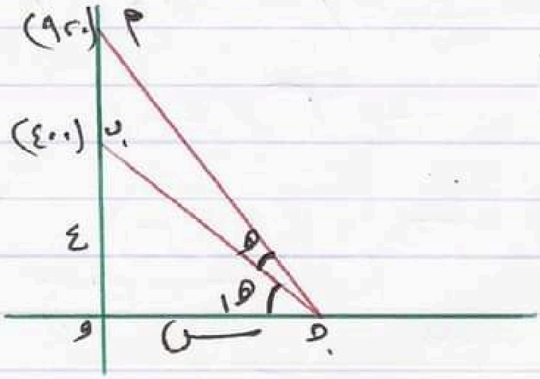
الدائرة: ٢ نق ط = ٦٠ ⟸ نق = $\frac{٣٠}{ط}$

مساحة الدائرة = $\left(\frac{٣٠}{ط}\right)^2$ ط = $\frac{٩٠٠}{ط}$

بما أن $\frac{٩٠٠}{ط}$ > ٢٢٥ ∴ يكون الشكل دائرة.

لتكون المساحة أكبر ما يمكن

س٤٥: أ(٠،٩) ، ب(٠،٤) نقطتان ثابتتان ، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب ، جد الإحداثي السيني للنقطة جـ الذي يجعل قياس الزاوية أجـب أكبر ما يمكن




الحل:

$$ظا هـ = ظا(أجـو - هـ_١) = \frac{ظا(أجـو) - ظا هـ_١}{١ + ظا(أجـو)\, ظا هـ_١}$$

$$ظا هـ = \frac{\frac{٩}{س} - \frac{٤}{س}}{١ + \frac{٩}{س} \times \frac{٤}{س}} = \frac{\frac{٥}{س}}{١ + \frac{٣٦}{س^٢}}$$

$$ظا هـ = \frac{٥س}{س^٢ + ٣٦}$$ بالاشتقاق

$$قا^٢ هـ \frac{دهـ}{دس} = \frac{٥(س^٢ + ٣٦) - ٥س \times ٢س}{(س^٢ + ٣٦)^٢}$$

$$\frac{دهـ}{دس} = \frac{١٨٠ - ٥س^٢}{(س^٢ + ٣٦)^٢\, قا^٢ هـ}$$

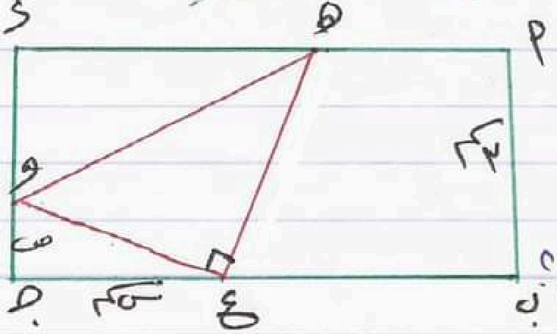
$\frac{دهـ}{دس}$ = صفر ⟸ $١٨٠ - ٥س^٢ = ٠$ ∴ ⟸ س = ٦ ، (−٦) ×

إشارة $\frac{دهـ}{دس}$: + + + ٦ − − −

∴ عندما س = ٦ قيمة عظمى

∴ $\boxed{س = ٦}$

س٤٦: في الشكل المجاور أبجـد مستطيل ، أب = ٣سم طويت الزاوية أدهـ حول الخط هـو حتى انطبق الرأس د على المستقيم ب جـ في النقطة ع ، جـع = س سم ، جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث وجـع؟




الحل: نفرض جـو = ص ⟸ مساحة المثلث وجـع = ½ س × ص

لكن ود = وع ⟸ $٣ - ص = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

⟸ $٩ - ٦ص + ص^٢ = س^٢ + ص^٢$ ⟸ $٦ص = ٩ - س^٢$

$ص = \frac{٩ - س^٢}{٦}$

∴ $م = \frac{١}{٢} س \times \left(\frac{٩ - س^٢}{٦}\right) = \frac{١}{١٢}(٩س - س^٣)$

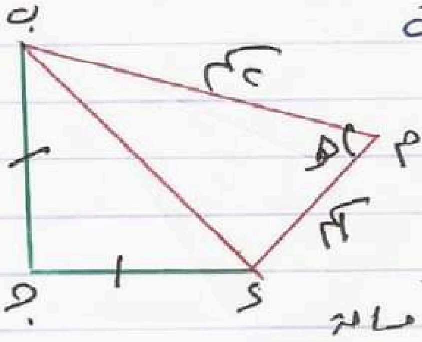
$م' = \frac{١}{١٢}(٩ - ٣س^٢)$ ⟸ ∴ م' = ٠ ⟸ $٩ = ٣س^٢$ ⟸ $س = \sqrt{٣}$

$م'' = -\frac{١}{٢} س$ ⟸ $م''(\sqrt{٣}) < ٠$ ∴ عندما $س = \sqrt{٣}$ قيمة عظمى

∴ $\boxed{س = \sqrt{٣}}$

$م = \frac{١}{١٢}(٩س - س^٣)$ ⟸ $\frac{١}{١٢}(٩\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣}) = \frac{١}{١٢} \times ٦\sqrt{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سم٢

س٤٤ في الشكل جـ د = ب جـ ، جـ زاوية قائمة ، م ب ثابتة وطولها = ٢ سم ، م د يدور في مستوى الشكل وطوله ثابت = ١ سم ، جد قياس الزاوية هـ لتكون مساحة الشكل الرباعي ب جـ د م أكبر ما يمكن




الحل: مساحة الشكل الرباعي ب جـ د م = مساحة △ ب جـ د + مساحة △ م د ب

م = ½ × ١ × ٢ جا هـ + ½ جـ د × ب جـ

$\boxed{\text{م} = \text{جا هـ} + \tfrac{1}{2}(\text{جـ د})^2}$ --- ①

لكن ٢ (جـ د)² = (ب د)² = ٢² + ١² − ٢ × ٢ × ١ جتا هـ

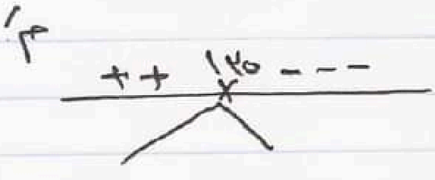
٢ (جـ د)² = ٥ − ٤ جتا هـ ⟸ (جـ د)² = ٢.٥ − ٢ جتا هـ

① ⟸ ∴ م = جا هـ + ½ (٢.٥ − ٢ جتا هـ)

م = جا هـ + ١.٢٥ − جتا هـ

م' = جتا هـ + جا هـ ⟸ م' = ٠ ⟸ جتا هـ + جا هـ = ٠

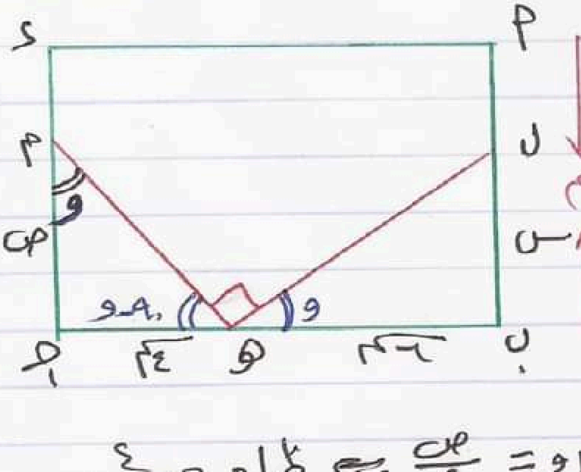
⟸ جا هـ = − جتا هـ ⟸ ظا هـ = −١ ⟸ هـ = ١٣٥°




∴ عندما هـ = ١٣٥° فهي عظمى

س٤٣ الشكل المجاور يمثل مستطيل ، جد قيمة س ، ص لتكون مساحة الشكل أ ل هـ م د أكبر ما يمكن

توجيهي فلسطين (٨٦)




الحل: مساحة الشكل = مساحة المستطيل − [مساحة △ ل ب هـ + مساحة △ هـ جـ م]

م = ٨ × ١٠ − (½ × ٦ × س + ½ × ٤ × ص)

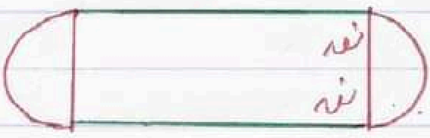
م = ٨٠ − ٣ س − ٢ ص

لكن ظا هـ = س/٦ و ظا(٩٠ − هـ) = ظتا و = ص/٤ ⟸ ظا و = ٤/ص

∴ س/٦ = ٤/ص ⟸ س = ٢٤/ص

⟸

س٤ـ يراد اقامة سياج حول قطعة ارض ع شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة فاذا كانت تكلفة المتر الواحد من السياج ع الجانبين المستقيمين = ٤ دنانير وع الاجزاء المنحنية ٦ دنانير، ما اكبر مساحة ممكنة عندما احاطها بسياج تكلفته ٤٠٠ دينار




الحل: تكلفة السياج = $2$ س $\times 4 + 2$ نق $\pi \times 6$

$400 = 8$ س $+ 12$ نق $\pi$

$\dfrac{400 - 12 \text{ نق } \pi}{8} =$ س

مساحة القطعة = م = مساحة المستطيل + مساحة الدائرة

م = $2$ نق $\times$ س $+$ نق$^2 \pi$

م = $2$ نق $\times \dfrac{4(100 - 3 \text{ نق } \pi)}{8} +$ نق$^2 \pi$

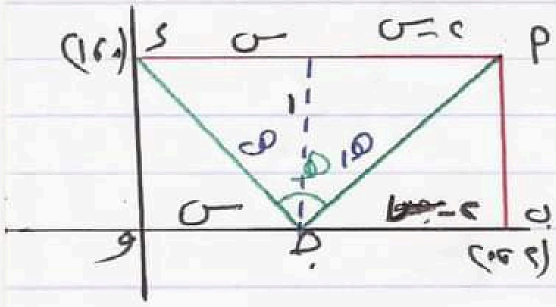
م = $100$ نق $- 3$ نق$^2 \pi +$ نق$^2 \pi = 100$ نق $- 2$ نق$^2 \pi$

م$' = 100 - 4$ نق $\pi$ $\Leftarrow$ م$' = 0$ $\Leftarrow$ نق $= \dfrac{25}{\pi}$

م$'' = -4\pi$ ∴ اذن عندما نق $= \dfrac{25}{\pi}$ فهي عظمى

م $= 100 \times \dfrac{25}{\pi} - 2 \times \dfrac{625}{\pi^2} \times \pi = \dfrac{2500}{\pi} - \dfrac{1250}{\pi} = \dfrac{1250}{\pi}$

س٤ـ أ ب و د مستطيل كما هو موضح بالشكل ما طول جـ و ليكون قياس هـ اكبر ما يمكن




الحل:

ظا هـ = ظا(هـ١ + هـ٢) = $\dfrac{\text{ظا هـ١} + \text{ظا هـ٢}}{1 - \text{ظا هـ١ ظا هـ٢}}$

ظا هـ = $\dfrac{\frac{\text{س}}{1} + \frac{2-\text{س}}{1}}{1 - (\frac{\text{س}}{1})(\frac{2-\text{س}}{1})} = \dfrac{2}{1 - 2\text{س} + \text{س}^2} = \dfrac{2}{(\text{س} - 1)^2}$

قا² هـ $\dfrac{د\text{هـ}}{د\text{س}} = \dfrac{-2(\text{س} - 1) \times 2}{(\text{س} - 1)^4}$

$\dfrac{د\text{هـ}}{د\text{س}} = 0$ ∴ $\Leftarrow$ $(\text{س} - 1) = 0$ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{س} = 1}$

اشارة هـ'

+ + + + | - - - -

اذن عندما س = ١ تكون هـ عظمى.

$\Leftarrow$ هـ = $90°$

س٣٨: جد أقل كمية من المعدن اللازم لصنع مكيال للزيت على شكل أسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين سعته $٢٠٠٠\pi$ سم$^3$.

الحل: الكمية = المساحة الكلية للأسطوانة

$ل = ٢ نق^2 \pi + ٢ نق \pi ع$

$\because$ حجم الأسطوانة $= ٢٠٠٠\pi = نق^2 \pi ع \Leftarrow ع = \frac{٢٠٠٠}{نق^2}$

$\therefore ل = ٢ نق^2 \pi + ٢ نق \pi \times \frac{٢٠٠٠}{نق^2}$

$\boxed{ل = ٢ نق^2 \pi + \frac{٤٠٠٠\pi}{نق}} \Leftarrow ل' = ٤ نق \pi - \frac{٤٠٠٠\pi}{نق^2}$

$ل' = ٠ \Leftarrow ٤ نق \pi = \frac{٤٠٠٠\pi}{نق^2} \Leftarrow نق^3 = ١٠٠٠ \Leftarrow \boxed{نق = ١٠}$

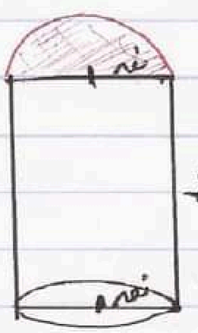
إشارة $ل'$: $- - - | + + +$

عندما نق = ١٠ قيمة صغرى

$\therefore ل = ٢(١٠)^2 \pi + \frac{٤٠٠٠\pi}{١٠} = ٢٠٠\pi + ٤٠٠\pi$

$= ٦٠٠\pi$ سم$^2$.

س٣٩: خزان مائي اسطواني الشكل سعته $(٣٠٠٠\pi)$ م$^3$ يكلف المتر المربع من القاعدة ٤ دنانير ومن الجوانب ديناريه، غطاء الخزان على شكل نصف كرة مجوفة، يكلف المتر المربع منه ديناراً واحداً، ما أبعاد الخزان لتكون كلفته صنعه أقل ما يمكن




الحل: حجم الأسطوانة $= نق^2 \pi ع \Leftarrow ٣٠٠٠\pi = نق^2 \pi ع$

$\therefore ع = \frac{٣٠٠٠}{نق^2}$

التكلفة = ت = تكلفة قاعدة الأسطوانة + الجوانب + نصف الكرة

$ت = ٤ نق^2 \pi + ٢ \times ٢ نق \pi ع + ١ \times \frac{١}{٢} \times ٤ نق^2 \pi$

$ت = ٤ نق^2 \pi + ٤ نق \times \frac{٣٠٠٠\pi}{نق^2} + ٢ نق^2 \pi$

$ت = ٦ نق^2 \pi + \frac{١٢٠٠٠\pi}{نق}$

$ت' = ١٢ نق \pi - \frac{١٢٠٠٠\pi}{نق^2} \Leftarrow ت' = ٠ \therefore$ إذن $١٢ نق \pi = \frac{١٢٠٠٠\pi}{نق^2}$

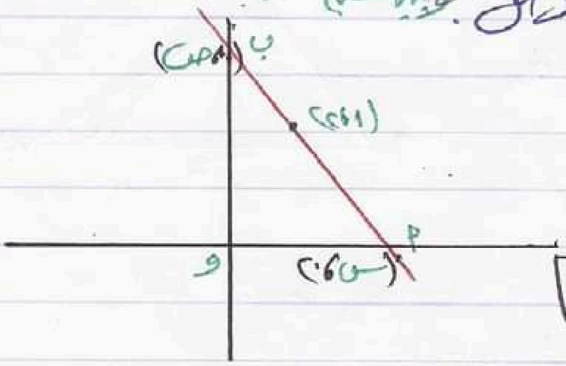
$\Leftarrow نق^3 = ١٠٠٠ \Leftarrow \boxed{نق = ١٠}$

إشارة $ت'$: $- - - | + + +$

عندما نق = ١٠ قيمة صغرى

$\Leftarrow ع = \frac{٣٠٠٠}{١٠٠} = ٣٠ \Leftarrow نق = ١٠$ م ، $ع = ٣٠$ م

س٣٤: مستقيم يمر بالنقطة ج(١، ٢) ويقطع محور السينات في النقطة أ(س، ٠) ومحور الصادات في النقطة ب(صفر، ص) حيث س > ٠، ص > ٠ جد أقل مساحة ممكنة للمثلث أ ب و حيث و نقطة الأصل. توجيهي فلسطين ١٩٨١؟




الحل:

$م = \frac{1}{2} س \times ص$

$م = \frac{1}{2} س \times \frac{٢س}{س-١}$

$م = \frac{س^2}{س-١}$

$م' = \frac{٢س(س-١) - س^2}{(س-١)^2}$

$م' = \frac{س^2 - ٢س}{(س-١)^2}$

الميل:

$\frac{ص}{س} = \frac{٢}{س-١} \Leftarrow \boxed{ص = \frac{٢س}{س-١}}$

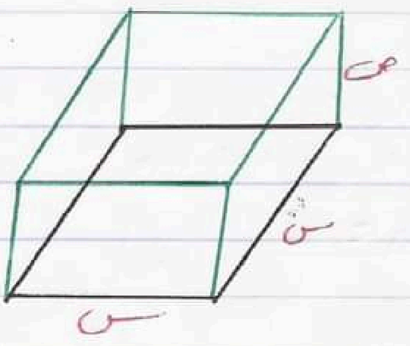
∴ $م' = ٠ \Leftarrow س^2 - ٢س = ٠ \Leftarrow$ ∴ $س(س-٢) = ٠ \Leftarrow س = ٢$ أو $س = ٠$ ×

إشارة م': $- - - \underset{٢}{\times} + + + +$

عندما س = ٢ يوجد صغرى

∴ $م = \frac{(٢)^2}{٢-١} = ٤$ وحدة مربعة

س٣٥: صندوق بلا غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل حجمه ٣٢ سم³، جد أبعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة في صنعه أقل ما يمكن؟




الحل: كمية المادة المستخدمة في صنعه =

$ك = س^2 + ٤ س ص$

لكن حجم الصندوق = $س^2 ص = ٣٢$

∴ $ص = \frac{٣٢}{س^2}$

∴ $ك = س^2 + ٤س \times \frac{٣٢}{س^2} \Leftarrow ك = س^2 + \frac{١٢٨}{س}$

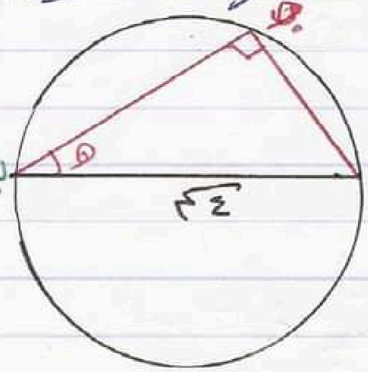
$ك' = ٢س - \frac{١٢٨}{س^2} \Leftarrow ك' = ٠ \Leftarrow ٢س = \frac{١٢٨}{س^2} \Leftarrow س^3 = ٦٤$

$\Leftarrow \boxed{س = ٤}$ ∴ عندما س = ٤ قيمة صغرى

إشارة ك': $- - - \underset{٤}{\times} + + + +$

∴ $ص = \frac{٣٢}{١٦} = ٢$ ∴ أبعاد الصندوق هي ٤، ٤، ٢

س٣٢: دائرة قطرها أب طوله ٤ كم ، ابدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من ب باتجاه أ ، جد قياس ∠ أ ب جـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن




الحل: مساحة المثلث أ ب جـ = ½ × ٤ × ب جـ × جا هـ

م = ٢ ب جـ جا هـ

لكن ب جـ = ٤ جتا هـ

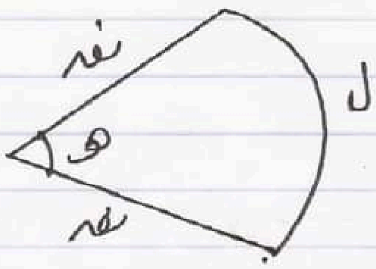
∴ م = ٢ × ٤ جتا هـ جا هـ = ٤ جا ٢هـ

م' = ٨ جتا ٢هـ ⟸ م' = ٠ ∴ جتا ٢هـ = ٠

⟸ ٢هـ = $\frac{\pi}{2}$ ⟸ هـ = $\frac{\pi}{4}$

م'' = −١٦ جا ٢هـ ، م''($\frac{\pi}{4}$) = −١٦ < ٠ ∴ عندما ∠ أ ب جـ = $\frac{\pi}{4}$ قيمة عظمى.

س٣٣: قطاع دائري محيطه ٢٠ م ، جد نصف قطر دائرته بحيث تكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن؟




الحل: محيط القطاع = ٢ نق + ل

٢٠ = ٢ نق + ل

$\boxed{\text{ل = ٢٠ − ٢ نق}}$

مساحة القطاع = م = ½ نق ل

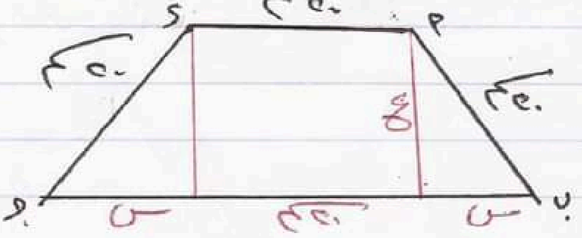
م = ½ نق (٢٠ − ٢ نق) = ١٠ نق − نق²

م' = ١٠ − ٢ نق ⟸ م' = ٠ ∴ إذن $\boxed{\text{نق = ٥}}$

م'' = −٢ < ٠ إذن عندما نق = ٥ قيمة عظمى

∴ $\boxed{\text{نق = ٥}}$

س٣٠: أ ب جـ د شبه منحرف فيه ثلاثة أضلاع متساوية طول كل منها ٢٠ سم
جد طول الضلع الرابع لشبه المنحرف الذي يجعل مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن؟




الحل: مساحة شبه المنحرف $= \frac{1}{2}$ (أد + ب جـ) × ع

م $= \frac{1}{2}(٢٠ + ٢٠ + ٢س) \times$ ع

م $= (٢٠ + س) \times$ ع

من فيثاغورس س$^2$ + ع$^2$ = ٤٠٠

ع = $\sqrt{٤٠٠ - س^2}$

م $= (٢٠ + س)\left(\sqrt{٤٠٠ - س^2}\right)$

م$' = (٢٠ + س) \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤٠٠ - س^2}} + \sqrt{٤٠٠ - س^2}$

م$' = \frac{-٢٠س - س^2 + ٤٠٠ - س^2}{\sqrt{٤٠٠ - س^2}}$

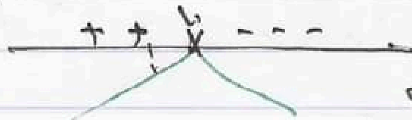
م$' = ٠ \Leftarrow -٢س^2 - ٢٠س + ٤٠٠ = ٠$

س$^2$ + ١٠س − ٢٠٠ = ٠

(س + ٢٠)(س − ١٠) = ٠

إما س = −٢٠ × أو $\boxed{س = ١٠}$

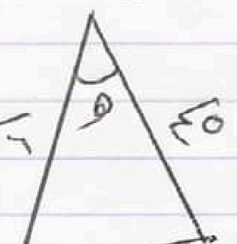
إشارة م'




عندما س = ١٠ قيمة عظمى

∴ طول الضلع الرابع = ١٠ + ٢٠ + ١٠ = ٤٠ سم

س٣١: مثلث طولا ضلعين فيه ٥ سم، ٦ سم والزاوية المحصورة بينهما قياسها هـ، جد قياس هـ الذي يجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟




الحل: مساحة المثلث = م = $\frac{1}{2} \times ٥ \times ٦ \times$ جا هـ

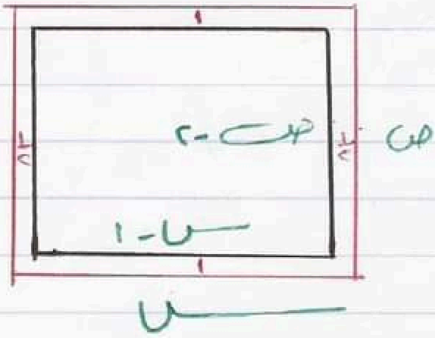
م = ١٥ جا هـ

م' = ١٥ جتا هـ ⇐ م' = ٠ ⇐ جتا هـ = ٠

⇐ هـ = $\frac{\pi}{2}$

م'' = −١٥ جا هـ ⇐ م''$(\frac{\pi}{2})$ = −١٥ < ٠ ∴ عندما هـ = $\frac{\pi}{2}$ قيمة عظمى.

س٢٦: صفحة مستطيلة الشكل مساحتها ٥٠ سم² يراد طباعة إعلان عليها، فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١سم، وفي كل من الجانبين ½ سم، جد بعدي الصفحة لتكون مساحة المطبوعة أكبر ما يمكن




مساحة الصفحة = س × ص

٥٠ = س ص

⇐ $\boxed{ص = \frac{٥٠}{س}}$

مساحة المادة المطبوعة = (س − ١)(ص − ٢)

م = (س − ١)$(\frac{٥٠}{س} − ٢)$

م = ٥٠ − ٢س − $\frac{٥٠}{س}$ + ٢ ⇐ م = ٥٢ − ٢س − $\frac{٥٠}{س}$

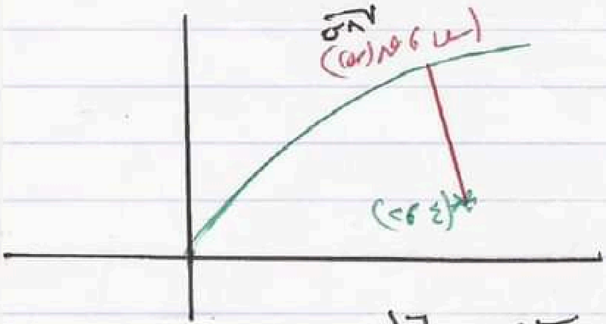
م′ = −٢ + $\frac{٥٠}{س^٢}$ ⇐ م′ = ٠ ⇐ ٢ = $\frac{٥٠}{س^٢}$ ⇐ س = ±٥

$\boxed{س = ٥}$

م″ = $\frac{−١٠٠}{س^٣}$ ⇐ م″(٥) < ٠ ∴ عندما س = ٥ قيمة عظمى

⇐ ص = $\frac{٥٠}{٥}$ = ١٠ ⇐ بعدي الصفحة س = ٥، ص = ١٠

س٢٧: جد النقطة على منحنى ق(س) = √(٨س) التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٤، ٢)




الحل: حسب قانون المسافة بين نقطتين

ف = √((س − ٤)² + (√(٨س) − ٢)²)

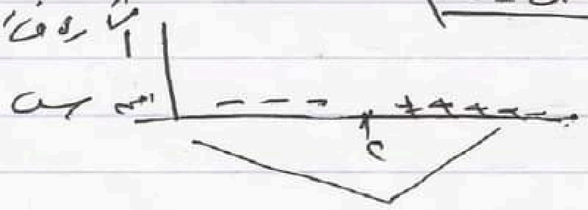
ف² = س² − ٨س + ١٦ + ٨س − ٤√(٨س) + ٤

ف² = س² − ٤√(٨س) + ٢٠

٢ف ف′ = ٢س − ٤ × $\frac{٨}{٢\sqrt{٨س}}$ ⇐ ف′ = $\frac{٢س − \frac{١٦}{\sqrt{٨س}}}{٢ف}$

ف′ = ٠ ⇐ ٢س = $\frac{١٦}{\sqrt{٨س}}$ ⇐ س = $\frac{٨}{\sqrt{٨س}}$ بالتربيع

س² = $\frac{٦٤}{٨س}$ ⇐ س³ = ٨ ⇐ $\boxed{س = ٢}$

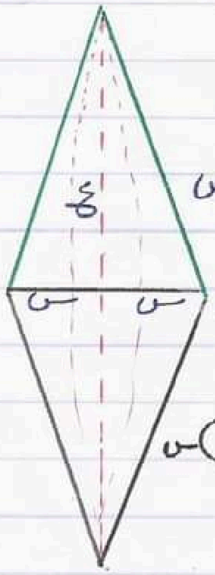



∴ عندما س = ٢ قيمة صغرى

ص = √(٨×٢) = ٤

∴ النقطة هي (٢، ٤)

س٤ : إذا دارت صفيحة على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه ٤٠ سم دورة كاملة حول قاعدتها ، فما أكبر حجم ممكن للجسم الناتج ؟




الحل : الجسم الناتج هو عبارة عن مخروطين متساويين في الحجم ومتقابلين

حجم المخروط = $\frac{\pi}{3}$ ع² × س

لكن ص² = س² + ع²

⇐ $\boxed{\text{ع}^2 = \text{ص}^2 - \text{س}^2}$

وكذلك ٤٠ = ٢س + ٢ص ⇐ $\boxed{\text{ص} = ٢٠ - \text{س}}$

∴ ح = $\frac{\pi}{3}$ (ص² − س²) س = $\frac{\pi}{3}$ ((٢٠ − س)² − س²) س

ح = $\frac{\pi}{3}$ (٤٠٠ − ٤٠س + س² − س²) س

ح = $\frac{\pi}{3}$ (٤٠٠س − ٤٠س²)

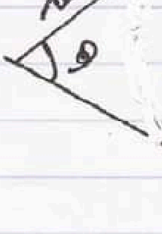
ح' = $\frac{\pi}{3}$ (٤٠٠ − ٨٠س) ⇐ ح' = ٠ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٥}$

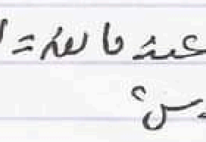
ح'' = − $\frac{٨٠\pi}{٣}$ < ٠ ∴ عندما س = ٥ فهي عظمى

ح = $\frac{\pi}{3}$ (٤٠٠ × ٥ − ٤٠(٢٥)) = $\frac{\pi}{3}$ (٢٠٠٠ − ١٠٠٠) = $\frac{١٠٠٠\pi}{٣}$

∴ حجم الجسم = ٢ × $\frac{١٠٠٠\pi}{٣}$ = $\frac{٢٠٠٠\pi}{٣}$ سم³ ،

س٥ : قطاع دائري زاويته المركزية بالتقدير الدائري هـ ونصف قطر دائرته نق ، حول الى مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته س وارتفاعه ع ، ما قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج اكبر حجم ممكن




الحل : طول القوس للقطاع = محيط قاعدة المخروط ⇐ نق هـ = ٢س π

⇐ س = $\frac{\text{نق هـ}}{٢\pi}$ ...① وكذلك من المخروط نق² = ع² + س² ...②

حجم المخروط = ح = $\frac{\pi}{3}$ س² ع = $\frac{\pi}{3}$ (نق² − ع²) ع

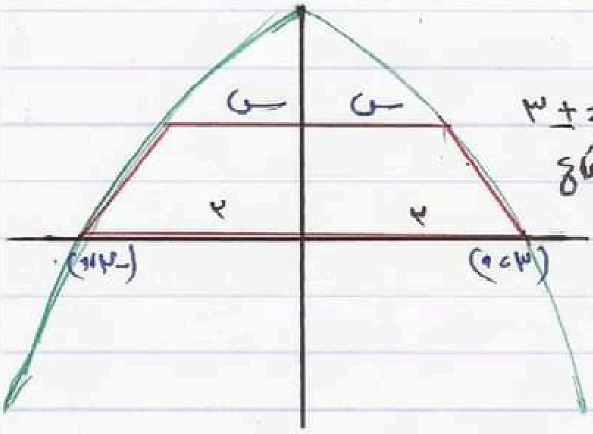
ح = $\frac{\pi}{3}$ (نق² ع − ع³) ⇐ ح' = $\frac{\pi}{3}$ (نق² − ٣ع²)

ح' = ٠ ⇐ نق = $\sqrt{3}$ ع ⇐ ح'' = − $\frac{٦\pi}{٣}$ ع < ٠ ∴ عندما نق = $\sqrt{3}$ ع

فهي عظمى ⇐ ② ⇐ نق² = $\left(\frac{\text{نق}}{\sqrt{3}}\right)^2$ + س² ⇐ نق² = $\frac{\text{نق}^2}{٣}$ + س²

⇐ س² = $\frac{٢}{٣}$ نق² ، ① ⇐ $\frac{٢}{٣}$ نق² = $\frac{\text{نق}^2 \text{هـ}^2}{٤\pi^2}$ ⇐ هـ² = $\frac{٢}{٣}$ × ٤π² ⇐ هـ = ٢π $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$

س11: جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف علماً بأنه موضوع (بالرسم) بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات وتقع رؤوسه على منحنى الاقتران
ق(س) = 9 − س²




الحل: نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات هي ±√9 = ±3

مساحة شبه المنحرف = ½ مجموع القاعدتين × الارتفاع

م = ½ (2س + 6) × ق(س)

م = (س + 3)(9 − س²)

م' = (س + 3) × −2س + (9 − س²) × 1

م' = −2س² − 6س + 9 − س² = −3س² − 6س + 9

م' = 0 ⇐ س² + 2س − 3 = 0 ∴ (س + 3)(س − 1) = 0 ∴

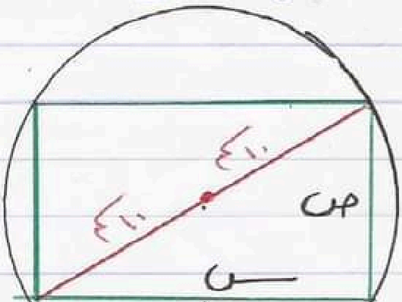
⇐ س = −3 × ، $\boxed{\text{س} = 1}$

م'' = −6س − 6

م''(1) < 0 ⇐ عند س = 1 قيمة عظمى

∴ م = (1 + 3)(9 − 1) = 4 × 8 = 32 وحدة مربعة.

س12: جد أكبر مساحة لمستطيل علماً بأنه داخل دائرة نصف قطرها 10 سم؟ (توجيهي فلسطين 2007)




الحل: مساحة المستطيل = م = س × ص

لكن حسب نظرية فيثاغورس

س² + ص² = (20)²

ص = √(400 − س²)

∴ م = س √(400 − س²) ⇐ م² = س² (400 − س²)

م² = 400 س² − س⁴ ⇐ 2 م م' = 800 س − 4 س³

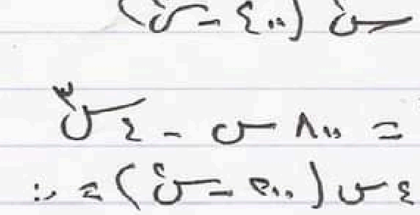
م' = 0 ⇐ 800 س − 4 س³ = 0 ⇐ 4 س (200 − س²) = 0

إما س = 0 مرفوض أو س = √200

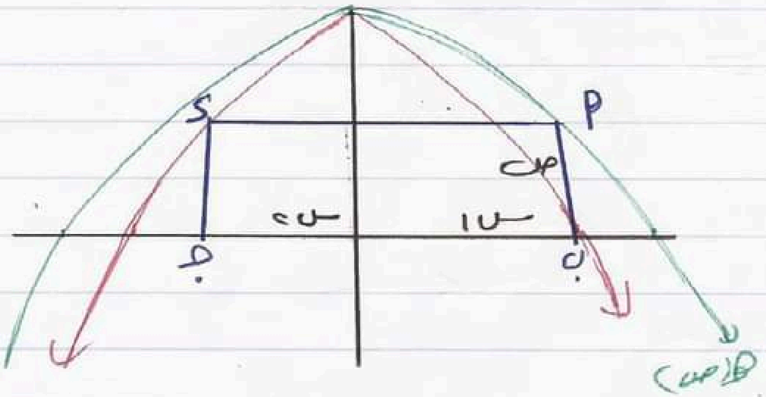
عند س = √200 قيمة عظمى

م = √200 √(400 − 200) = (√200)² = 200 سم²

إشارة م'



س٩: أ ب جـ د مستطيل يقع رأساه ب، جـ على محور السينات، والرأس أ في الربع الأول على منحنى هـ(س) = ١٢ − $\frac{س^2}{٤}$ والرأس د في الربع الثاني على منحنى ل(س) = ١٢ − س²، جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل؟




الحل: م = (س١ + س٢) × ص

لكن ل(س١) = هـ(س٢)

١٢ − $\frac{س_٢^2}{٤}$ = ١٢ − س١²

س٢² = ٤ س١²

⇐ $\boxed{س_٢ = ٢ س_١}$

∴ م = ٣ س١ × ل(س١)

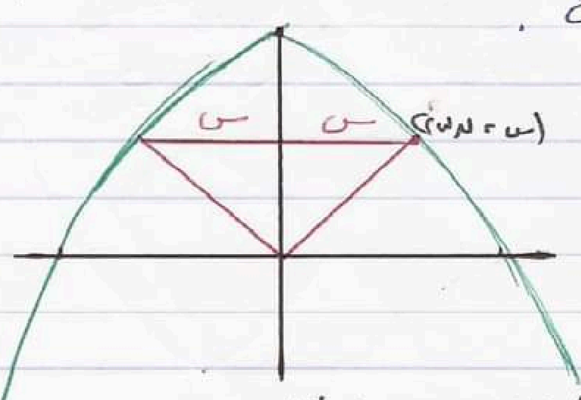
= ٣ س١ (١٢ − س١²) = ٣٦ س١ − ٣ س١³

م′ = ٣٦ − ٩ س١² ⇐ م′ = ٠ ⇐ ٤ = س١² ⇐ $\boxed{س_١ = ٢}$

م″ = −١٨ س١ ⇐ م″(٢) < ٠ ⇐ عندما س١ = ٢ قيمة عظمى

∴ م = ٣٦ × ٢ − ٣(٢)³ = ٧٢ − ٢٤ = ٤٨ وحدة مربعة.

س١٠: مثلث متساوي الساقين مرسوم فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في نقطة الأصل والرأسان الآخران على منحنى الاقتران ل(س) = ٢٧ − س²، جد أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث.




الحل: مساحة المثلث = م = $\frac{1}{2}$ (٢س) × ل(س)   (س، ل(س))

= س × (٢٧ − س²)

م = ٢٧س − س³

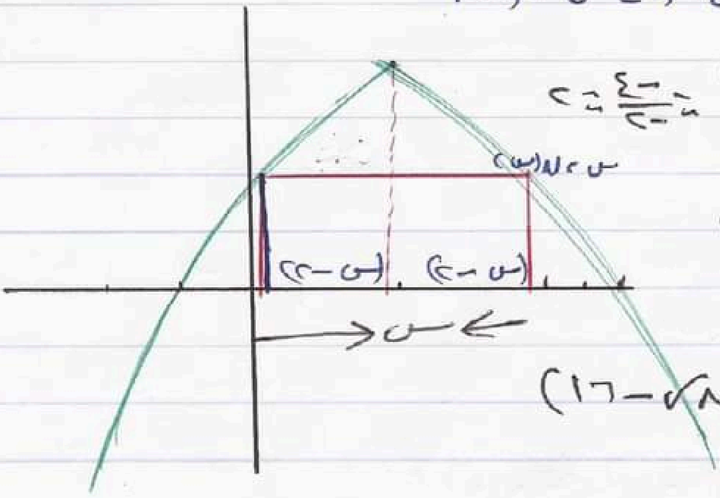
م′ = ٢٧ − ٣س²

∴ ٢٧ = ٣س² ⇐ س² = ٩ ⇐ س = ٣

م″ = −٦س ⇐ م″(٣) < ٠ ⇐ عندما س = ٣ قيمة عظمى

م = ٢٧ × ٣ − ٣³ = ٨١ − ٢٧ = ٥٤ وحدة مربعة.

س٧: جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يكون أحد أبعاده منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران تقعان على منحنى الاقتران ق(س) = − س² + ٤س + ٨




الحل: معادلة محور التماثل هي س = −ب/(٢أ) = −٤/−٢ = ٢

المساحة = ٢(س − ٢) ق(س)

م = ٢(س − ٢)(− س² + ٤س + ٨)

م = ٢(− س³ + ٤س² + ٨س + ٢س² − ٨س − ١٦)

م = ٢(− س³ + ٦س² − ١٦)

م' = ٢(− ٣س² + ١٢س) ⟸ م' = ٠ ⟸ ٠ = − ٣س² + ١٢س

٠ = − ٣س(س − ٤) ⟸ س = ٠ مرفوضة

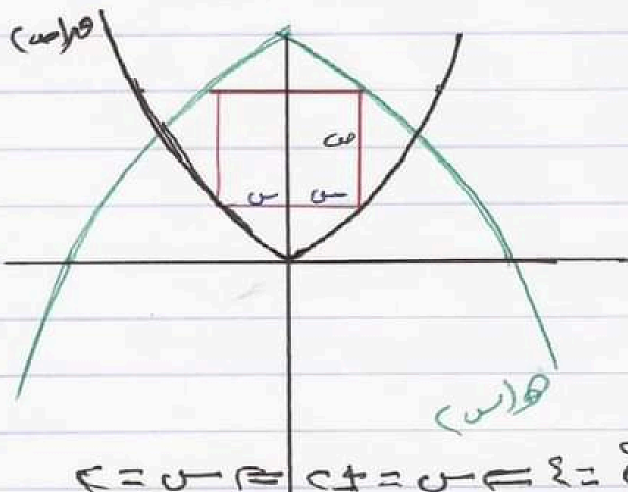
س = ٤

م'' = ٢(− ٦س + ١٢)

م''(٤) = ٢(− ٢٤ + ١٢) < ٠ ⟸ عند س = ٤ قيمة عظمى.

م = ٢(٤ − ٢)(− ١٦ + ١٦ + ٨) = ٢ × ٢ × ٨ = ٣٢ وحدة مربعة.

س٨: أ ب جـ د مستطيل يقع رأساه أ، ب على منحنى ق(س) = ٢س² ورأساه جـ، د على منحنى هـ(س) = ٣٦ − س²، جد أبعاد المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن




الحل: مساحة المستطيل = م = ٢س × ص

لكن ص = هـ(س) − ق(س)

= ٣٦ − س² − ٢س² = ٣٦ − ٣س²

∴ م = ٢س(٣٦ − ٣س²)

م = ٧٢س − ٦س³

م' = ٧٢ − ١٨س² ، م' = ٠ ⟸ س² = ٤ ⟸ س = ±٢ ⟸ س = ٢

م'' = − ٣٦س ⟸ م''(٢) = − ٧٢ < ٠ ⟸ عند س = ٢ قيمة عظمى

⟸ أبعاد المستطيل هي ٤ ، ٣٦ − ٣(٢)² ⟸ أبعاد المستطيل {٤ ، ٢٤}

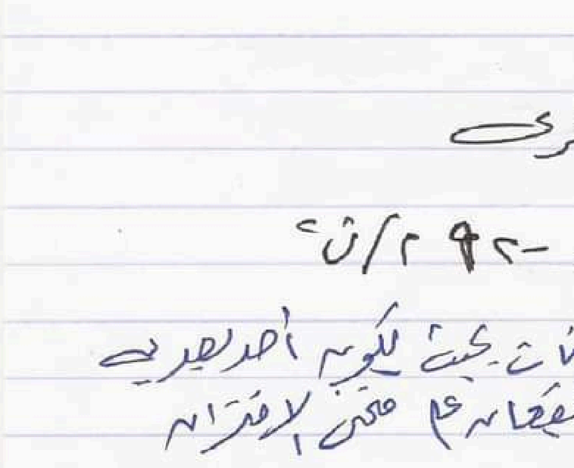
س٤: جد الاحداثي السيني للنقطة التي عندها ميل المماس للمنحنى
$ق(س) = \frac{1}{3} س^3 - 3 س^2 - 4$ أقل ما يمكن؟

الحل: ميل المماس = $ق'(س) = س^2 - 6 س$
$م' = ق''(س) = 2س - 6$
$\therefore \; 0 = 2س - 6 \Leftarrow س = 3$
$م''(س) = 2$ ∴ عند $س = 3$ قيمة صغرى
∴ الاحداثي السيني هو $س = 3$

س٥: يتحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة $ف = ن^4 - 12ن^3 + 8ن^2 - 6ن + 3$
حيث ف: المسافة بالامتار، ن الزمن بالثواني. جد أقل تسارع ممكن لهذا الجسم؟ توجيهي فلسطين ١٩٨٥

الحل: $ع = ف' = 4ن^3 - 36ن^2 + 16ن - 6$
$ت = ع' = 12ن^2 - 72ن + 16$
الآن نجد الحد الأصغر للتسارع
$ت' = 24ن - 72$
$\therefore \; 0 = 24ن - 72 \Leftarrow ن = 3$
$ت'' = 24$ ∴ عند $ن = 3$ قيمة صغرى
$ت(3) = 12(3)^2 - 72 \times 3 + 16$
$= 108 - 216 + 16 = -92$ م/ث²

س٦: جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يكون أحد أضلاعه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران تقعان على منحنى الاقتران
$ق(س) = 12 - س^2$




الحل: مساحة المستطيل = $م = 2س \times ص$
لكن $ص = ق(س)$
$\therefore \; م = 2س \times (12 - س^2) = 24س - 2س^3$
$م' = 24 - 6س^2$
$\therefore \; 0 = 24 - 6س^2 \Leftarrow س^2 = 4 \Leftarrow س = \pm 2$
$\boxed{س = 2}$
$م'' = -12س \Leftarrow م''(2) = -24 < 0$ ∴ عند $س = 2$ قيمة عظمى
∴ مساحة المستطيل $= 24س - 2س^3 \Big|_{س=2} = 24 \times 2 - 2(2)^3 = 48 - 16 = 32$ وحدة²

س٣: عددان موجبان مجموعهما ٢٠، جد العددين بحيث
① مجموع مربعيهما اصغر ما يمكن
② حاصل ضرب احدهما في مربع الآخر اكبر ما يمكن

الحل/ نفرض أن العدد الأول هو س، والعدد الثاني هو ص

① س + ص = ٢٠ ⟸ $\boxed{\text{ص = ٢٠ − س}}$

مجموع مربعيهما اصغر ما يمكن ⟸ ل = س² + ص²

ل(س) = س² + (٢٠ − س)²

ل′(س) = ٢س + ٢(٢٠ − س) × −١

ل′(س) = ٢س − ٤٠ + ٢س = ٤س − ٤٠

∴ ٤س − ٤٠ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س = ١٠}}$

ل″(س) = ٤ ⟸ ل″(١٠) > ٠ ⟸ عندما س = ١٠ نهاية صغرى

∴ ص = ٢٠ − ١٠ = ١٠ ∴ العددان هما (١٠، ١٠)

② د(س) = س × ص²

د(س) = س(٢٠ − س)² = س(٤٠٠ − ٤٠س + س²)

د(س) = ٤٠٠س − ٤٠س² + س³

د′(س) = ٤٠٠ − ٨٠س + ٣س²

∴ ٣س² − ٨٠س + ٤٠٠ = ٠

∴ (٣س − ٢٠)(س − ٢٠) = ٠

اما س = $\frac{٢٠}{٣}$ أو س = ٢٠

د″(س) = −٨٠ + ٦س

د″($\frac{٢٠}{٣}$) = −٨٠ + $\frac{٦ \times ٢٠}{٣}$ < ٠ ⟸ عند س = $\frac{٢٠}{٣}$ نهاية عظمى

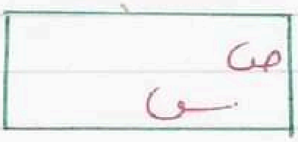
د″(٢٠) = −٨٠ + ٦ × ٢٠ > ٠ ⟸ عند س = ٢٠ نهاية صغرى

⟸ س = $\frac{٢٠}{٣}$ ⟸ ص = ٢٠ − س = ٢٠ − $\frac{٢٠}{٣}$ = $\frac{٤٠}{٣}$

∴ العددان هما ($\frac{٢٠}{٣}$ ، $\frac{٤٠}{٣}$)

# تطبيقات على القيم القصوى

س١: قطعة ارض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠م ، جد ابعادها لتكون مساحتها اكبر ما يمكن ؟




الحل: محيط القطعة = ل = ٢س + ٢ص

٦٠٠ = ٢س + ٢ص

⇐ [ ص = ٣٠٠ − س ]

مساحة القطعة = م = س ص = س (٣٠٠ − س)

م = ٣٠٠س − س²

م' = ٣٠٠ − ٢س ⇐ م' = ٠ ⇐ [ س = ١٥٠ ]

م'' = −٢ < ٠ ⇐ عندما س = ١٥٠ قيمة عظمى

⇐ ص = ٣٠٠ − ١٥٠ = ١٥٠ ⇐ القطعة مربعة الشكل ابعادها ١٥٠ ، ١٥٠

س٢: قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها ٤٠٠م² ، ما أقل محيط ممكن للقطعة ؟

الحل: المحيط = ل = ٢س + ٢ص حيث س ، ص ابعاد القطعة

لكن المساحة = م = س ص ⇐ ٤٠٠ = س ص

⇐ ص = ٤٠٠ / س

⇐ ل = ٢س + ٨٠٠ / س ⇐ ل' = ٢ − ٨٠٠ / س²

ل' = ٠ ⇐ ٢ = ٨٠٠ / س² ⇐ س² = ٤٠٠ ⇐ س = ±٢٠

⇐ س = ٢٠

ل'' = ١٦٠٠ / س³ ⇐ ل''(٢٠) > صفر ⇐ عندما س = ٢٠ قيمة صغرى

⇐ المحيط = ل = ٢ × ٢٠ + ٨٠٠ / ٢٠ = ٤٠ + ٤٠ = ٨٠م .

ع.١٥ أوجد اقصر مسافة بين النقطة (٢، ٠) ومنحنى العلاقة ص² - س² = ٨


الحل: بعد المسافة بين نقطتين تكون

ف² = (س - ٢)² + (ص - ٠)²

ف² = س² - ٤س + ٤ + ص²    لكن من العلاقة ص² = ٨ + س²

∴ ف² = ٢س² - ٤س + ١٢

٢ف ف' = ٤س - ٤ ⟸ ف' = $\frac{٤س - ٤}{٢ف}$

ف' = ٠ ∴ اذن ٤س - ٤ = ٠ ⟸ $\boxed{س = ١}$

إشارة ف'

- - - ١ + + +   س

اذن عندما س = ١ قيمة صغرى

∴ ف = $\sqrt{٢(١)^٢ - ٤(١) + ١٢}$

ف = $\sqrt{١٠}$

ع.١٥ المثال: سلك طوله ٥٦ سم، قسم الى جزأين صنع من احدهما مربع ومن الجزء الآخر مستطيل طوله يساوي ٣ أمثال عرضه، جد ابعاد المربع والمستطيل ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن؟

الحل: نفرض ان طول المربع = س ⟸ مساحته = س²

محيطه = ٤س

نفرض ان عرض المستطيل = ص ⟸ طوله = ٣ص ⟸ مساحته = ٣ص²

محيطه = ٨ص

م = مجموع مساحة المربع والمستطيل = س² + ٣ص²

لكن طول السلك = محيط المربع + محيط المستطيل

٥٦ = ٤س + ٨ص ⟸ ١٤ = س + ٢ص

⟸ $\boxed{س = ١٤ - ٢ص}$

م = (١٤ - ٢ص)² + ٣ص² ⟸ م' = ٢(١٤ - ٢ص)×-٢ + ٦ص

م' = -٥٦ + ٨ص + ٦ص = ١٤ص - ٥٦

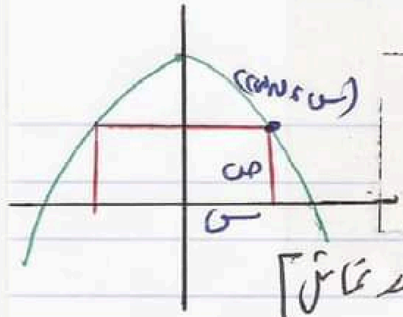
م' = ٠ ∴ ١٤ص = ٥٦ ⟸ $\boxed{ص = ٤}$

م'' = ١٤ > ٠ ⟸ عندما ص = ٤ قيمة صغرى

اذن ابعاد المستطيل هي ص ، ٣ص = $\boxed{٤ ، ١٢}$

طول المربع س = ١٤ - ٢ص = ١٤ - ٢×٤ = ٦

∴ طول المربع = ٦




٢٠١٣

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات والرأسان الآخران على منحنى الاقتران $ق(س) = ٨ - \frac{٢}{٣}س^٢$

الحل: مساحة المستطيل = ٢س × ص      [محور الصادات محور تماثل للمستطيل]

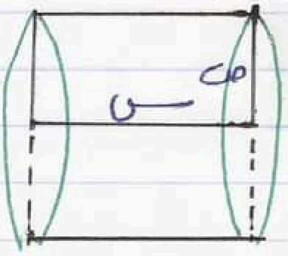
$م = ٢س \times ق(س) = ٢س(٨ - \frac{٢}{٣}س^٢)$

$م = ١٦س - \frac{٤}{٣}س^٣$

$م' = ١٦ - ٤س^٢ \Leftarrow م' = ٠ \Leftarrow ٤ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$ ، $س = -٢$ مرفوضة

$م'' = -٨س \Leftarrow م''(٢) < ٠ \Leftarrow$ عندما $س = ٢$ قيمة عظمى

$\therefore م = ١٦(٢) - \frac{٤}{٣}(٢)^٣ = ٣٢ - \frac{٣٢}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة.




٢٠١٤

أوجد باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران مستطيل محيطه (٦٠) سم دورة كاملة حول أحد أضلاعه

الحل: حجم الجسم الناتج هو حجم اسطوانة = $ح = ص^٢ \pi \times س$

مح = $٢س + ٢ص = ٦٠ \Leftarrow \boxed{س = ٣٠ - ص}$

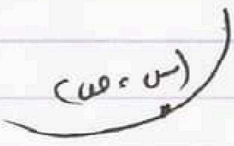
$\therefore ح = ص^٢ \pi (٣٠ - ص) = ٣٠\pi ص^٢ - \pi ص^٣$

$ح' = ٦٠\pi ص - ٣\pi ص^٢ \Leftarrow ح' = ٠ \Leftarrow ٣\pi ص(٢٠ - ص) = ٠$

اما ص = ٠ مرفوضة أو ص = ٢٠

$ح'' = ٦٠ - ٦\pi ص \Leftarrow ح''(٢٠) < ٠ \Leftarrow$ عندما $\boxed{ص = ٢٠}$ قيمة عظمى

$\therefore ح = ٣٠\pi(٢٠)^٢ - \pi(٢٠)^٣ = ١٢٠٠٠\pi - ٨٠٠٠\pi = ٤٠٠٠\pi$ سم³




| ٢٠١٤ إكمال غزة | جد أقرب نقطة على منحنى $ص = \sqrt{س - ١}$ إلى النقطة أ(٢،صفر) |
|---|---|

الحل: $ف^٢ = (س - ٢)^٢ + (ص - ٠)^٢$      أ(٢،٠)

$ف^٢ = س^٢ - ٤س + ٤ + ص^٢$      لكن $ص = \sqrt{س - ١} \Leftarrow ص^٢ = س - ١$

$\therefore ف^٢ = س^٢ - ٤س + ٤ + س - ١ \Leftarrow ف^٢ = س^٢ - ٣س + ٣$

$٢ف ف' = ٢س - ٣ \Leftarrow ف' = ٠ \Leftarrow ٢س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ١,٥$

ف' : − − − ١,٥ + + +

⟸ عندما س = ١,٥ قيمة صغرى

$\Leftarrow ص = \sqrt{٢ \times ١,٥ - ١} = \sqrt{٢}$

$\therefore$ أقرب نقطة هي $(١,٥ ، \sqrt{٢})$

٢٠١٠

يراد صنع وعاء معدني على هيئة أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ٨١ π سم³ ، فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة ٣دنانير لكل سم² من قاعدة الأسطوانة ، وديناراً واحداً لكل سم² من سطحها الجانبي . جد أبعاد الأسطوانة التي تجعل تكاليف صنعها أقل ما يمكن.

الحل: تكلفة صنع الوعاء = ٣ نق² π + ٢ نق π ع × ١

ت = ٣ نق² π + ٢ نق π ع

لكن حجم الوعاء = ٨١ π سم³ = نق² π ع

⇐ $\boxed{ع = \frac{٨١}{نق^2}}$

⇐ ت = ٣ نق² π + ٢ نق π × $\frac{٨١}{نق^2}$

ت = ٣ نق² π + $\frac{١٦٢π}{نق}$

ت' = ٦ نق π − $\frac{١٦٢π}{نق^2}$ ⇐ ت' = ٠ اذن ٦ نق π = $\frac{١٦٢}{نق^2}$

⇐ ٦ نق³ = ١٦٢ ⇐ نق³ = ٢٧ ⇐ $\boxed{نق = ٣}$

اشارة ت'

−−−− ٣ ++++

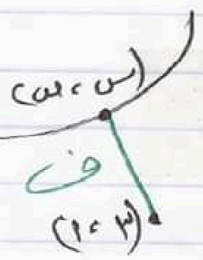
∴ عندما $\boxed{نق = ٣}$ قيمة صغرى

⇐ ع = $\frac{٨١}{نق^2}$ = $\boxed{٩}$

∴ الأبعاد هي نق = ٣ ، الارتفاع = ٩

٢٠١٢

جد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى العلاقة: ص² − ٢ص + ٤س − ٢٣ = ٠ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة (٣،١) .




الحل: حسب قانون المسافة بين نقطتين

ف² = (س − ٣)² + (ص − ١)²

ف² = س² − ٦س + ٩ + ص² − ٢ص + ١

لكن من العلاقة نلاحظ أن ص² − ٢ص = ٢٣ − ٤س

⇐ ف² = س² − ٦س + ١٠ + ٢٣ − ٤س

ف² = س² − ١٠س + ٣٣

٢ف ف' = ٢س − ١٠ ⇐ ف' = $\frac{٢س − ١٠}{٢ف}$

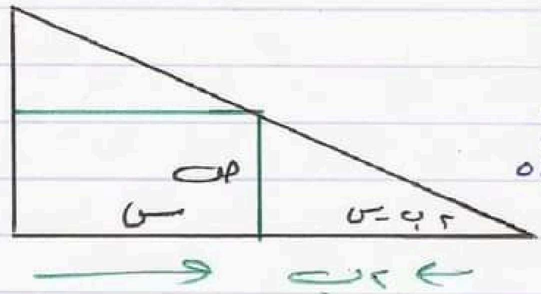
⇐ ف' = ٠ اذن ٢س − ١٠ = ٠ ⇐ $\boxed{س = ٥}$

اشارة ف'

−−− ٥ +++++

∴ عندما س = ٥ قيمة صغرى

٢٠٠٨ معتمداً على الشكل المجاور، جد أبعاد المستطيل ذي المساحة الكبرى الذي يمكن رسمه داخل مثلث قائم الزاوية بحيث ينطبق أحد أضلاع هذا المستطيل على أحد ضلعي القائمة في المثلث ورأسه الآخر على وتر المثلث الآخر




الحل: مساحة المستطيل = س × ص ⟸ $\text{م} = \text{س} \times \text{ص}$

لكن من تشابه المثلثات يكون $\frac{\text{ب}}{\text{٢ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب} - \text{س}} \Leftarrow \text{ص} = \frac{\text{٢ب} - \text{س}}{\text{٢}}$

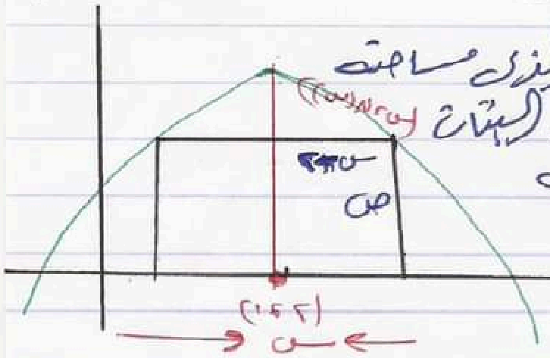
$\therefore \text{م} = \text{س}\left(\frac{\text{٢ب} - \text{س}}{\text{٢}}\right) \Leftarrow \text{م} = \text{ب س} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$

$\text{م}' = \text{ب} - \text{س} \Leftarrow \text{م}' = \text{٠} \Leftarrow \boxed{\text{س} = \text{ب}}$

$\text{م}'' = -\text{١} < \text{٠}$ ⟸ عندما س = ب قيمة عظمى

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = \text{ب}}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{٢ب} - \text{ب}}{\text{٢}} = \boxed{\frac{\text{ب}}{\text{٢}}}$ ⟸ أبعاد المستطيل هي $\left\{\text{ب} ، \frac{\text{ب}}{\text{٢}}\right\}$

٢٠٠٨ المثال: جد أبعاد المستطيل الواقع في الربع الأول والذي مساحته أكبر ما يمكن بحيث تنطبق قاعدته الكبرى على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى $\text{ق(س)} = \text{٤س} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{٢}$




الحل: مساحة المستطيل = $\text{م} = \text{٢(س} - \text{٢)} \times \text{ص}$

لكن $\text{ص} = \text{ق(س)} = \text{٤س} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{٢}$

$\therefore \text{م} = \text{٢(س} - \text{٢)(٤س} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{٢)}$

$\text{م} = \text{٢(٤س}^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٣}} + \cancel{\text{٢س}} - \text{٨س} + \text{٢س}^{\text{٢}} - \cancel{\text{٢س}} - \text{٤)}$

$\text{م} = \text{٢(}-\text{س}^{\text{٣}} + \text{٦س}^{\text{٢}} - \text{٦س} - \text{٤)}$

$\text{م}' = \text{٢(}-\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{١٢س} - \text{٦)} \Leftarrow \text{م}' = \text{٠} \Leftarrow \text{س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{٢} = \text{٠}$

$\text{س} = \frac{\text{٤} \pm \sqrt{\text{١٦} - \text{٨}}}{\text{٢}} = \frac{\text{٤} \pm \text{٢}\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}} = \text{٢} \pm \sqrt{\text{٢}}$

إشارة م̀: − − − ٢ − √٢ + + + ٢ + √٢ − − −

∴ عندما $\text{س} = \text{٢} + \sqrt{\text{٢}}$ قيمة عظمى

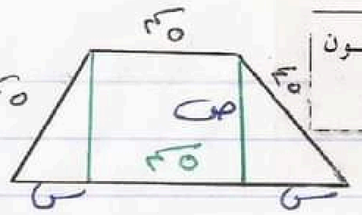
⟸ الطول = $\text{٢(س} - \text{٢)}$ ، $\text{ص} \Leftarrow \text{٢(٢} + \sqrt{\text{٢}} - \text{٢)} = \boxed{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}}$

$\text{ص} = \text{٤(٢} + \sqrt{\text{٢}}) - (\text{٢} + \sqrt{\text{٢}})^{\text{٢}} + \text{٢} = \text{٨} + \cancel{\text{٤}\sqrt{\text{٢}}} - \text{٤} - \cancel{\text{٤}\sqrt{\text{٢}}} - \text{٢} + \text{٢}$

$\boxed{\text{ص} = \text{٤}}$ ⟸ الطول = $\text{٢}\sqrt{\text{٢}}$

العرض = ٤

٢٠٠٤




شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية طول كل منها ٥ سم ، أوجد طول الضلع الرابع لتكون مساحة شبه المنحرف **أكبر** ما يمكن ؟

الحل:. مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}(\text{٥} + \text{س} + \text{س} + \text{٥}) \times \text{ص}$

$\text{م} = \frac{1}{2}(\text{١٠} + \text{٢س}) \times \text{ص} \Leftarrow \text{م} = (\text{٥} + \text{س}) \times \text{ص}$

لكن حسب فيثاغورس $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{٢٥} \Leftarrow \text{ص} = \sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^2}$

$\text{م} = (\text{٥} + \text{س}) \times \sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^2}$

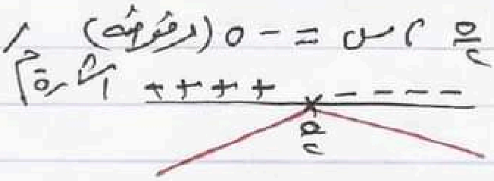
$\text{م}' = (\text{٥} + \text{س}) \times \frac{-\text{٢س}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^2}} + \sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^2}$

$\text{م}' = \frac{-\text{٥س} - \text{س}^2 + \text{٢٥} - \text{س}^2}{\sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^2}} = \frac{-\text{٢س}^2 - \text{٥س} + \text{٢٥}}{\sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^2}}$

$\text{م}' = \text{صفر} \Leftarrow -\text{٢س}^2 - \text{٥س} + \text{٢٥} = \text{٠} \Leftarrow \text{٢س}^2 + \text{٥س} - \text{٢٥} = \text{٠}$

$(\text{٢س} - \text{٥})(\text{س} + \text{٥}) = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ ، $\text{س} = -\text{٥}$ (مرفوضة)

إشارة م'

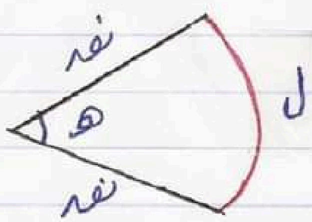



∴ عندما $\text{س} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}$ قيمة عظمى

$\Leftarrow \text{م} = (\text{٥} + \text{٢,٥}) \times \sqrt{\text{٢٥} - (\text{٢,٥})^2}$

$\text{م} = \text{٧,٥}\sqrt{\text{١٨,٧٥}}$ سم²

٢٠٠٥




قطاع دائري محيطه ٢٨ سم ، أثبت أنّ مساحته تكون في قيمتها **العظمى** عندما تكون زاويته المركزية تساوي ٢ راديان ؟

الحل:. مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}\text{نق}^2 \text{هـ}$

لكن محيط القطاع = ل + ٢نق ⟸ ٢٨ = ل + ٢نق

لكن ل = نق هـ ⟸ ٢٨ = نق هـ + ٢ نق

$\text{٢٨} = \text{نق}(\text{هـ} + \text{٢}) \Leftarrow \text{نق} = \frac{\text{٢٨}}{\text{هـ} + \text{٢}}$

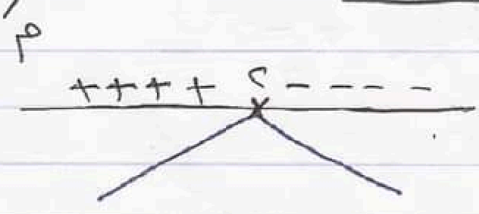
$\text{م} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\text{٢٨}}{\text{هـ} + \text{٢}}\right)^2 \times \text{هـ} = \frac{\text{٣٩٢ هـ}}{(\text{هـ} + \text{٢})^2}$

$\text{م}' = \frac{\text{٣٩٢} \times (\text{هـ} + \text{٢})^2 - \text{٣٩٢ هـ} \times \text{٢}(\text{هـ} + \text{٢})}{(\text{هـ} + \text{٢})^4}$

$\text{م}' = \text{صفر} \Leftarrow \cancel{\text{٣٩٢}}(\text{هـ} + \text{٢})^{\cancel{2}} = \cancel{\text{٣٩٢}} \times \text{٢هـ}\cancel{(\text{هـ} + \text{٢})}$

$\Leftarrow \text{هـ} + \text{٢} = \text{٢هـ} \Leftarrow \boxed{\text{هـ} = \text{٢}}$

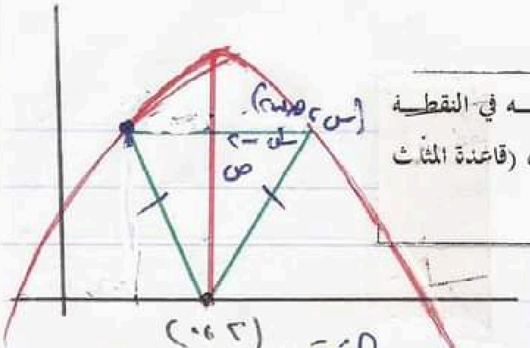
م'




∴ عندما هـ = ٢ قيمة عظمى

٢٠٠٢

جد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين مرسوم فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في النقطة (٢ ، ٠) والرأسان الآخران على منحنى الاقتران: ق(س) = ٨ + ٤س − س² ، (قاعدة المثلث توازي محور السينات) ؟




معادلة محور التماثل هو $س = \frac{-ب}{٢أ}$

$\boxed{س = ٢}$ ∴ العمود النازل من الرأس على الضلع (القاعدة) ينصفه

الحل: مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times ٢(س - ٢) . ص$

$م = (س - ٢) . ص$

لكن $ص = ق(س) = ٨ + ٤س - س^2$

∴ $م = (س - ٢)(٨ + ٤س - س^2)$

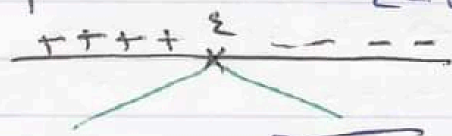
$م' = (س - ٢)(٤ - ٢س) + (٨ + ٤س - س^2) \times ١$

$م' = ٤س - ٢س^2 - ٨ + ٤س + ٨ + ٤س - س^2 = ١٢س - ٣س^2$

$م' = -٣س^2 + ١٢س \Leftarrow م' = ٠ \Leftarrow -٣س(س - ٤) = ٠$ ∴

⟸ إما س = ٠ ويرفض أو س = ٤

إشارة م'



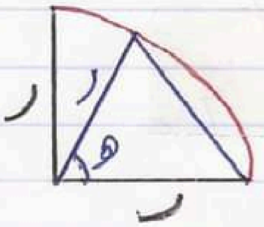

∴ عندما س = ٤ قيمة عظمى

∴ $م = (س - ٢)(٨ + ٤س - س^2)$

$م(٤) = (٤ - ٢)(٨ + ١٦ - ١٦) = ٢ \times ٨ = ١٦ ع^2$

٢٠٠٣

رسم مثلث داخل ربع دائرة نصف قطرها (ر) بحيث تنطبق قاعدة المثلث على نصف قطر الدائرة ويقع رأسه على محيطها ، أثبت أنّ أكبر مساحة لهذا المثلث تساوي : $\frac{1}{2}ر^2$ ؟

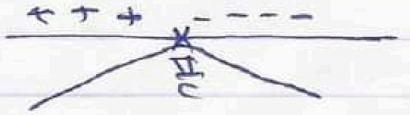



الحل: مساحة المثلث $= م = \frac{1}{2} ر^2 جاهـ$

$م' = \frac{1}{2} ر^2 جتاهـ$

$م' = ٠$ ∴ إذن $جتاهـ = ٠$ ∴ ⟸ $هـ = \frac{\pi}{2}$

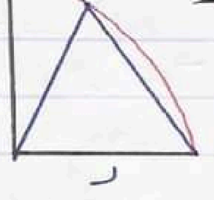
إشارة م'




∴ عندما $هـ = \frac{\pi}{2}$ قيمة عظمى

∴ $م = \frac{1}{2} ر^2 جا \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} ر^2$

أو



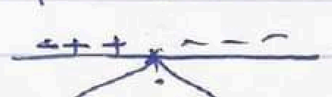

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} ر \times ص$

لكن $س^2 + ص^2 = ر^2$ (معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها = ر)

$\Leftarrow ص = \sqrt{ر^2 - س^2}$

∴ $م = \frac{1}{2} ر \sqrt{ر^2 - س^2} \Leftarrow م' = \frac{1}{2} ر \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{ر^2 - س^2}}$

إشارة م'

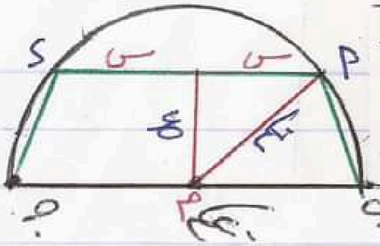



$م' = \frac{1}{2} ر \times \frac{-س}{\sqrt{ر^2 - س^2}} \Leftarrow م' = ٠ \Leftarrow س = ٠$ ∴

∴ عندما س = ٠ قيمة عظمى

$\Leftarrow م = \frac{1}{2} ر \times \sqrt{ر^2} = \frac{1}{2} ر^2$

١٩٩٩م



دائرة نصف قطرها ١٠ سم رسم فيها شبه منحرف ٩ ب ج د بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة وتنطبق قاعدته الكبرى ب ج على قطر الدائرة

أوجد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف ٩ ب ج د ؟

الحل: مساحة شبه المنحرف = ½ (ب ج + ٩ د) × ع

م = ½ (٢٠ + ٢س) × ع = (١٠ + س) × ع

لكن حسب فيثاغورس يكون س² + ع² = ١٠٠ ⟸ ع = √(١٠٠ − س²)

∴ م = (١٠ + س) √(١٠٠ − س²)

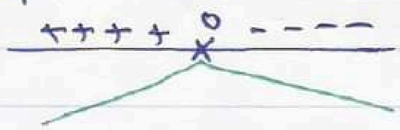
م' = (١٠ + س) × (−٢س) / (٢√(١٠٠ − س²)) + √(١٠٠ − س²)

م' = (−١٠س − س² + ١٠٠ − س²) / √(١٠٠ − س²) = (−٢س² − ١٠س + ١٠٠) / √(١٠٠ − س²)

م' = ٠ ⟸ −٢س² − ١٠س + ١٠٠ = ٠ ⟸ س² + ٥س − ٥٠ = ٠

(س + ١٠)(س − ٥) = ٠ ⟸ إما س = −١٠ (مرفوضة) أو $\boxed{\text{س = ٥}}$

وعندما س = ٥ قيمة عظمى.

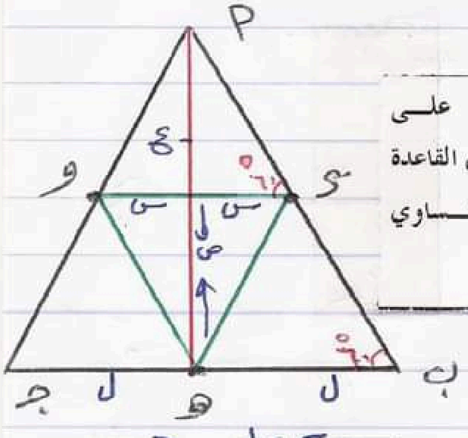



∴ مساحة شبه المنحرف = (١٠ + ٥) √(١٠٠ − ٢٥)

= ١٥ √٧٥

= ٧٥ √٣ سم²

٢٠٠٠م



٩ ب ج مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه: ٢ل سم ، أخذت النقط د ، هـ ، و على أضلاعه ٩ ب ، ٩ ج ، ب ج على الترتيب بحيث كانت القطعة المستقيمة د هـ توازي القاعدة ب ج ، النقطة و هي منتصف ب ج ، أثبت أنّ أكبر مساحة ممكنة للمثلث د هـ و تساوي ¼ مساحة المثلث ٩ ب ج ؟

الحل: مساحة المثلث د هـ و = ½ د و × ص

م = ½ × ٢س × ص = س ص

لكن ٩ هـ = ب هـ ظا ٦٠ = ل √٣ ⟸ ٩ هـ = √٣ ل

وأيضاً ع = س ظا ٦٠ ⟸ ع = √٣ س

لكن ع + ص = ٩ هـ ⟸ √٣ س + ص = √٣ ل

⟸ ص = √٣ ل − √٣ س

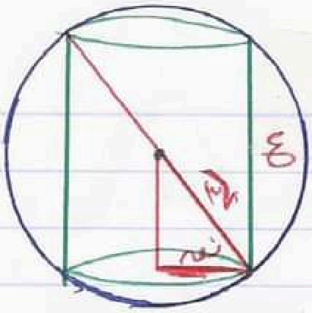
∴ م = س (√٣ ل − √٣ س) = √٣ ل س − √٣ س²

م' = √٣ ل − ٢√٣ س ⟸ م' = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س = ل/٢}}$

م'' = −٢√٣ < ٠ ⟸ عندما س = ل/٢ قيمة عظمى

∴ م = √٣ ل × ل/٢ − √٣ (ل/٢)² = (√٣/٢) ل² − (√٣/٤) ل² = (√٣/٤) ل²

لكن مساحة △ ٩ ب ج = √٣ ل² ⟸ مساحة △ د هـ و = ¼ مساحة △ ٩ ب ج




١٩٩٦

أوجد حجم أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها ($\sqrt{٣}$) دسم ؟

الحل: حجم الاسطوانة = نق² π × ع

لكن (٢ نق)² + ع² = (٢$\sqrt{٣}$)²

٤ نق² + ع² = ١٢ ⟸ نق² = $\frac{١٢ - ع^{٢}}{٤}$

⟸ ح = $\left(\frac{١٢ - ع^{٢}}{٤}\right)$ π × ع = $\boxed{\frac{\pi}{٤}(١٢ع - ع^{٣})}$

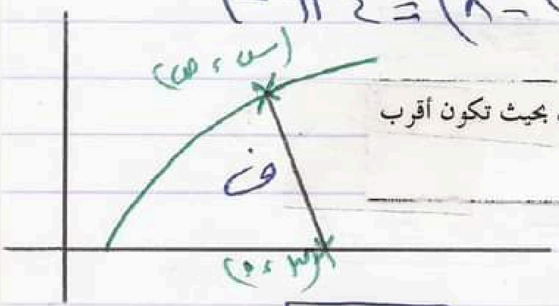
ح′ = $\frac{\pi}{٤}$(١٢ − ٣ع²) ⟸ ح′ = ٠

اذن ١٢ = ٣ع² ⟸ ع² = ٤ ⟸ $\boxed{ع = ٢}$

ح″ = $\frac{-٦\pi}{٤}$ ع ⟸ ح″(٢) = $\frac{-١٢\pi}{٤}$ < ٠

اذن عندما ع = ٢ قيمة عظمى

∴ ح = $\frac{\pi}{٤}$(١٢×٢ − (٢)³) = $\frac{\pi}{٤}$(٢٤ − ٨) = ٤π سم³




١٩٩٧

أوجد إحداثيي نقطة على منحنى الاقتران ص = ق(س) = $\sqrt{٢س - ١}$ ، بحيث تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٣ ، ٠) ؟

الحل: ف² = (س − ٣)² + (ص − ٠)²

ف² = س² − ٦س + ٩ + ص²     لكن ص = $\sqrt{٢س - ١}$

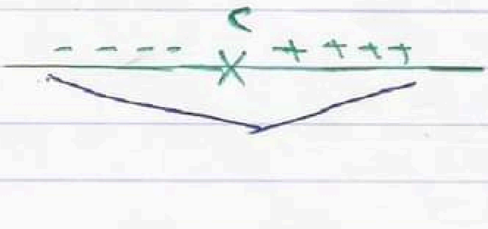
⟸ ص² = ٢س − ١

∴ ف² = س² − ٦س + ٩ + ٢س − ١

ف² = س² − ٤س + ٨

ف = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٨}$ ⟸ ف′ = $\frac{٢س - ٤}{٢ف}$

ف′ = ٠ ⟸ ٢س − ٤ = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٢}$




∴ عندما س = ٢ قيمة صغرى

⟸ ص = $\sqrt{٢×٢ - ١}$ = $\sqrt{٣}$

∴ النقطة هي (٢ ، $\sqrt{٣}$)

(ب) جسم يسير في خط مستقيم بحيث أنّ بعده (ف) بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة:

ف = ٩ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٢] هي: ١٠ م/ث وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عندما ن = ١ ثانية

فأوجد الثابتين: ٩ ، ب ؟

١٩٩٤

الحل: السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢}$ ⇐ ١٠ = $\frac{(٩ جتا \frac{\pi}{2} + ب جا \frac{\pi}{2}) - (٩ جتا ٠ + ب جا ٠)}{٢}$

⇐ ٢٠ = ب − ٩ ---- (١)

ع = ف' = $-\frac{٩\pi}{4}$ جا $\frac{\pi}{4}$ ن + $\frac{ب\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن

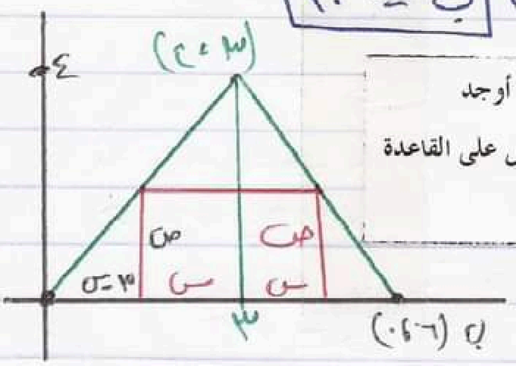
ع' = $-\frac{٩\pi^2}{16}$ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن − $\frac{ب\pi^2}{16}$ جا $\frac{\pi}{4}$ ن

∴ = $-\frac{\pi^2}{16}$ (٩ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن) ⇐ ٩ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن = −ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن

⇐ $\frac{-٩}{ب}$ = ظا $\frac{\pi}{4}$ ن ⇐ $\frac{-٩}{ب}$ = ظا $\frac{\pi}{4}$ × ١

⇐ $\frac{-٩}{ب}$ = ١ ⇐ $\boxed{ب = -٩}$ بالتعويض في (١)

⇐ ٢٠ = −٩ − ٩ ⇐ $\boxed{٩ = -١٠}$ ⇐ $\boxed{ب = ١٠}$




٩ ب جـ مثلث رؤوسه النقط: ٩ (٣ ، ٤) ، ب(٦ ، ٠) ، جـ(٠ ، ٠) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث يقع رأسان من رؤوس المستطيل على القاعدة ب جـ ويقع كل من الرأسين الآخرين على ضلعي المثلث الآخرين ؟

١٩٩٥

الحل: مساحة المستطيل = ٢س × ص

تشابه المثلثات يكون $\frac{٤}{٣} = \frac{ص}{٣-س}$

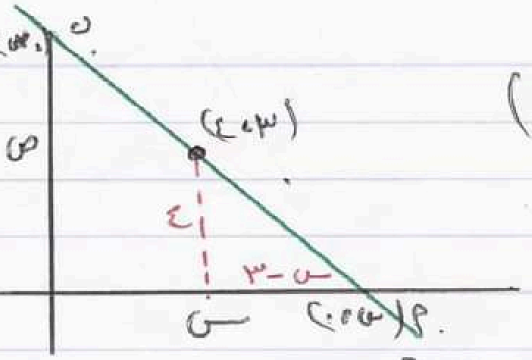
⇐ ص = $\frac{٤(٣-س)}{٣}$ ⇐ م = ٢س × $\frac{٤(٣-س)}{٣}$

م = $\frac{٢٤س - ٨س^2}{٣}$ ⇐ م' = $\frac{٢٤ - ١٦س}{٣}$

م' = ٠ ⇐ ٢٤ = ١٦س ⇐ $\boxed{س = ١.٥}$

م'' = −١٦ ⇐ س = ١.٥ قيمة عظمى

⇐ مساحة المستطيل = $\frac{٢٤ \times ١.٥ - ٨(١.٥)^2}{٣}$ = $\frac{٣٦ - ١٨}{٣}$ = ٦ م²




٢٠٠٩ أكمل المطلوب إيجاد

ب) مساحة المثلث = ½ س ص

ميل أب = (المثلثات متشابهة (عكس استخدام ميل أب))

ص/س = ٤/(س−٣) ⟸ ص = ٤س/(س−٣)

+ توجيهي ٢٠١١

∴ مساحة المثلث = م = ½ س × ٤س/(س−٣)

م = ٢س²/(س−٣) ⟸ مَ = (٤س(س−٣) − ٢س²)/(س−٣)²

مَ = ٠ ⟸ ٤س² − ١٢س − ٢س² = ٠ ⟸ ٢س² − ١٢س = ٠

⟸ ٢س(س−٦) = ٠ إما س = ٠ مرفوضة

أو س = ٦

− − − − ٦ + + + +

∴ عندما س = ٦ قيمة صغرى ⟸ ص = ٤×٦/(٦−٣) = ٢٤/٣ = ٨

معادلة المستقيم هي س/٦ + ص/٨ = ١ (حسب قاعدة المقطعين)

٤س + ٣ص = ٢٤

١٩٩٣ سلك طوله ٢٨ سم قطع إلى جزئين ثم ثني الجزء الأول ليكون مربعاً وثني الجزء الثاني ليكون مستطيلاً طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه . أوجد طول كل من الجزئين إذا كان مجموع مساحتي المربع والمستطيل أقل ما يمكن ؟

الحل: مساحة المربع = س² ، نفرض طول المستطيل = ٣ص ⟸ عرضه = ص

مساحة المستطيل = ٣ص × ص = ٣ص²

∴ مجموع مساحة المربع والمستطيل = م = س² + ٣ص²

∵ محيط المربع + محيط المستطيل = ٢٨ ⟸ ٤س + ٨ص = ٢٨

⟸ س + ٢ص = ٧ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٧ - ٢\text{ص}}$

∴ م = (٧−٢ص)² + ٣ص² = ٤٩ − ٢٨ص + ٤ص² + ٣ص²

م = ٧ص² − ٢٨ص + ٤٩

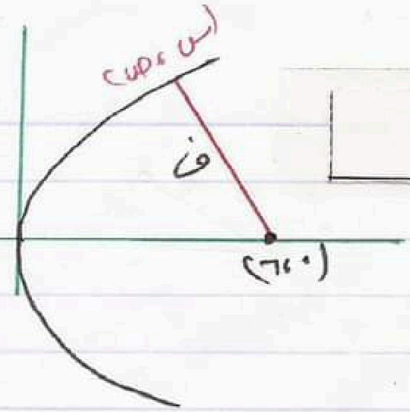
مَ = ١٤ص − ٢٨ ⟸ مَ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ص} = ٢}$

مً = ١٤ > ٠ إذن عندما ص = ٢ قيمة صغرى

∴ طول الجزء الأول = ٨ص = ٨×٢ = ١٦ (المستطيل)

طول الجزء الثاني = ٢٨ − ١٦ = ١٢

١٩٨٨
٢٠٠٩



أوجد أقصر مسافة بين النقطة (٠، ٦) ومنحنى $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = ١٦$ ؟

الحل: من قانون المسافة بين نقطتين ف

$$\text{ف}^2 = (\text{س} - ٠)^2 + (\text{ص} - ٦)^2$$

$$\text{ف}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2 - ١٢\text{ص} + ٣٦$$

لكن $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = ١٦ \Leftarrow \text{س}^2 = ١٦ + \text{ص}^2$

$$\therefore \text{ف}^2 = ١٦ + ٢\text{ص}^2 - ١٢\text{ص} + ٣٦$$

$$\text{ف} = \sqrt{٢\text{ص}^2 - ١٢\text{ص} + ٥٢}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دص}} = \frac{٤\text{ص} - ١٢}{٢\text{ف}} \Leftarrow \frac{\text{دف}}{\text{دص}} = ٠ \Leftarrow ٤\text{ص} - ١٢ = ٠ \therefore$$

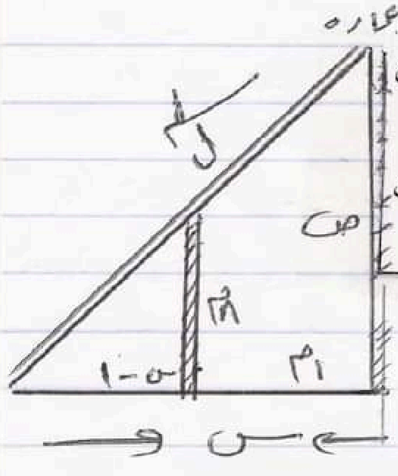
$$\Leftarrow \text{ص} = ٣$$

إشارة ف' : $- - - \; ٣ \; + + +$

عندما ص = ٣ فهي صغرى

$$\therefore \text{ف} = \sqrt{٢(٣)^2 - ١٢(٣) + ٥٢} = \sqrt{١٨ - ٣٦ + ٥٢} = \sqrt{٣٤}$$

١٩٩٢



(أ) جدار ارتفاعه ٨ متر ويبعد ١ متر عن بناية عالية ، أوجد طول أقصر سلم يمكن أن يصل بين الأرض والبناية بحيث يرتكز على الجدار ؟

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ويقطع من الربع الأول للمستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن ؟

(أ) من نظرية فيثاغورس $\text{ل}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2$

لكن باستخدام تشابه المثلثات نحصل

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٨}{\text{س} - ١} \Leftarrow \text{ص} = \frac{٨\text{س}}{\text{س} - ١}$$

$$\therefore \text{ل}^2 = \text{س}^2 + \left(\frac{٨\text{س}}{\text{س} - ١}\right)^2 = \text{س}^2 + \frac{٦٤\text{س}^2}{\text{س}^2 - ٢\text{س} + ١}$$

$$٢\text{ل}\,\text{ل}' = ٢\text{س} + \frac{١٢٨\text{س}(\text{س}^2 - ٢\text{س} + ١) - ٦٤\text{س}^2 \times (٢\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ١)^4}$$

$$\text{ل}' = ٠ \therefore \Leftarrow ٢\text{س} + \frac{١٢٨\text{س}(\text{س} - ١)^2 - ٦٤\text{س}^2 \times ٢(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)^4} = ٠ \therefore$$

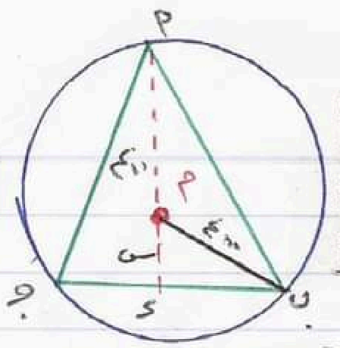
$$\therefore ٢\text{س} + \frac{١٢٨\text{س}(\text{س} - ١) - ١٢٨\text{س}^2}{(\text{س} - ١)^3} = ٠ \Leftarrow -٢\text{س}(\text{س} - ١)^3 = ١٢٨\text{س}(\text{س} - ١ - \text{س})$$

$$\Leftarrow -(\text{س} - ١)^3 = -٦٤ \Leftarrow \text{س} - ١ = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٥}$$

إشارة ل' : $- - - \; ٥ \; + + +$

$\therefore$ عندما س = ٥ فهي صغرى

$$\text{ل}^2 = ٢٥ + \frac{١٦٠٠}{(٥ - ١)^2} = ٢٥ + ١٠٠ = ١٢٥ .$$




١٩٨٧

(أ) أوجد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها: ١٠ سم ؟

(ب) جسم يتحرك في خط مستقيم حسب العلاقة: ف = ن$^{٣}$ − ١٢ن$^{٢}$ + ٨٠ ن حيث ف المسافة بالأمتار ن الزمن بالثواني . أوجد أقل سرعة ممكنة لهذا الجسم ؟

(أ) مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ د

م = $\frac{١}{٢}$ × ٢ ب د × أ د = ب د × أ د

في Δ ب م د القائم في د: (ب م)$^{٢}$ = (ب د)$^{٢}$ + (م د)$^{٢}$

١٠٠ = (ب د)$^{٢}$ + (م د)$^{٢}$ ⟸ (ب د)$^{٢}$ = ١٠٠ − (م د)$^{٢}$

⟸ (ب د) = $\sqrt{١٠٠ - (م د)^{٢}}$ ⟸ ب د = $\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$

⟸ م = $\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$ (١٠ + س) = $\sqrt{(١٠٠ - س^{٢})(١٠ + س)^{٢}}$

م = $\sqrt{(١٠٠ - س^{٢})(١٠٠ + ٢٠س + س^{٢})}$ = $\sqrt{١٠٠٠٠ + ٢٠٠٠س + \cancel{١٠٠س^{٢}} - \cancel{١٠٠س^{٢}} - ٢٠س^{٣} - س^{٤}}$

م = $\sqrt{١٠٠٠٠ + ٢٠٠٠س - ٢٠س^{٣} - س^{٤}}$

م$'$ = $\frac{٢٠٠٠ - ٦٠س^{٢} - ٤س^{٣}}{٢\sqrt{١٠٠٠٠ + ٢٠٠٠س - ٢٠س^{٣} - س^{٤}}}$ = $\frac{١٠٠٠ - ٣٠س^{٢} - ٢س^{٣}}{م}$

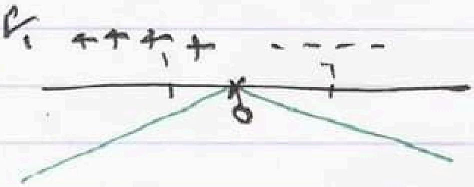
م$'$ = ٠ ⟸ ١٠٠٠ − ٣٠س$^{٢}$ − ٢س$^{٣}$ = ٠ ⟸ س$^{٣}$ + ١٥س$^{٢}$ − ٥٠٠ = ٠

س = ٥ حسب القسمة التركيبية

| | | | |
|---|---|---|---|
| ١ | ١٥ | ٠ | −٥٠٠ |
| | ٥ | ١٠٠ | ٥٠٠ |
| ١ | ٢٠ | ١٠٠ | ٠ |

⟸ م$'$ = (س − ٥)(س$^{٢}$ + ٢٠س + ١٠٠)

م$'$ = (س − ٥)(س + ١٠)$^{٢}$ ⟸ إما س = ٥ أو س = −١٠ (مرفوضة)




∴ عندما س = ٥ نهاية عظمى

⟸ م = $\sqrt{١٠٠٠٠ + ٢٠٠٠ × ٥ - ٢٠(٥)^{٣} - (٥)^{٤}}$

= $\sqrt{٢٠٠٠٠ - ٢٥٠٠ - ٦٢٥}$

= $\sqrt{١٦٨٧٥}$ ≈ ٧٥ $\sqrt{٣}$

(ب) ع = ف$'$ = ٣ن$^{٢}$ − ٢٤ن + ٨٠

ع$'$ = ٦ن − ٢٤

∴ ٦ن − ٢٤ = ٠ ⟸ $\boxed{ن = ٤}$

ع$''$ = ٦ > ٠ ⟸ عندما ن = ٤ نهاية صغرى

ع(٤) = ٣(٤)$^{٢}$ − ٢٤ × ٤ + ٨٠

= ٤٨ − ٩٦ + ٨٠ = ٣٢ م/ث

⇐ ٣٦س (٢ − س) = صفر ⇐ إما س = ٠ مرفوض
أو $\boxed{\text{س} = ٢}$

∴ عندما س = ٢ قيمة عظمى.

أي أن أطوال الأضلاع هي ٤ ، ٤ ، ٤ ⇐ مثلث متساوي الأضلاع.

(أ) جسم يسير في خط مستقيم وفقاً للعلاقة: ف = ن⁴ − ١٢ن³ + ٨ن² − ٦ن + ٥ ١٩٨٥

حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد **أقل** تسارع ممكن لهذا الجسم ؟

الحل: ع = ف′ = ٤ن³ − ٣٦ن² + ١٦ن − ٦

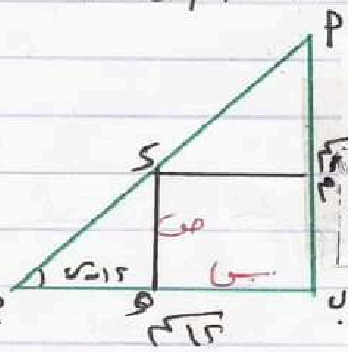
ت = ع′ = ١٢ن² − ٧٢ن + ١٦ نبحث عن القيم الصغرى لـ ت(ن)

ت′ = ٢٤ن − ٧٢ ∵ ت′ = ٠ ⇐ ٢٤ن = ٧٢ ⇐ $\boxed{\text{ن} = ٣}$

ت″ = ٢٤ > ٠ ∴ عندما ن = ٣ قيمة صغرى

∴ أقل تسارع هو ت(٣) = ١٢(٣)² − ٧٢ × ٣ + ١٦

= ١٠٨ − ٢١٦ + ١٦ = −٩٢ م/ث².




(ب) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب بحيث أنّ: أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم

أخذت النقطة د على الوتر أ جـ وأنزل منها العمودان د هـ ، د م على الضلعين :

ب جـ ، أ ب على الترتيب ، أوجد طولي هذين العمودين اللذين يجعلان مساحة المستطيل

د هـ ب م **أكبر** ما يمكن ؟

الحل: مساحة المستطيل = س × ص

لكن من تشابه المثلثات $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ⇐ $\frac{٨}{١٢} = \frac{\text{ص}}{١٢ - \text{س}}$

⇐ ص = $\frac{٢}{٣}$ (١٢ − س) ⇐ ص = ٨ − $\frac{٢}{٣}$س

∴ م = س (٨ − $\frac{٢}{٣}$س) = ٨س − $\frac{٢}{٣}$س²

م′ = ٨ − $\frac{٤}{٣}$س ⇐ ∵ م′ = ٠ أي أن ٨ = $\frac{٤}{٣}$س

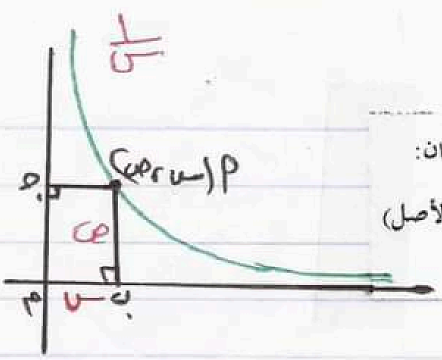
⇐ $\boxed{\text{س} = ٦}$

م″ = −$\frac{٤}{٣}$ < ٠ أي أن عندما س = ٦ قيمة عظمى

∴ طول م د = ٦سم

طول د هـ = ص = ٨ − $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٨ − ٤

= ٤سم




من النقطة P (س،ص) الواقعة على منحنى $ص = \frac{1}{س}$ ، س > ٠ رسم العمودان: P ب ، P جـ على المحورين الإحداثيين ، أوجد بعدي المستطيل P ب م جـ (حيث م نقطة الأصل) بحيث يكون محيطه **أصغر** ما يمكن ؟ ١٩٨٢

الحل: بما أن س > ٠ إذن P في الربع الأول

محيط المستطيل = ٢س + ٢ص ، $ص = \frac{1}{س}$

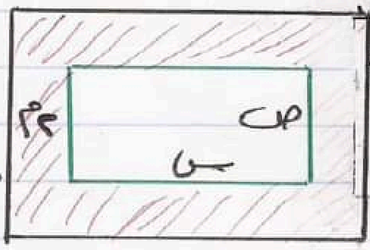
$\Leftarrow$ ل = ٢س + $\frac{٢}{س}$ $\Leftarrow$ ل' = ٢ − $\frac{٢}{س^2}$

ل' = ٠ $\Leftarrow$ ٢ − $\frac{٢}{س^2}$ = ٠ $\Leftarrow$ ٢ = $\frac{٢}{س^2}$ $\Leftarrow$ س² = ١ $\Leftarrow$ س = ١

س = −١ ×

ل'' = $\frac{٤}{س^3}$ $\Leftarrow$ ل''(١) > ٠ $\Leftarrow$ عندما س = ١ قيمة صغرى

∴ الأبعاد للمستطيل هي ١ ، $\frac{1}{1}$ = (١ ، ١) $\Leftarrow$ الشكل هو مربع طول ضلعه وحدة واحدة




يراد إنشاء حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٩٠٠ متر مربع وإحاطتها من جميع الجوانب بطريق خارجي منتظم عرضه ٢ متر. ١٩٨٣

أوجد أبعاد الحديقة التي تجعل المساحة الكلية للحديقة والطريق **أقل** ما يمكن ؟

الحل: مساحة الحديقة = م = س × ص $\Leftarrow$ ٩٠٠ = س ص $\Leftarrow$ ص = $\frac{٩٠٠}{س}$

م الحديقة الكلية = (س + ٤)(ص + ٤) $\Leftarrow$ م = (س + ٤)($\frac{٩٠٠}{س}$ + ٤)

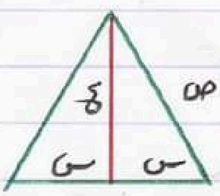
م = ٩٠٠ + ٤س + $\frac{٣٦٠٠}{س}$ + ١٦ = ٩١٦ + ٤س + $\frac{٣٦٠٠}{س}$

م' = ٤ − $\frac{٣٦٠٠}{س^2}$ $\Leftarrow$ م' = ٠ ∴ إذن ٤ = $\frac{٣٦٠٠}{س^2}$ $\Leftarrow$ س² = ٩٠٠

إذن س = ٣٠ لأن −٣٠ مرفوضة

م'' = $\frac{٧٢٠٠}{س^3}$ $\Leftarrow$ م''(٣٠) > ٠ $\Leftarrow$ عندما تكون س = ٣٠ قيمة صغرى

∴ الأبعاد للحديقة هي ٣٠ ، $\frac{٩٠٠}{٣٠}$ = ٣٠ ، ٣٠ [مربع الشكل)




سلك طوله ١٢ سم ، ثني ليكون مثلثاً متساوي الساقين، أوجد طول أضلاعه ليكون مساحته **أكبر** ما يمكن ؟ ١٩٨٤

مساحة المثلث = م = $\frac{1}{2}$ × ٢س × ع = س ع

لكن ع = $\sqrt{ص^2 - س^2}$ حسب فيثاغورس

لكن ١٢ = (محيط المثلث) = ٢س + ٢ص $\Leftarrow$ ص = ٦ − س

$\Leftarrow$ ع = $\sqrt{(٦ - س)^2 - س^2}$ = $\sqrt{٣٦ - ١٢س + س^2 - س^2}$ = $\sqrt{٣٦ - ١٢س}$

∴ م = س $\sqrt{٣٦ - ١٢س}$ $\Leftarrow$ م = $\sqrt{٣٦س^2 - ١٢س^3}$

م' = $\frac{٧٢س - ٣٦س^2}{٢\sqrt{٣٦س^2 - ١٢س^3}}$ $\Leftarrow$ م' = صفر ∴ ٧٢س − ٣٦س² = صفر